

**Н.Н. Белов,  
Д.Г. Копаница,  
О.Г. Кумпяк,  
Н.Т. Югов**



**Р**

**АСЧЕТ**

**ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ  
НА ВЗРЫВНЫЕ И  
УДАРНЫЕ  
НАГРУЗКИ**



Н.Н. Белов, Д.Г. Копаница,  
О.Г. Кумпяк, Н.Т. Югов

РАСЧЕТ  
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ  
НА ВЗРЫВНЫЕ И  
УДАРНЫЕ  
НАГРУЗКИ

Scientific & Technical Translations



Нортхэмптон—Томск 2004

# СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	8
<b>ГЛАВА I. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ДЕЙСТВИЕ ВОЗДУШНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ .....</b>	<b>11</b>
1.1. Общие сведения о нагрузке от воздушной ударной волны .....	11
1.1.1. Нагрузка от воздушной ударной волны на поверхности сооружений.....	23
1.2. Экспериментальные исследования железобетонных составных оболочек вращения на действие воздушной ударной волны .....	35
1.2.1. Конструкция моделей и характеристики материалов .....	35
1.2.2. Методика проведения экспериментов.....	38
1.2.3. Упругие деформации оболочек.....	41
1.2.4. Упруго-пластические деформации и разрушение оболочек.....	47
1.2.5. Формы разрушения оболочек от действия воздушной ударной волны .....	52
1.3. Экспериментальные исследования моделей реакторного отделения АЭС на действие воздушной ударной волны .....	55
1.3.1. Методика проведения эксперимента.....	56
1.3.1.1. Характеристика модели и материалов .....	56
1.3.1.2. Средства измерения и схема расстановки приборов .....	60
1.3.1.3. Параметры нагрузки .....	63
1.3.1.4. Динамические характеристики моделей .....	68
1.3.2. Деформации и прочность модели при действии воздушной ударной волны .....	73
1.3.2.1. Упругие деформации модели при действии воздушной ударной волны от одного взрыва .....	73
1.3.2.2. Упруго-пластические деформации и разрушение модели при действии воздушной ударной волны от одного взрыва .....	78

1.3.2.3.	Деформации модели при последовательном действии воздушной ударной волны от двух взрывов.....	85
1.3.3.	Динамика модели, заглубленной в грунт.....	91
1.3.3.1.	Динамика упругой модели, заглубленной в песчаную среду.....	91
1.3.3.2.	Упруго-пластические деформации и разрушение модели, заглубленной в песчаную среду.....	93
Литература к главе 1 .....		99

## **ГЛАВА 2. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ БЕТОНА, АРМАТУРЫ И ЖЕЛЕЗОБЕТОНА С ТРЕЩИНАМИ .....**

Введение .....		102
2.1.	Арматурная сталь.....	104
2.2.	Бетон.....	121
2.3.	Бетон при высокоскоростном нагружении.....	129
2.4.	Бетон при высокоскоростном растяжении.....	138
2.5.	Деформации арматуры в нормальной трещине.....	147
2.6.	Железобетонные конструкции .....	157
2.7.	Усилия, возникающие в наклонной трещине .....	165
2.7.1.	Силы зацепления при смещении берегов трещины.....	165
2.7.2.	Сопротивление продольной арматуры срезу.....	169
2.7.3.	Траектория движения трещины.....	178
Литература к главе 2 .....		181

## **ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА .....**

3.1.	Стадия без трещин, железобетон как изотропный материал.....	191
3.2.	Стадия без трещин, железобетон как анизотропный материал.....	200
3.3.	Элемент с трещинами, плоское напряженное состояние .....	202
3.4.	Учет локального разгружения.....	217
3.5.	Железобетонный элемент с трещиной при изгибе.....	222
3.6.	Критерий динамической прочности бетона при плоском напряженном состоянии .....	228

3.7. Схема разрушения и угол наклона трещины в плоском железобетонном КЭ .....	238
Литература к главе 3 .....	245
<b>ГЛАВА 4. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА .....</b>	<b>250</b>
4.1. Исходные уравнения и функционал .....	250
4.2. Дискретизация энергетического функционала на пространстве конечных элементов .....	253
4.3. Вынужденные колебания с затуханием. Матрица демпфирования .....	259
4.4. Численное решение динамической задачи .....	265
4.4.1. Уравнение динамического равновесия системы.....	265
4.4.2. Прямое численное интегрирование нелинейного уравнения движения. Метод Ньюмарка (Newmark-β) .....	265
4.5. Особенности динамического расчета железобетонных конструкций МКЭ .....	270
4.5.1. Методика расчетов.....	271
4.5.2. Оценка достоверности и точности результатов расчетов .....	277
4.5.3. Расчет железобетонной заземленной консольной пластины. Анализ сходимости решения.....	277
4.5.4. Расчет железобетонной балки на действие импульсивной нагрузки.....	279
4.5.5. Расчет высокой железобетонной балки с проемами в опорной зоне .....	283
4.5.6. Расчет модели защитной оболочки АЭС на действие воздушной ударной волны .....	288
4.5.7. Расчет модели энергоблока АЭС на действие воздушной ударной волны .....	290
Литература к главе 4 .....	292
<b>ГЛАВА 5. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ БЕТОННЫХ И ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С МОДЕЛЬНЫМИ СНАРЯДАМИ .....</b>	<b>295</b>

Введение .....	295
5.1. Математическая модель динамики деформируемого твердого тела.....	301
5.1.1. Универсальные уравнения механики сплошной среды.....	301
5.1.2. Определяющие соотношения теории пластического течения .....	303
5.1.3. Уплотнение пористых сред в ударных волнах .....	306
5.1.4. Уравнения состояния .....	315
5.1.5. Разрушение материалов при динамическом нагружении .....	319
5.1.6. Динамическое деформирование и разрушение керамики.....	324
5.1.7. Феноменологический подход к проблеме динамического разрушения хрупких материалов. Поведение бетона в условиях высокоскоростного удара .....	337
5.2. Расчет прочности конструкций из бетонных и железобетонных плит при взаимодействии с модельными снарядами.....	343
5.2.1. Физико-математическая модель поведения песчаного грунта при динамическом нагружении .....	343
5.2.2. Результаты математического моделирования соударения модельного снаряда с конструкциями из бетонных плит и песчаного грунта .....	354
5.2.3. Расчет прочности железобетонных стен обстройки реакторного отделения АЭС на действие от летящего предмета .....	357
Литература к главе 5 .....	368
<b>ГЛАВА 6. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОБЛЕМ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ .....</b>	<b>374</b>
Введение .....	374
6.1. Физико-математическая постановка задачи о высокоскоростном взаимодействии деформируемых твердых тел.....	377
6.1.1. Замкнутая система уравнений динамики пористой упругопластической среды .....	377

6.1.2.	Постановка трехмерной задачи о наклонном соударении ударника с системой пространственно разнесенных преград конечной толщины .....	381
6.2.	Метод конечных элементов в задачах соударения деформируемых твердых тел .....	385
6.2.1.	Уравнения движения для произвольного конечного элемента. Глобальные формы движения .....	385
6.2.2.	Конечно-разностные уравнения метода конечных элементов в двухмерных задачах соударения тел .....	391
6.2.2.1.	Плоские задачи .....	391
6.2.2.2.	Осесимметричные задачи .....	400
6.2.3.	Конечно-разностные уравнения метода конечных элементов в трехмерных задачах соударения тел .....	403
6.3.	Расчет контактных границ соударяющихся тел .....	411
6.3.1.	Алгоритм расчета контактных поверхностей соударяющихся тел .....	411
6.3.2.	Алгоритм перестройки конечно-элементной модели в случае разрушения материалов взаимодействующих тел .....	419
6.4.	Некоторые примеры использования метода конечных элементов для решения разнообразных задач высокоскоростного соударения деформируемых твердых тел .....	425
6.4.1.	Анализ взаимодействия сферического ударника с системой пространственно разнесенных мишеней .....	425
6.4.2.	Расчет ударного взаимодействия частиц с экранированным взрывчатым веществом .....	428
	Литература к главе 6 .....	432

## ВВЕДЕНИЕ

Строительство многих промышленных объектов в настоящее время невозможно без учета их реакции на динамические нагрузки. Исследование их прочности экспериментальными методами без глубокого теоретического анализа не дает необходимого результата, несмотря на огромные материальные затраты. Основы динамического расчета железобетонных конструкций были разработаны А.А. Гвоздевым. Предложенный им жесткопластический метод нашел применение в практике расчета. Однако область приложения полученных решений ограничивалась конструкциями, допускающими достаточно большие пластические деформации. Теория динамики железобетонных конструкций и совершенствование методов их расчета получили развитие в трудах крупных российских ученых: Р.О. Бакирова, В.И. Жарницкого, А.В. Забегаева, В.А. Котляревского, В.И. Майорова, Г.И. Попова, Н.Н. Попова, Б.С. Расторгуева, А.Е. Саргсяна и др. Современные методы динамического расчета железобетонных конструкций предполагают, наряду с аналитическими решениями, использование численных расчетов, что дает возможность провести расчет конструкций весьма сложной формы и определить их напряженно-деформированное состояние во всем диапазоне прочностных свойств материалов.

Содержание и расположение материала в данной книге в основном соответствует современному представлению о методах расчета прочности железобетонных конструкций при динамических нагрузках. В первой главе приведены результаты экспериментальных исследований моделей реакторного отделения АЭС на действие воздушной ударной волны

(ВУВ) от внешнего взрыва. Рассмотрены случаи, когда на сооружение действует ВУВ от двух последовательно проведенных взрывов. Исследовались модели, закрепленные на поверхности земли и заглубленные в песчаный грунт. Во второй и третьей главах рассмотрены расчетные модели бетона, арматуры и железобетона с трещинами, позволяющие моделировать поведение железобетона в условиях кратковременного динамического нагружения. В четвертой главе рассмотрены особенности динамического расчета железобетонных конструкций методом конечного элемента. Приведены примеры расчета линейных и пространственных железобетонных конструкций на действие ВУВ.

Поскольку книга должна не только фиксировать современный уровень, достигнутый по ряду вопросов, но и обрисовать перспективу его развития, авторы сочли возможным кратко осветить в порядке постановки и предварительного исследования проблемы, связанные с расчетом конструкций из бетонных и железобетонных плит при взаимодействии с модельными снарядами, в том числе содержащими взрывное вещество. В пятой главе излагается математическая модель, позволяющая в рамках механики сплошной среды рассчитывать напряженное и деформированное состояние и разрушение в твердых телах при динамических нагрузках. Разработанная на ее основе методика дает возможность рассчитывать в полной трехмерной постановке ударное взаимодействие твердых деформируемых тел с конструкциями, состоящими из слоев бетона, железобетона и песчаного грунта. Приведены результаты исследования железобетонных стен обстройки реакторного отделения АЭС на действие от летящего предмета. В шестой главе приводится модификация метода конечных элементов для решения задач высокоскоростного удара деформируемых твердых тел и представлены некоторые примеры его использования. В частности, приведены анализ взаимодействия сферического ударника с системой пространственно-разнесен-

ных мишеней и расчет ударного взаимодействия частиц с экранированным взрывчатым веществом.

Авторы не претендуют на исчерывающую полноту изложения современных методов прочностных расчетов железобетонных конструкций в условиях удара и взрыва, ограничившись лишь областью науки, в которой они наиболее заинтересованы. Мы заранее благодарим читателей за критические пожелания и замечания в наш адрес.

## ГЛАВА 1

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ДЕЙСТВИЕ ВОЗДУШНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

### 1.1. Общие сведения о нагрузке от воздушной ударной волны

Взрывные воздействия в общем случае нестационарны во времени и пространстве. Принимая во внимание ориентацию взрыва, можно отметить три наиболее вероятных случая: воздушный взрыв, наземный взрыв и подземный взрыв.

Для воздушного взрыва характерна сферическая ударная волна, которая достигает поверхности Земли и отражается от нее. На некотором расстоянии от эпицентра взрыва фронты падающей и отраженной волн накладываются. В результате чего образуется головная, распространяющаяся вдоль поверхности Земли, ударная волна с практически вертикальным фронтом. Зону, в которой распространяется головная волна, принято называть дальней зоной.

Характер воздушной ударной волны (ВУВ) при наземном взрыве соответствует дальней зоне воздушного взрыва. Таким образом, как при воздушном, так и при наземном взрывах обычно рассматривают ВУВ, распространяющуюся от эпицентра с вертикальным фронтом. Характерная картина волнообразования при наземном взрыве показана на рис. 1.1.

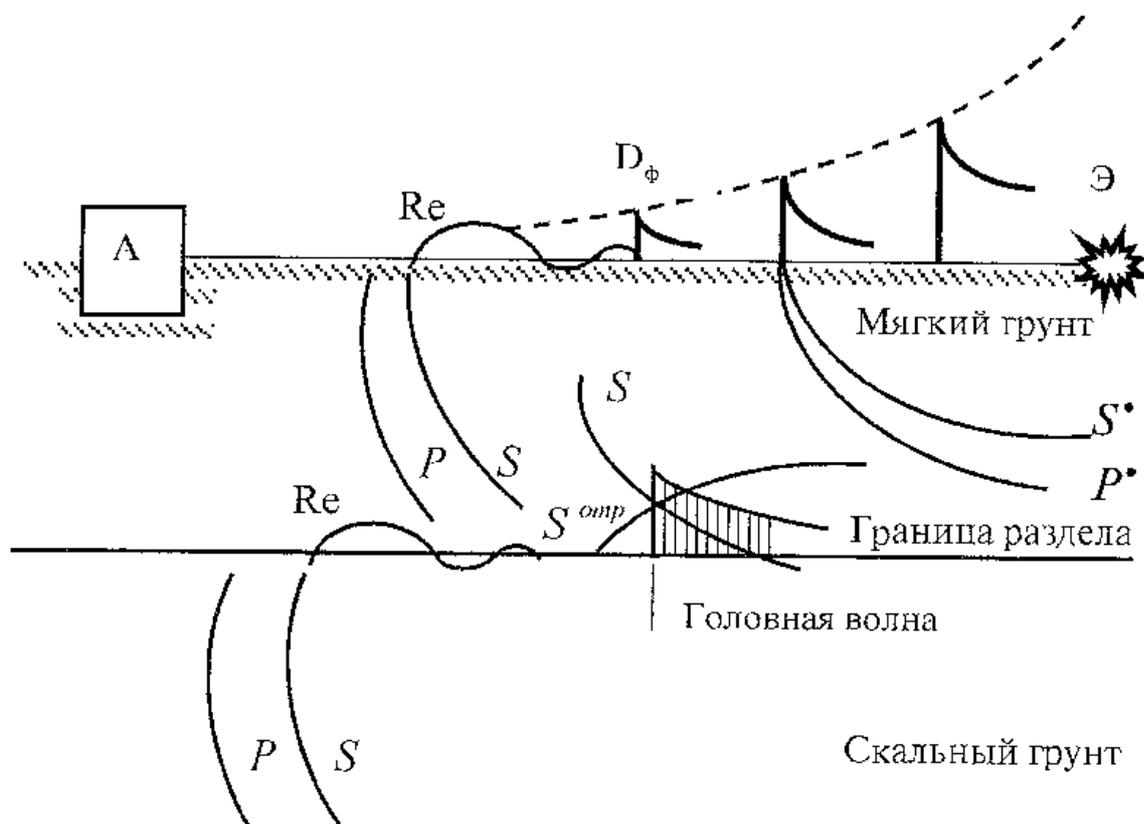


Рис. 1.1. Схема образования ударных волн при наземном взрыве  $A$  – исследуемый объект;  $\mathcal{E}$  – эпицентр взрыва;  $D_\phi$  – скорость фронта ВУВ;  $P^*$  – упругая (первичная) волна генерированная ВУВ;  $S^*$  – поперечная (вторичная) волна, генерированная ВУВ;  $P$  – упругая (продольная) эпицентральной сейсмозрывная волна;  $S$  – поперечная эпицентральной сейсмозрывная волна;  $S^{omp}$  – отраженная эпицентральной сейсмозрывная волна;  $Re$  – волна Релея

Воздушная ударная волна, распространяясь от эпицентра взрыва, замедляется, давление на фронте с расстоянием снижается. Волна сжатия, возникающая при этом, в мягком (верхнем) слое грунта отражается от границы раздела, формируясь в головную ударную волну.

Скорость эпицентральной сейсмозрывной волны может значительно превысить скорость фронта ВУВ. Направле-

ние, характер развития и скорость продвижения сейсмозрывных волн определяются грунтовыми условиями, мощностью взрыва, а также местом его расположения. Упрощая схему, можно представить последствия взрыва в виде последовательности двух групп ударных волн. Сначала на сооружение действуют сейсмозрывные ударные волны (СВУВ), включая возникающие на границах раздела поверхностные волны Релея и Лява. Затем — воздушная ударная волна.

Для сейсмозрывной волны наиболее заметны первые три фазы колебания грунта. На рис. 1.2 показана велосиграмма, в соответствии с которой были проведены расчеты массовой скорости и продолжительности циклов колебаний грунта, сведенные в табл. 1.1, где  $a_0$  — скорость продольной волны, принятая для колебаний в зависимости от плотности грунта и давления на фронте ВУВ и рассчитанная для средней плотности грунта,  $\rho$  — плотность грунта.

В работах, связанных с кинематическим анализом сооружения ( $w, \dot{w}, \ddot{w}$  — смещение, скорость и ускорение соответственно) при внешнем динамическом воздействии, особое место уделено экспериментальным исследованиям. Отметим, что ускоренная проверка несущей способности конструкций зданий и сооружений на сейсмическое воздействие может быть осуществлена с помощью взрывов. Этот ме-

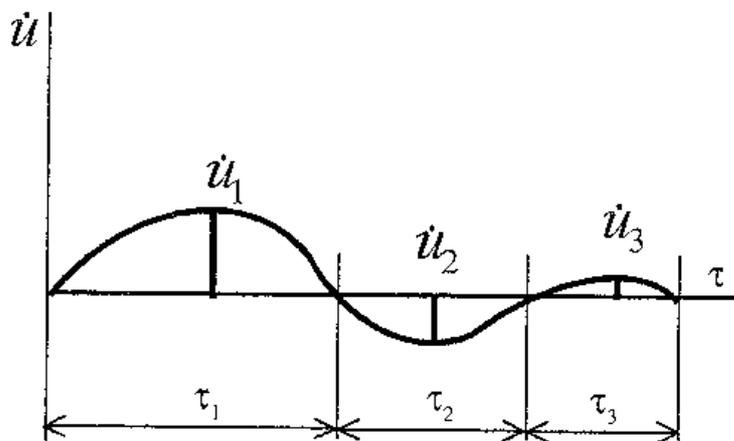


Рис. 1.2. Велосиграмма сейсмозрывной волны

Таблица 1.1

Тип грунта	$\Delta P_{\Phi}$ , кПа	$\tau_1$ (с)	Массовая скорость, $u$ (см/с)
Пески и супеси $\rho = 1600-1800 \text{ кг/м}^3$ $a_0 = 500 \text{ м/с}$	30	0,01	9,0
	50	0,02	14,0
	100	0,03	28,0
Тяжелые суглинки, глины средней плотности $\rho = 1600-1900 \text{ кг/м}^3$ $a_0 = 900 \text{ м/с}$	30	0,007	6,4
	50	0,013	10,7
	100	0,028	21,36
Песчаники $\rho = 2100-2500 \text{ кг/м}^3$ $a_0 = 3000 \text{ м/с}$	30	0,0014	1,45
	50	0,0027	2,53
	100	0,007	4,65
Известняки $\rho = 2300-2600 \text{ кг/м}^3$ $a_0 = 3500 \text{ м/с}$	30	0,0003	0,75
	50	0,0003	1,27
	100	0,0012	2,50

год считается эффективным и перспективным. Очевидно что данные, полученные при испытаниях натуре на действие взрывных волн, представляют значительный интерес.

На рис. 1.3 показаны схема эксперимента и виброграммы грунта, полученные при испытаниях сооружения на действие СВУВ [20]. Заряд располагался в линию на расстоянии трех метров от объекта. Общий вес ВВ равен 33 кг. Как видно из рис. 1.6, графики скоростей получены в виде кривых, включающих три определенных полуволны.

Значительные массовые скорости ( $\dot{y} = 5-6 \text{ см/с}$ ) [13] могут вызвать разрушения обычных строительных объектов. Сравнение времени прихода к объекту СВУВ и ВУВ показывает, что задержка воздушной волны может быть значительной. Эта задержка увеличивается с увеличением плотности грунта и зависит от расстояния до места взрыва.

Сложная задача оценки несущей способности сооружения при однократном и неоднократном динамическом воз-

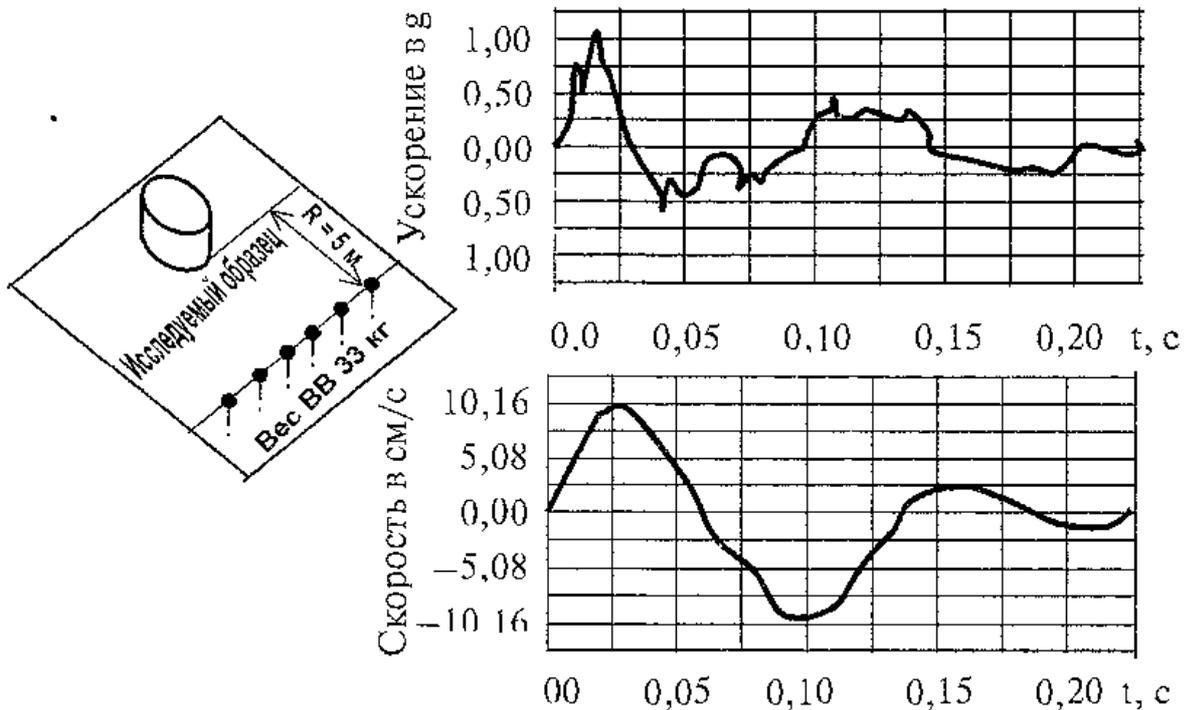


Рис. 1.3. Виброграммы грунта (взрывные капсулы расположены в ряд, возбудитель на глубине 0,6 м) [20]

действию (в частности от последовательного действия СВУВ и ВУВ) должна быть обеспечена некоторым набором данных, отражающих качественные и количественные характеристики процесса.

Существует эмпирическая зависимость, позволяющая выявить необходимость учета действия СВУВ:

$$\bar{R} \geq 150 \frac{M}{T^3}, \quad (1.1)$$

где  $T$  – вес тротилового эквивалента ВВ в т,  $\bar{R}$  – приведенный радиус, за пределами которого СВУВ не вызывает поражения объекта.

Рассмотрим параметры взрывов, когда вес заряда  $q_1 = 10 \text{ т}$ ;  $q_2 = 10^2 \text{ т}$ ;  $q_3 = 10^3 \text{ т}$  (вес заряда эквивалентен тротилу). Переход к другим мощностям может быть проведен на основании закона подобия, согласно которому при взрывах в од-

ной и той же среде зарядов различной мощности  $q_1$  и  $q_2$  одинаковые параметры ВУВ наблюдаются на расстоянии  $R_1$  и  $R_2$  пропорционально отношению корней кубических из веса зарядов:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sqrt[3]{q_1}}{\sqrt[3]{q_2}}. \quad (1.2)$$

Эта формула используется также при вычислениях времени прихода фронта волны, продолжительности фазы сжатия и других параметров.

Скорость продвижения фронта ВУВ определяется зависимостью [17]:

$$D_\phi = 340 \sqrt{1 + 0,83 \Delta p_\phi}, \quad (1.3)$$

где 340 – скорость звука в невозмущенной воздушной среде, м/с;  $\Delta p_\phi$  – давление на фронте ВУВ, МПа.

Расчетное время прихода фронта ВУВ к объекту от места взрыва:

$$t_\phi = \frac{R_u}{D_\phi}, \quad (1.4)$$

где  $R_u$  – расстояние от места взрыва до объекта;  $D_\phi$  – скорость фронта ВУВ.

Расчетное время прихода эпицентральной волны к объекту:

$$t_s = \frac{R_u}{a_o}, \quad (1.5)$$

где  $R_u$  – расстояние от места взрыва до объекта;  $a_o$  – скорость продольной волны в грунте, м/с.

Результаты расчетов сведены в табл. 1.2, где приведены данные о параметрах ВУВ и дано сравнение времени прихода ВУВ и СВУВ к объекту от места взрыва.

Таблица 1.2

Вес заряда, т	$q=10$			$q=10^2$			$q=10^3$		
Давление на фронте ВУВ, кПа	10	30	50	10	30	50	10	30	50
Расстояние от места взрыва $R_q$ , м	245	111,4	85,0	530	246	185	1140	530	397
Продолжительность фазы сжатия $\tau$ , с	0,092	0,068	0,058	0,198	0,147	0,126	0,427	0,317	0,271
Расчетное время прихода ВУВ к объекту от места взрыва $t_\phi$ , с	0,562	0,205	0,134	1,206	0,441	0,288	2,600	0,950	0,620
Расчетное время прихода ЭСУВ к объекту от места взрыва $t_s$ , с									
пески и супеси	0,490	0,223	0,170	1,060	0,492	0,370	2,280	1,060	0,794
тяжелые суглинки, средние глины	0,272	0,124	0,094	0,589	0,373	0,206	1,127	0,589	0,441
песчаники	0,020	0,028	0,037	0,042	0,062	0,082	0,091	0,132	0,177
известняки	0,017	0,024	0,032	0,036	0,053	0,070	0,078	0,113	0,152

Продолжение таблицы 1.2.

Расчетное время запаздывания ВУВ после ЭСУВ, $\Delta t$ , с			
пески и супеси	0,072—0,018—0,036	0,146—0,051—0,082	0,320—0,110—0,174
тяжелые суглинки средние глины	0,290 0,081 0,040	0,617 0,168 0,082	1,473 0,361 0,179
песчаники	0,542 0,177 0,097	1,164 0,379 0,206	2,509 0,818 0,443
известняки	0,545 0,181 0,102	1,170 0,388 0,218	2,522 0,837 0,468

Как видно из таблицы 1.2, на «рыхлых» грунтах скорость сейсмических волн соизмерима со скоростью воздушной волны. В этом случае можно говорить о расчете сооружения на действие ВУВ без учета кинематического возбуждения по грунту.

При действии ВУВ возникает сложная дифракционная картина взаимодействия. Поле давлений во времени зависит от параметров волны, характеристик объекта, размеров и ориентации объектов относительно фронта волны. Наибольший интерес для задач взаимодействия конструкции с ударной волной представляют распределение давления по ее поверхности, скорость продвижения фронта, а также длина волны и форма ее импульса.

Условно различают «длинную» и «короткую» ударные волны. В первом случае:

$$L > l,$$

$L = D_{\phi} \tau_{\phi}$  — длина волны;  $D_{\phi}$  — скорость фронта;  $\tau_{\phi}$  — продолжительность фазы сжатия;  $l$  — линейный размер объекта.

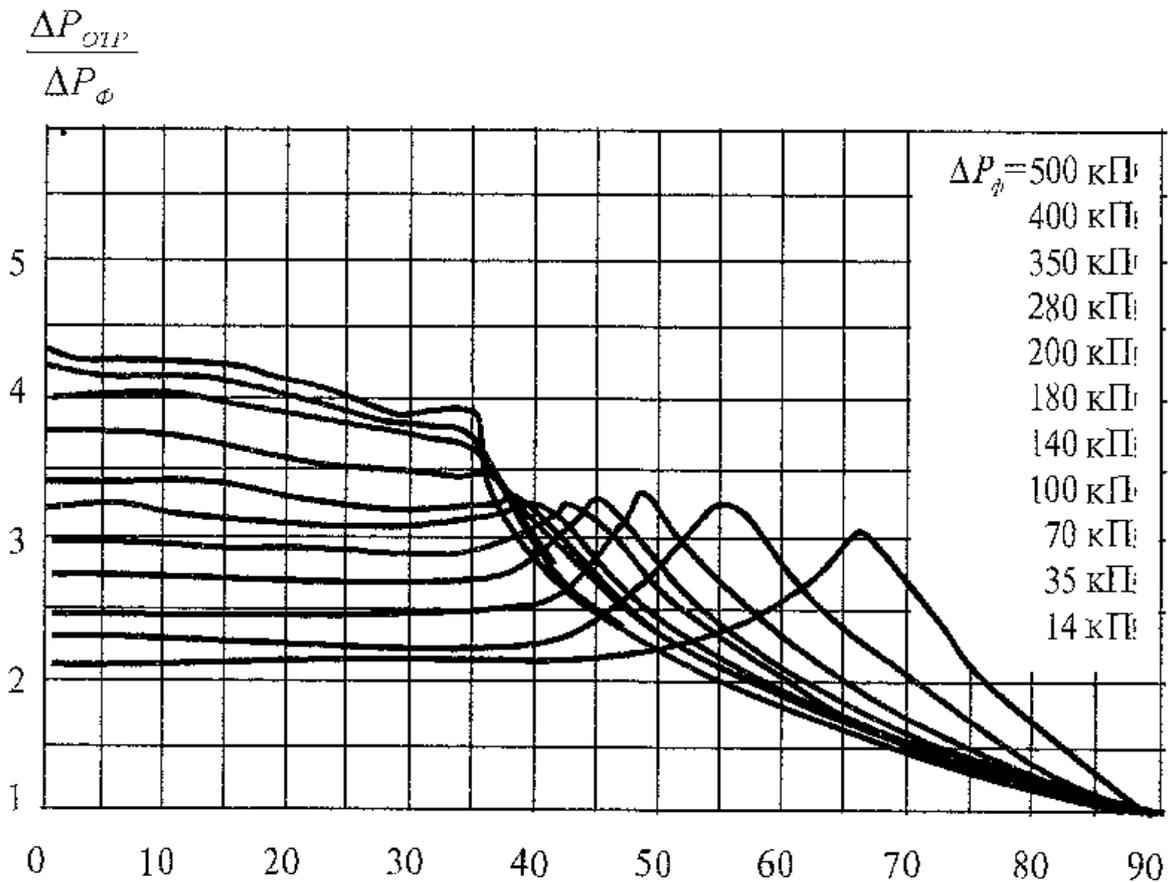


Рис. 1.4. Давление отражения при падении фронта ударной волны под углом  $\alpha$  к преграде [10]

Для «короткой» волны типично воздействие импульсно-го характера [2].

Действие «длинной» волны включает две основные фазы взаимодействия — дифракцию и установившееся (квазистационарное) обтекание. Фаза дифракции непродолжительна, и давления, возникающие на поверхности, нестационарны. Как правило, деформации, определяющие состояние конструкции, возникают в процессе квазистационарного обтекания. В опытах на ударных трубах и при численном расчете двумерных течений было обнаружено, что для конструкций в форме параллелепипеда отраженное избыточное давление ( $p_{отр}$ ) изменяется до давления торможения за время:

$$t_{обт} = 3H / D_{\phi}, \quad (1.6)$$

где  $D_{\phi}$  — скорость фронта ВУВ,  $H$  — меньшая величина высоты или половины ширины конструкции.

Если преграда по отношению к направлению движущейся волны находится под некоторым углом  $\alpha$ , возникает отраженная волна с давлением  $\Delta P_{отр}$ , определяемым давлением в падающей волне  $\Delta P_{\phi}$  и углом  $\alpha$ , как на рис. 1.4 [10].

В момент встречи ВУВ с преградой на поверхности последней возникает волна отражения с давлением  $\Delta p_{отр}$ , после чего волна продвигается по поверхности объекта, захватывая ненагруженные участки.

Сведения о распределении давлений на цилиндр и другие криволинейные поверхности в виде колец или круговых арок опубликованы в справочной литературе и для практических расчетов могут быть приняты в виде графических зависимостей, показанных на рис. 1.5, 1.6, 1.7 [10].

Допустим, что поверхность оболочки является абсолют-

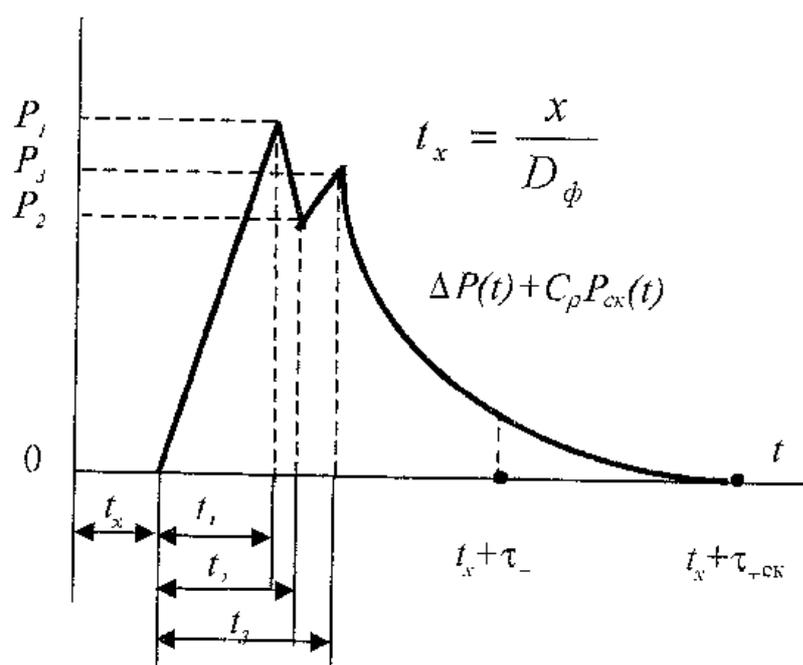


Рис. 1.5. Нагрузки на кольцевые и арочные конструкции

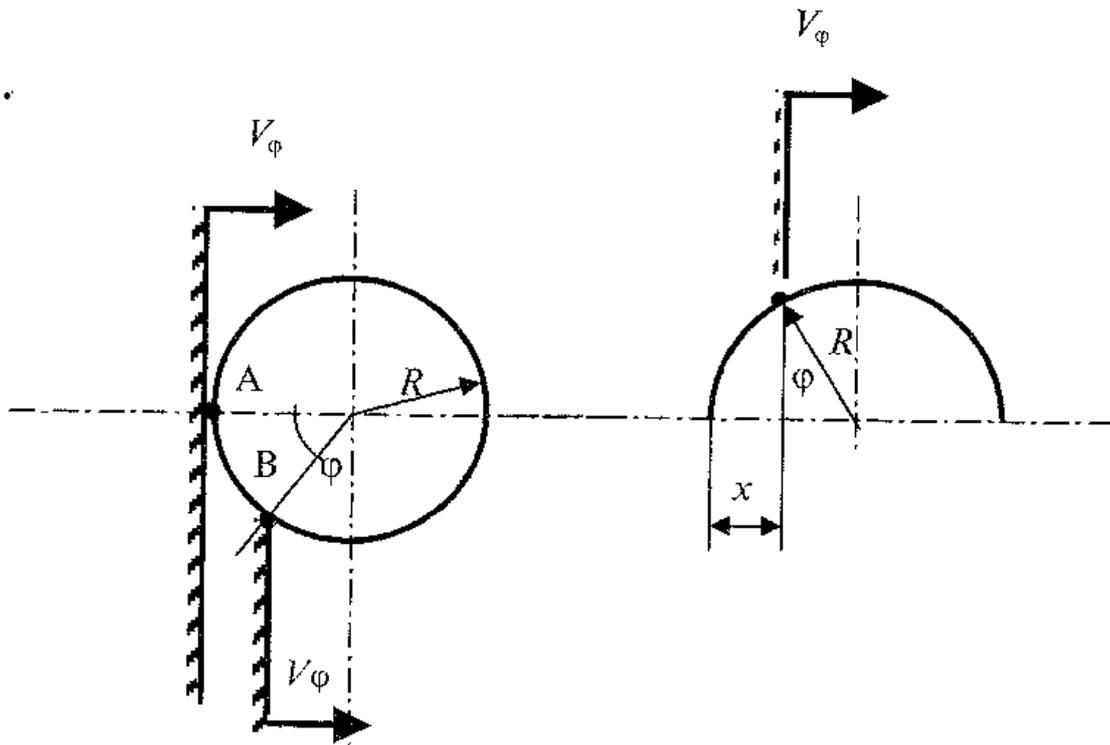


Рис. 1.6. Перемещение фронта волны по оболочке

но твердой и не деформируется при обтекании воздушным потоком. В этом случае малая площадку, расположенная в окрестности критической точки  $A$  (рис. 1.6), в момент встречи с фронтом волны будет воспринимать то же давление, что и плоская преграда [5].

Изменение давления во времени  $P(t)$  в стадии дифракции может быть аппроксимировано тремя отрезками прямых с началом нагружения в точке с координатой  $x$ . Время прихода ВУВ определяется формулой:

$$t_x = \frac{x}{D_\phi}. \quad (1.7)$$

Характерные параметры функции  $P(t)$ ,  $P_i$  и  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) зависят от координаты точки, размера  $R$  и давления  $\Delta P_\phi$ . Эти данные представлены в зависимости от угла  $\alpha$  ( $\ddot{P}_i = P_i / \Delta P_{отр}$ ,  $\ddot{t}_i = t_i D_\phi / R$ ,  $\Delta P_{отр}$  — давление нормального от-

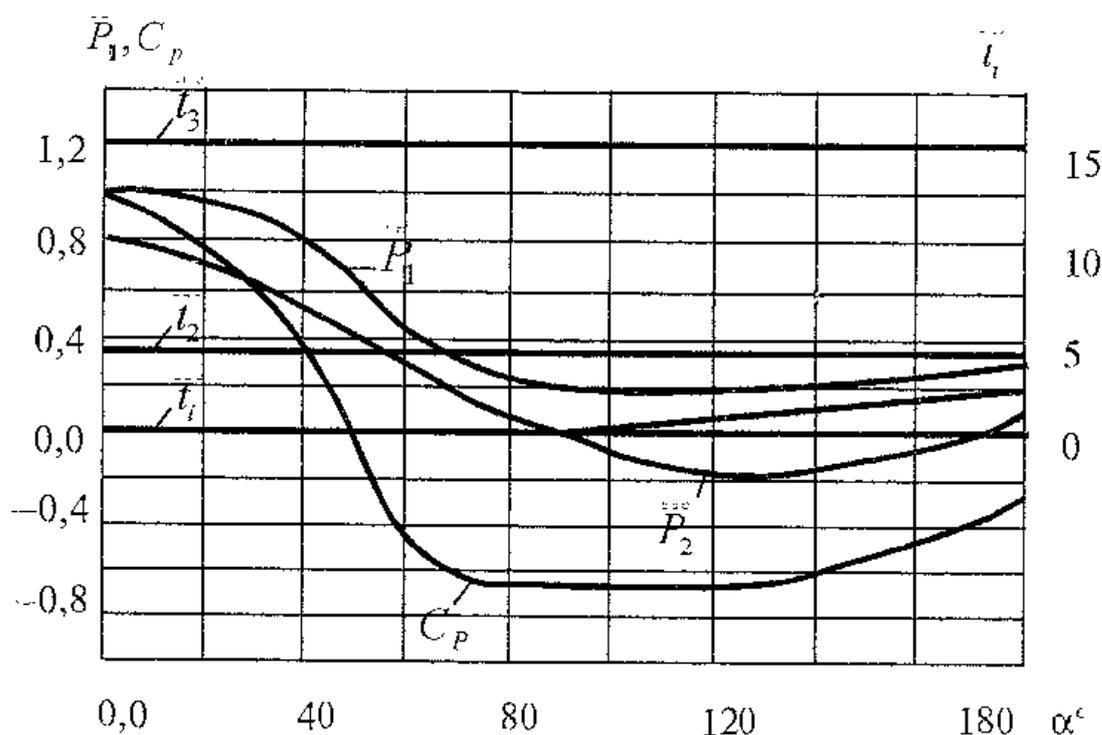


Рис. 1.7. Диаграммы функции давления  $\ddot{P}_1$  и коэффициента давления  $C_p$  [18]

ражения). Давление  $P$  в фазе квазистационарного обтекания при  $t > t_3$  представляет сумму скоростного напора  $P_{ск}(t)$  в волне с учетом коэффициента давления  $C_p$ :

$$P = \begin{cases} \Delta P(t) + C_p(\alpha)P_{ск}(t) & (t_3 < t - X/D_\phi < \tau_+) \\ C_p(\alpha)P_{ск}(t) & (\tau_+ < t - X/D_\phi < \tau_{+ск}). \end{cases} \quad (1.8)$$

Максимум давления от скоростного напора возникает очень быстро. Последующее его изменение близко к квадрату пикового избыточного давления при небольших нагрузках и пропорционально значениям избыточного давления при самых высоких значениях нагрузки [4].

В связи со сложной картиной взаимодействия ударных волн с телами различной формы в расчетной практике для

определения динамических нагрузок часто используют полученное экспериментально на геометрически подобной модели объекта пространственно-временное распределение давления на его поверхности. Требования подобия распространяются также на условия взрыва, параметры ударной волны и ориентацию объекта относительно фронта волны [10].

### 1.1.1. Нагрузка от воздушной ударной волны на поверхности сооружений

Применительно к строительным сооружениям АЭС проведены теоретические и экспериментальные исследования, результаты которых изложены ниже. Для получения исходных данных о нагрузках и характере распределения давлений по поверхностям основных сооружений были проведены эксперименты с использованием абсолютно жестких моделей.

Рассмотрим результаты, полученные на макете, выполненном в масштабе 1/200. Макет составлен из основных и вспомогательных сооружений АЭС и представляет собой монолитную железобетонную конструкцию на поворотной платформе (рис. 1.8).

Определение параметров нагрузки по ходу ударной волны и на поверхностях конструкций проводилось посредством мембранных преобразователей давлений, показанных на рис. 1.8.

Эксперименты проведены на открытой местности, а также в реактивной ударной трубе. В процессе опытов диапазон давлений на фронте ВУВ изменялся в пределах  $\Delta P_{\phi} = 30\text{--}50$  кПа через 10 кПа. На каждом этапе платформа поворачивалась на угол  $15^{\circ}$  в пределах от 0 до  $90^{\circ}$ . Таким образом, на каждом этапе проведено семь серий испытаний по три опыта для каждой позиции.

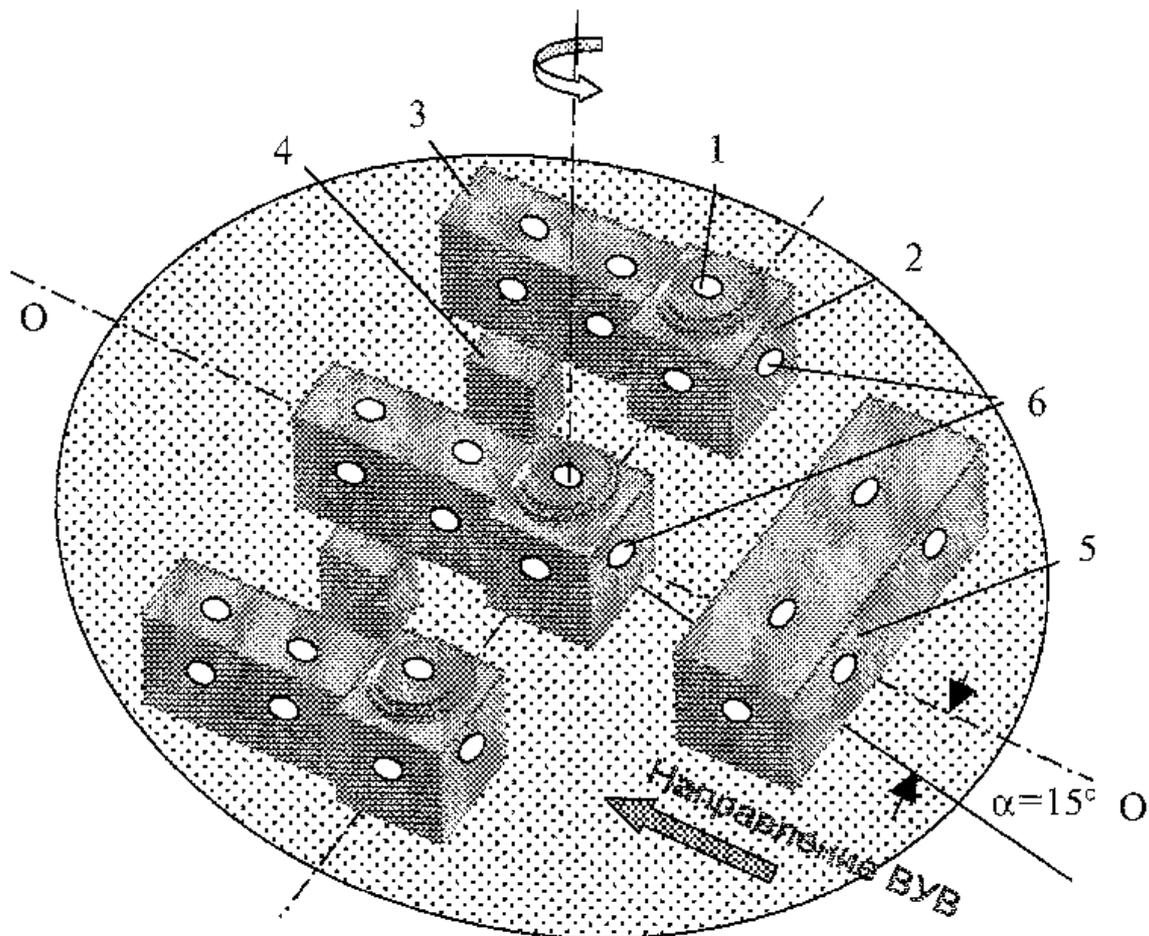


Рис. 1.8. Макет АЭС с ВВЭР 1000 на поворотной платформе  
 1 – защитная оболочка; 2 – обстройка реакторного отделения; 3 – машинный зал; 4 – генераторное отделение; 5 – административно-бытовой корпус; 6 – преобразователи давлений

Наиболее характерны полученные эпюры давлений при  $\alpha=0^\circ$ ,  $\alpha=45^\circ$ ,  $\alpha=90^\circ$  (рис. 1.9). При  $\alpha=0^\circ$  фронт волны проходил вдоль оси  $O-O$  со стороны макета административного здания. Как видно из рис. 1.9, наибольшие давления в отражении возникли на поверхности стены макета административного здания (5), обращенной к ударной волне, а также на фронтальной стене обстройки реакторного отделения (2), не закрытого административным зданием. На поверхностях сооружений, прикрытых административным зданием, нагрузки были меньшими на 10–15%.

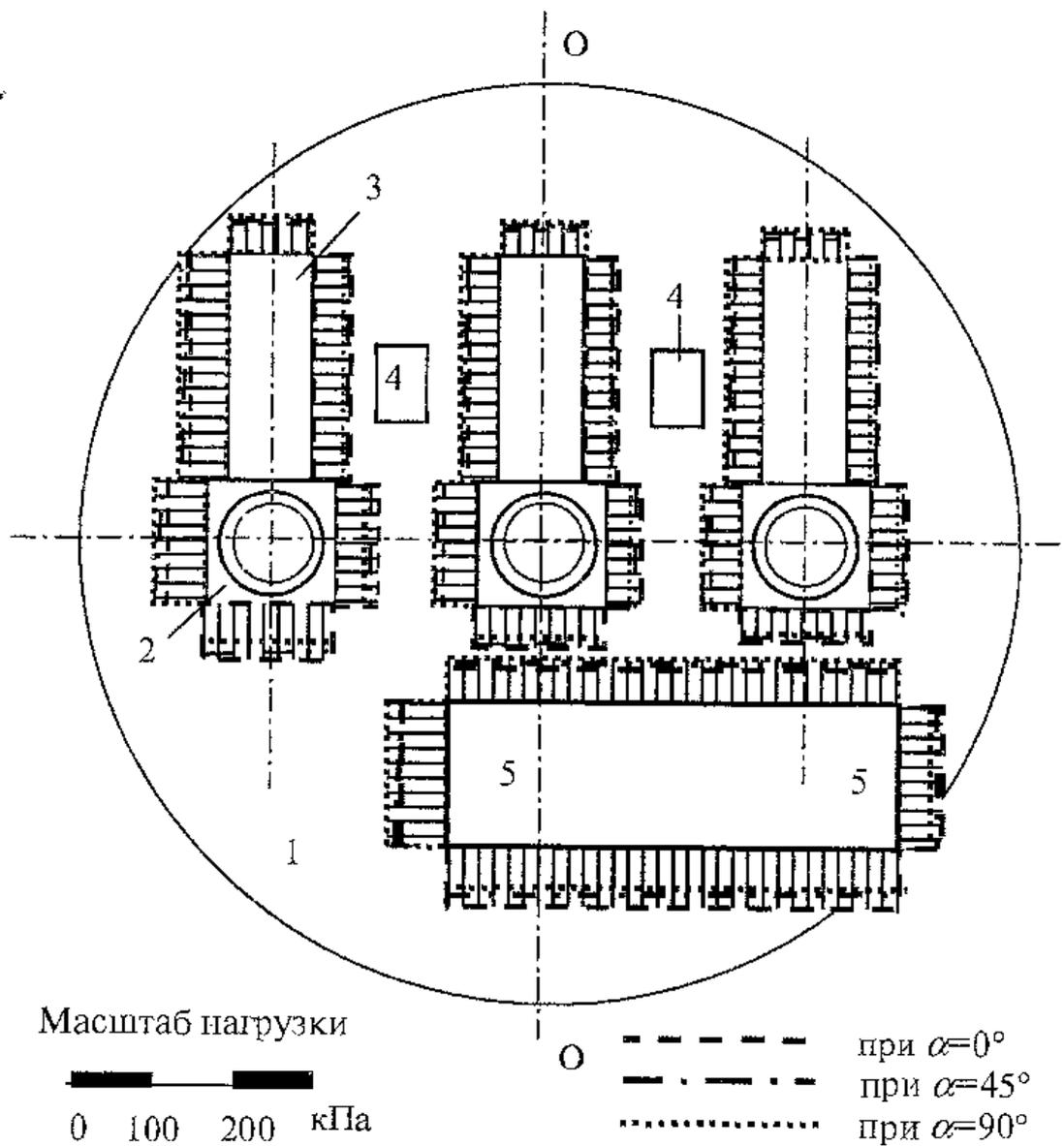


Рис. 1.9. Эпюры давлений в зависимости от ориентации платформы к направлению движения ВУВ: 1 — поворотная платформа; 2 — реакторное отделение; 3 — машинный зал; 4 — генераторное отделение; 5 — административное здание [60]

Общая картина движения волн между объектами оказалась весьма сложной. Заметим, что при рассмотрении хронологии действующей нагрузки можно отметить моменты, когда давления на боковых или тыльных поверхностях ма-

кетов сооружений были большими, чем на фронтальных, и наоборот. Соотношения величин давлений полученные нами весьма разнообразны, поэтому для простоты представлений о распределении нагрузок и для выбора наиболее невыгодного направления взрыва были построены интегральные эпюры давлений.

Из их рассмотрения следует, что при  $\alpha=45^\circ$  практически на всех строительных объектах от действия воздушной ударной волны возникли нагрузки, близкие по значениям к максимальным. При  $\alpha=90^\circ$  основная нагрузка пришлась на макет крайнего реакторного отделения, совмещенного с машинным залом. При этом давления на макетах корпусов, стоящих следом по ходу волны, были меньшими на 20–40%.

Из вышесказанного можно сделать следующие выводы:

- если рассматривается задача о распределении нагрузок для сооружений станции в целом, то наиболее невыгодным можно считать направление ВУВ от взрыва, ориентированного под углом  $\alpha=45^\circ$  относительно оси О–О;
- если рассматривается задача о распределении нагрузки на сооружение реакторного отделения, то в этом случае наибольшие нагрузки от ударной волны возникнут на поверхностях нормально ориентированных стен обстройки, то есть при  $\alpha=0^\circ$  или при  $\alpha=90^\circ$ .

Сведения о нагрузках, полученные на жестком макете, были приняты за основу и дополнены результатами экспериментов на деформируемых моделях, выполненных в масштабе 1:35.

Параметры нагрузок измерялись мембранными преобразователями давлений, расположенными по ходу движения воздушной ударной волны и на поверхности конструкций модели. Преобразователи давлений были расположены также и во внутренних объемах модели для регистрации волн затекания. На рис. 1.10 показана схема измерений параметров нагрузки и осциллограммы давлений в точках измерений.

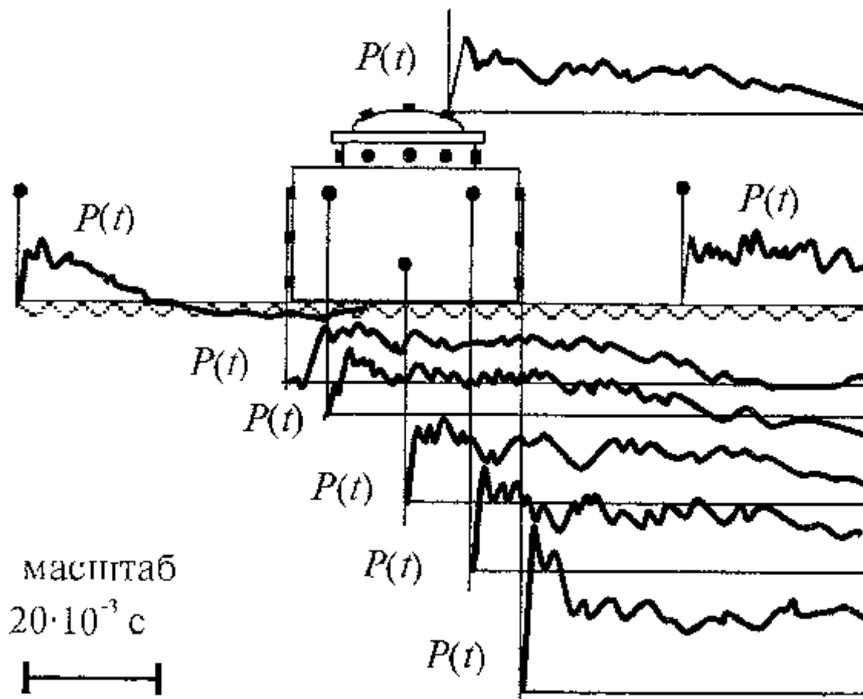


Рис. 1.10. Схема измерений и осциллограммы нагрузки от проходящей ВУВ [8]

Конструкция модели реакторного отделения представляет собой сочетание простых геометрических форм. Учитывая, что конструктивные решения реакторного отделения АЭС предусматривают строительство отдельно стоящих защитных оболочек и оболочек, совмещенных с обстройкой, рассмотрим сначала результаты исследований нагрузки от ВУВ на поверхностях обстройки, являющейся прямоугольным параллелепипедом. Затем приведем результаты исследований для оболочки.

Исследования проводились в реактивной ударной трубе, в которой нагрузка создавалась направленным взрывом. Результаты, показанные на рис. 1.10, получены при  $P_{\phi} = 50$  кПа при скорости фронта  $D_{\phi} = 395$  м/с. Возникшая при соприкосновении с фронтальной гранью обстройки отраженная волна в два раза превысила давление на фронте проходящей волны. По мере продвижения фронта волны вдоль конструкции отраженная волна перетекает с фронтальной стены

на боковые грани параллелепипеда, вызывая на фронтальной стене разряжения, чему соответствуют завалы на осциллограмме фронтального преобразователя. На верхней грани обстройки давление убывает за счет потери энергии продвигающейся волны. Анализ результатов показывает, что по высоте обстройки давление непостоянно и возрастает к основанию. Этот градиент определяется скоростью ударной волны. При увеличении скорости потока разница давлений на верхнем срезе обстройки и у ее основания уменьшается.

Наличие разности давлений создает подъемную силу и опрокидывающий момент в процессе обтекания. В процессе затекания волны за тыльную грань возникают кратковременные всплески давлений за счет схлопывания.

По результатам нескольких опытов построены идеализированные эпюры давлений, показывающие характерные изменения нагрузки на поверхностях модели по мере продвижения фронта ударной волны. В качестве примера на рис. 1.11 показаны данные опытов при  $\Delta P_{\phi} = 70$  кПа.

Сведения, полученные в процессе экспериментов, были обобщены и сопоставлены с известными результатами [3, 6, 10, 16]. Для практических расчетов интересны обобщенные эпюры давлений, построенные в зависимости от величины и продолжительности действующей нагрузки, учитывающие геометрические особенности исследуемого объекта. Такие эпюры показаны на рис. 1.12, они хорошо согласуются с результатами проведенных экспериментов.

Исследования нагрузки на оболочках в масштабе 1:150 проведены сначала на жестком шаблоне в диапазоне давлений  $\Delta P_{\phi} = 27-75$  кПа. При этом фаза сжатия изменялась в пределах 10–50 мс.

Рассматривая горизонтальное сечение, отметим точку соприкосновения фронта ударной волны с цилиндром. В этом случае малая площадка, расположенная в окрестности отмеченной точки, в момент встречи с фронтом волны вос-

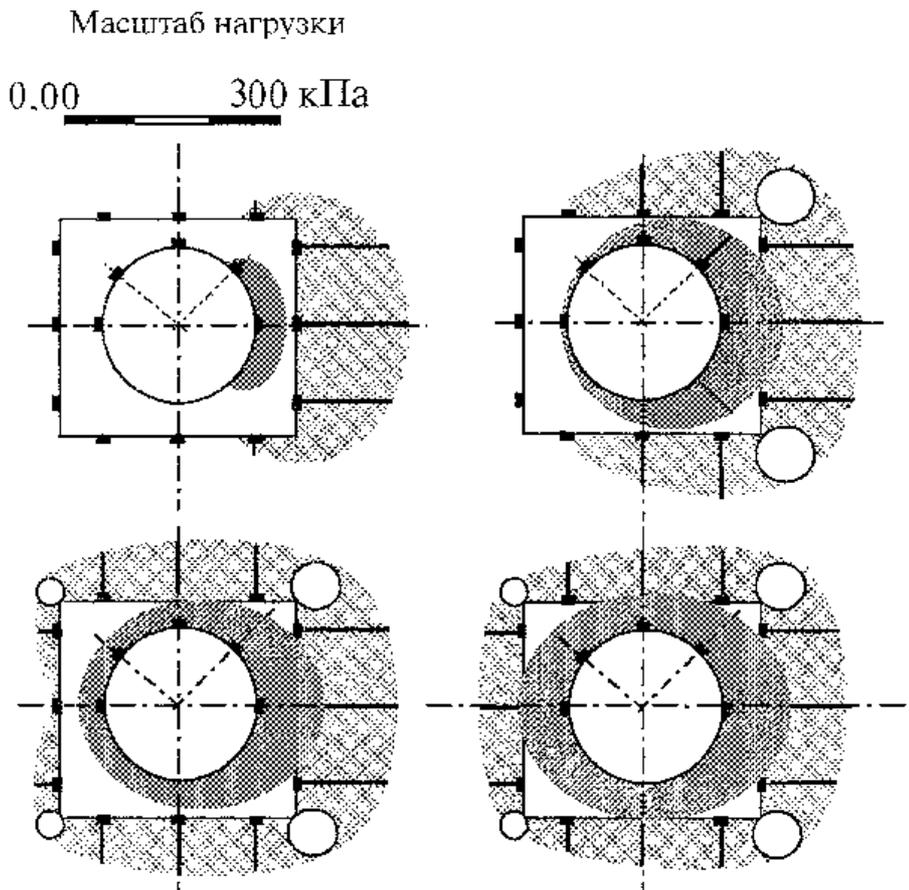


Рис. 1.11. Эпюры давления на поверхности модели,  $\Delta P_{\phi} = 70$  кПа

принимает давление, соответствующее давлению на плоской неподвижной преграде. После соприкосновения фронт волны перемещался по оболочке, захватывая участки поверхности, расположенные под углом к направлению движущейся волны. С течением времени величина давления изменялась по некоторому закону, соответствующему квазистационарному обтеканию волны, следующему за скачком уплотнения.

Изменение давления на фронте ВУВ приводило к изменению эпюр нагрузки. Для средних по величине нагрузок в диапазоне принятых давлений построены эпюры, показанные на рис. 1.13. За единицу на рис. 1.13 принято максимальное давление в отраженной волне.

Результаты экспериментов на жестком шаблоне были

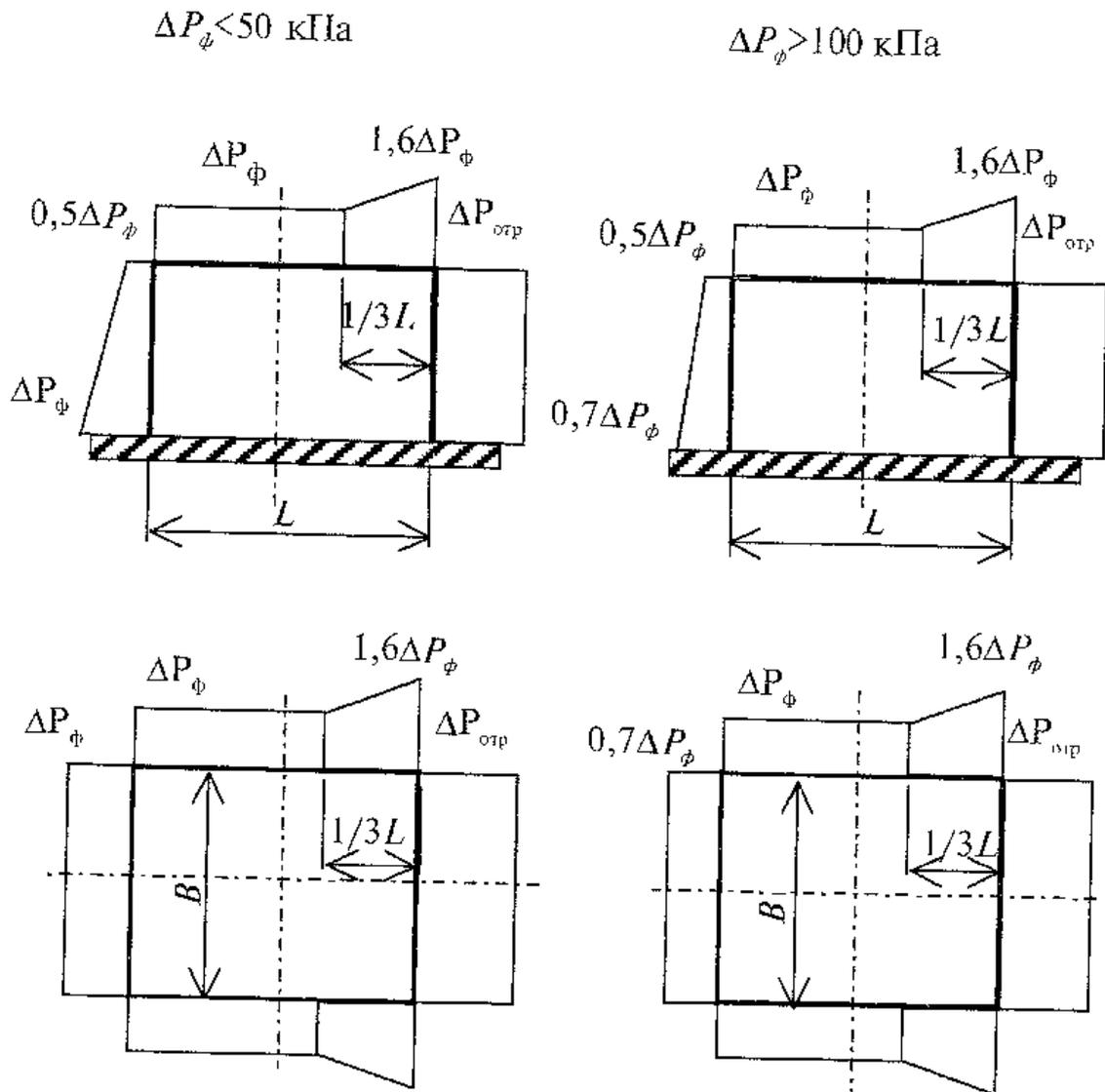


Рис. 1.12. Опоры давления на поверхности обстройки в зависимости от давления на фронте ВУВ

дополнены результатами, полученными при испытаниях железобетонных моделей оболочек АЭС, выполненных в масштабе 1:50. Был расширен диапазон нагрузок, верхний предел которых составил  $\Delta P_\phi = 280$  кПа. Продолжительность фазы сжатия изменялась в пределах 2–10  $T_1$ , здесь  $T_1$  – наибольший из периодов собственных колебаний.

Анализ результатов показал, что изменение давлений во времени в фазе дифракции может быть ограничено тремя

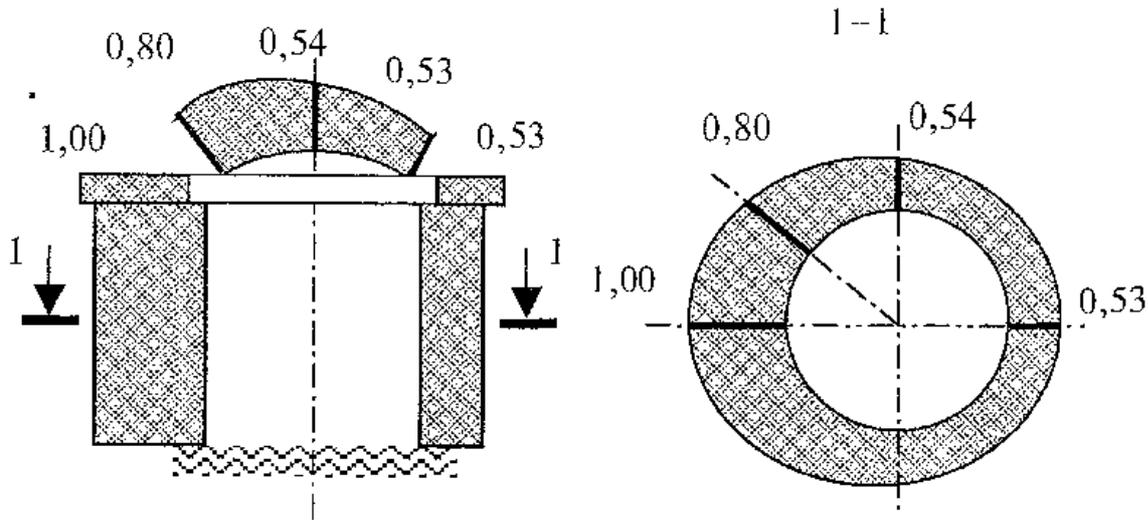


Рис. 1.13. Распределение нагрузки по поверхности жесткого шаблона оболочки при  $\Delta P_\phi = 54$  кПа. Движение ударной волны слева. Значения на эпюрах отнесены к давлению в отражении [8]

отрезками, причем начало нагружения в точке соприкосновения фронта волны с оболочкой определяется временем прихода фронта. Характерные параметры функции нагрузки  $P(t)$  зависят от координаты точки, размера объекта и давления  $\Delta P_\phi$ . Эти данные, а также коэффициент давления дополняются зависимостями от угла, под которым фронт волны встречается с преградой. Нагрузка в фазе квазистационарного обтекания представляет сумму давления  $P(t)$  и скоростного напора в волне с учетом коэффициента давления  $c_p$ .

Нагрузки, действующие на оболочку в фазе дифракции, развиваются в процессе набегания волны. Поэтому максимальные значения нагрузок запаздывают в зависимости от удаления точки измерения от точки встречи фронта волны с оболочкой. Длительность фазы дифракции  $\tau$  для оболочки имеет порядок:

$$\tau = \kappa_1 \frac{2R}{D_\phi}, \quad \kappa_1 = 3 - 5, \quad (1.9)$$

где  $R$  — радиус цилиндрической части оболочки,  $D_\phi$  — скорость продвижения фронта волны. Фаза квазистационарного обтекания имеет длительность порядка фазы сжатия. В процессе экспериментов измерения проводились на поверхности оболочки и в ее окрестности на расстоянии трех диаметров перед конструкцией и за ней. Картина взаимодействия длинной волны с оболочкой весьма сложна. К тому же при трансзвуковых скоростях скорость потока вблизи поверхности оболочки изменяется и может превысить скорость звука. В этом случае на поверхности возникают скачки уплотнения, приводящие к повышению сопротивляемости обтеканию, что усложняет задачу измерений давления при взаимодействии ВУВ с оболочкой.

Для исследуемых оболочек, как и для параллелепипедов, построены обобщающие эпюры нагрузок с учетом диапазонов давлений на фронте ударной волны. Значения давления на рис. 1.14 даны в соотношении к давлению на фронте ударной волны и к давлению в отраженной волне на плоской преграде.

Принятые на рис. 1.12 и 1.14 пропорции между величинами

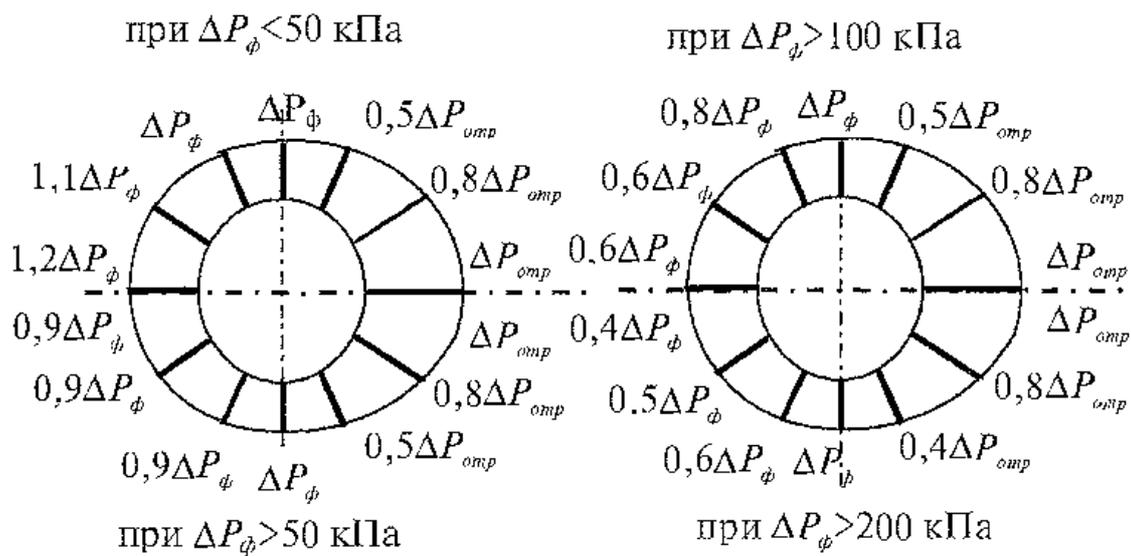


Рис. 1.14. Эпюры давлений на поверхности цилиндрической оболочки в зависимости от давления на фронте ВУВ

нами давления на поверхности конструкций и давлением в отраженной волне и на фронте ВУВ получены в виде диаграмм в стадии дифракции и при квазистационарном обтекании (рис. 1.15). На рис. 1.15 пунктирной линией обозначена зависимость в стадии дифракции, сплошной — в стадии квазистационарного обтекания.

Точки на диаграмме обозначены по результатам экспериментов. Значения, обозначенные незаштрихованными квадратами, опубликованы в книге под редакцией В.А. Котляревского [10] и являются справочными данными.

Возможность использования статических схем распределения динамических нагрузок по поверхности исследуемого сооружения значительно упрощает задачу расчета. Этот подход широко используется в инженерной практике расчета при трансформации формы импульса реальной нагрузки. При динамическом расчете сооружения действительные за-

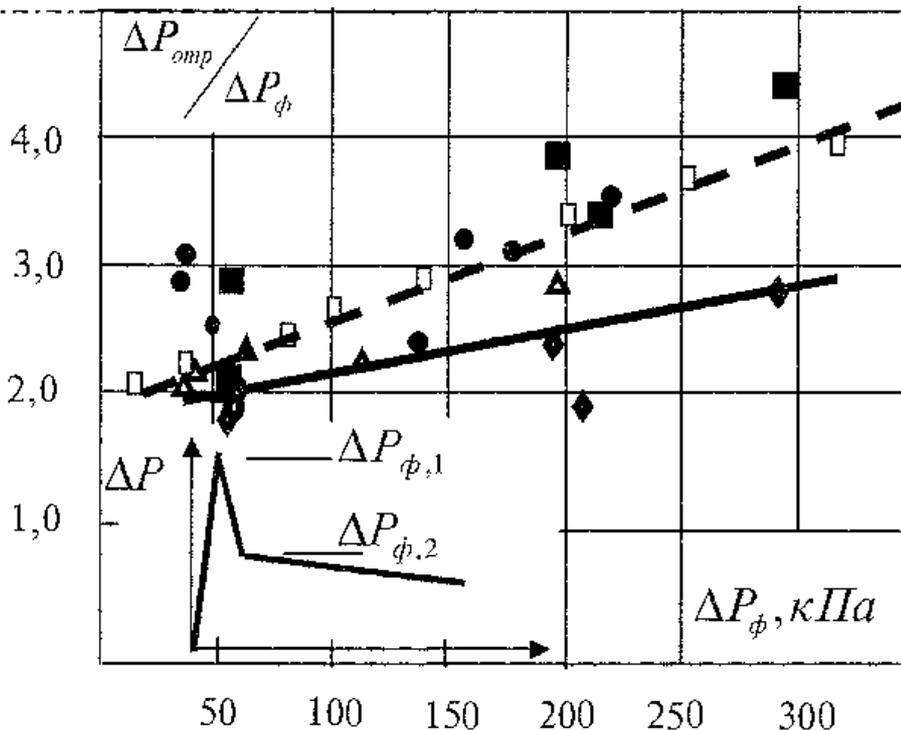


Рис. 1.15. Относительные величины давления в отраженной воздушной ударной волне на фронтальной преграде [8]

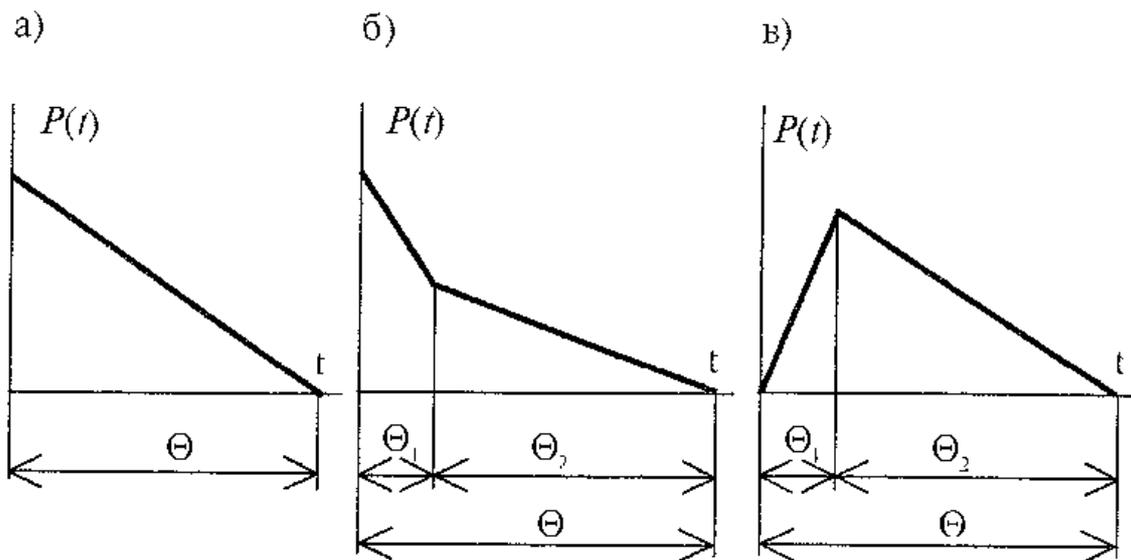


Рис. 1.16. Законы изменения динамической нагрузки во времени

коны изменения нагрузок во времени заменяют упрощенными, расчетными. Так, осциллограммы нагрузки в проходящей ударной волне могут быть представлены в виде прямоугольной диаграммы. Зависимости, описывающие мгновенно возрастающие, а затем убывающие нагрузки видов, представленных на рис. 1.16 а, б, применяют при расчете конструкций на действие воздушных ударных волн (проходящих и отраженных). Нагрузка на (а) – для конструкций покрытий и боковых стен сооружения, (б) – для конструкций фронтальной стены. Нагрузка, диаграмма которой показана на рис. 1.16 в, принимается для расчета конструкций, находящихся на тыльной стороне сооружения и в замкнутом помещении при затекании в него волн через проемы [6].

Принимая во внимание вышесказанное, заметим, что для рассматриваемых типов сооружений в расчетах на действие нагрузки от волны взрыва оправдано применение упрощенных диаграмм. При этом картина нагрузок становится более полной при соблюдении хронологии давлений на поверхности с учетом скорости продвижения фронта ВУВ.

## **1.2. Экспериментальные исследования железобетонных составных оболочек вращения на действие воздушной ударной волны**

Вопросы взаимодействия строительных конструкций и кратковременных динамических нагрузок от ударной волны взрыва имеют важное практическое значение. Наиболее достоверным способом получения информации о параметрах нагрузки и состоянии конструкции при взрыве является эксперимент, что приводит к необходимости проведения значительного объема модельных испытаний.

Рассмотрим результаты экспериментальных исследований железобетонных составных оболочек вращения при внешнем действии ударной волны взрыва.

### **1.2.1. Конструкция моделей и характеристики материалов**

Модель защитной оболочки АЭС представляет собой монолитную железобетонную составную оболочку вращения. Конструктивно защитная оболочка состоит из вертикально стоящей замкнутой цилиндрической оболочки вращения и купольного покрытия. Место сопряжения купола с цилиндром усилено сопрягающим кольцом жесткости. Основание цилиндра заделано в опорную плиту. На рис. 1.17 показана конструкция исследуемой модели, выполненной в масштабе 1:50. При изготовлении модели были сохранены геометрические пропорции реального объекта.

Строго говоря, исследуемые оболочки нельзя назвать моделями, т.к. основной смысл моделирования заключается в том, чтобы по результатам опытов с моделями можно было бы дать необходимые ответы о характере эффектов и о различных величинах, связанных с явлением, в натуральных условиях. Механическое или физическое подобие можно

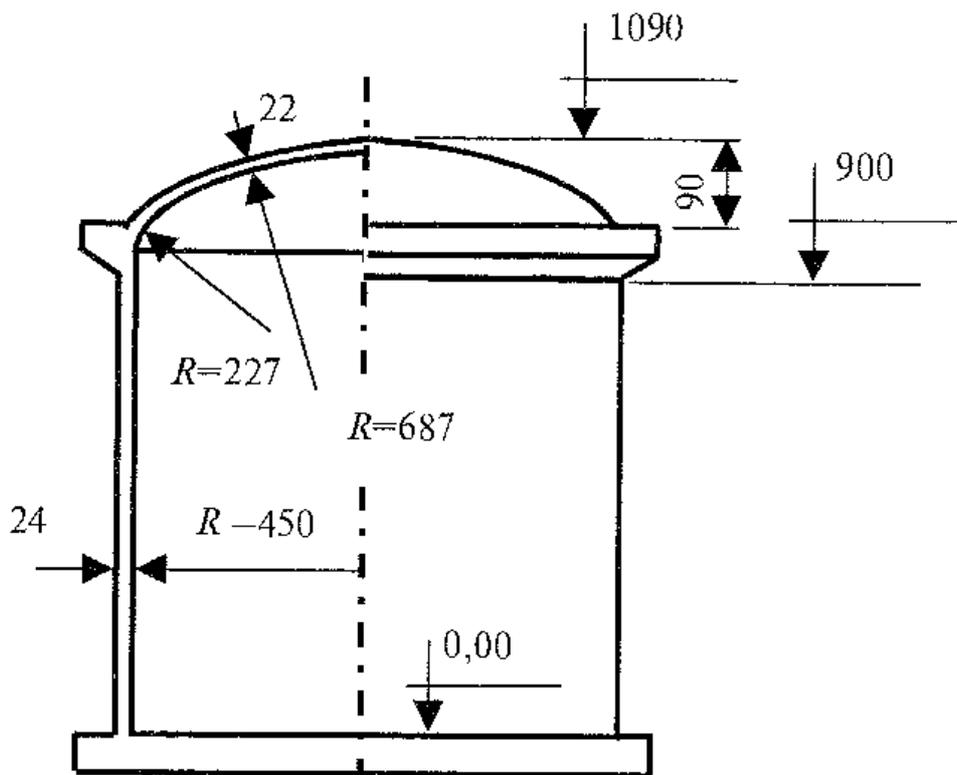


Рис. 1.17. Конструкция оболочки (размеры даны в мм)

рассматривать как обобщение геометрического подобия. На практике же условия, обеспечивающие подобие явления в целом, зачастую не выполняются, и тогда встает вопрос о величине погрешностей (масштабном эффекте), которые возникают при переносе на натуру результатов, полученных на моделях.

Если модель и натурное сооружение выполнены из одинакового материала, и разрушение определяется значениями максимальных напряжений, то очевидно, что и модель и в натурная конструкция в стадии разрушения будут испытывать подобные состояния.

Из теории моделирования известно, что если величины внешних нагрузок велики, а собственный вес конструкции мал настолько, что им можно пренебречь, то при моделировании с сохранением свойств материалов внешние нагрузки необходимо изменить пропорционально квадрату линейных размеров конструкции [17]. Это практически не-

возможно сделать в условиях рассматриваемого эксперимента.

Таким образом, результаты рассматриваемых экспериментов не рассчитаны на пересчет показателей на реальные сооружения. Эти результаты могут быть использованы для изучения картины деформаций и разрушения оболочек при взаимодействии с ВУВ, а также для формулировки расчетных предпосылок и проверки результатов теоретических исследований.

Итак, общая высота оболочки от опорной плиты равна 1090 мм. Внутренний диаметр цилиндрической части – 900 мм. Толщина стенки цилиндра – 24 мм, толщина стенки купола – 22 мм.

Всего выполнено три модели. При изготовлении применялся песчаный бетон с отношением компонентов по массе 1:2,5:0,42 (цемент : песок : вода). Используемый песок имел модуль крупности не более 2,5. Одновременно с моделями были изготовлены бетонные призмы, по 6 штук для каждой модели. Призмная прочность перед испытаниями составила  $R_b=32,5$  МПа, начальный модуль упругости  $E_b=3,425 \cdot 10^4$  МПа.

Армирование моделей проведено тремя слоями сеток. Внешняя и внутренняя сетки выполнены из отожженной проволоки диаметром 1 мм ( $\sigma_m=290$  МПа,  $E=2,09 \cdot 10^5$  МПа). Обе сетки (и для купола, и для цилиндра) сделаны с ячейей 10x10 мм.

Средний слой армирования выполнен из холоднокатаной проволоки диаметром 2,0 мм с  $\sigma_m=774$  МПа,  $E=2,0 \cdot 10^5$  МПа. В цилиндрическом теле шаг стержней средней сетки по окружности равен 15 мм, по высоте цилиндра 45 мм.

Средняя сетка при армировании купола сделана с шагом 39,2x39,2 мм.

Радиальное армирование опорного кольца купола проведено четырьмя стержнями высокопрочной проволоки

диаметром 6 мм. Помимо этого в радиальном и кольцевом направлениях процент армирования сравнительно с армированием цилиндра увеличен в два раза. Опорная плита оболочки выполнена «абсолютно» жесткой.

### 1.2.2. Методика проведения экспериментов

Эксперименты проводились в реактивной ударной трубе, генерирующей моделированную воздушную ударную волну, параметры которой можно изменять в широких пределах (рис. 1.18). Диапазон давлений на фронте ВУВ

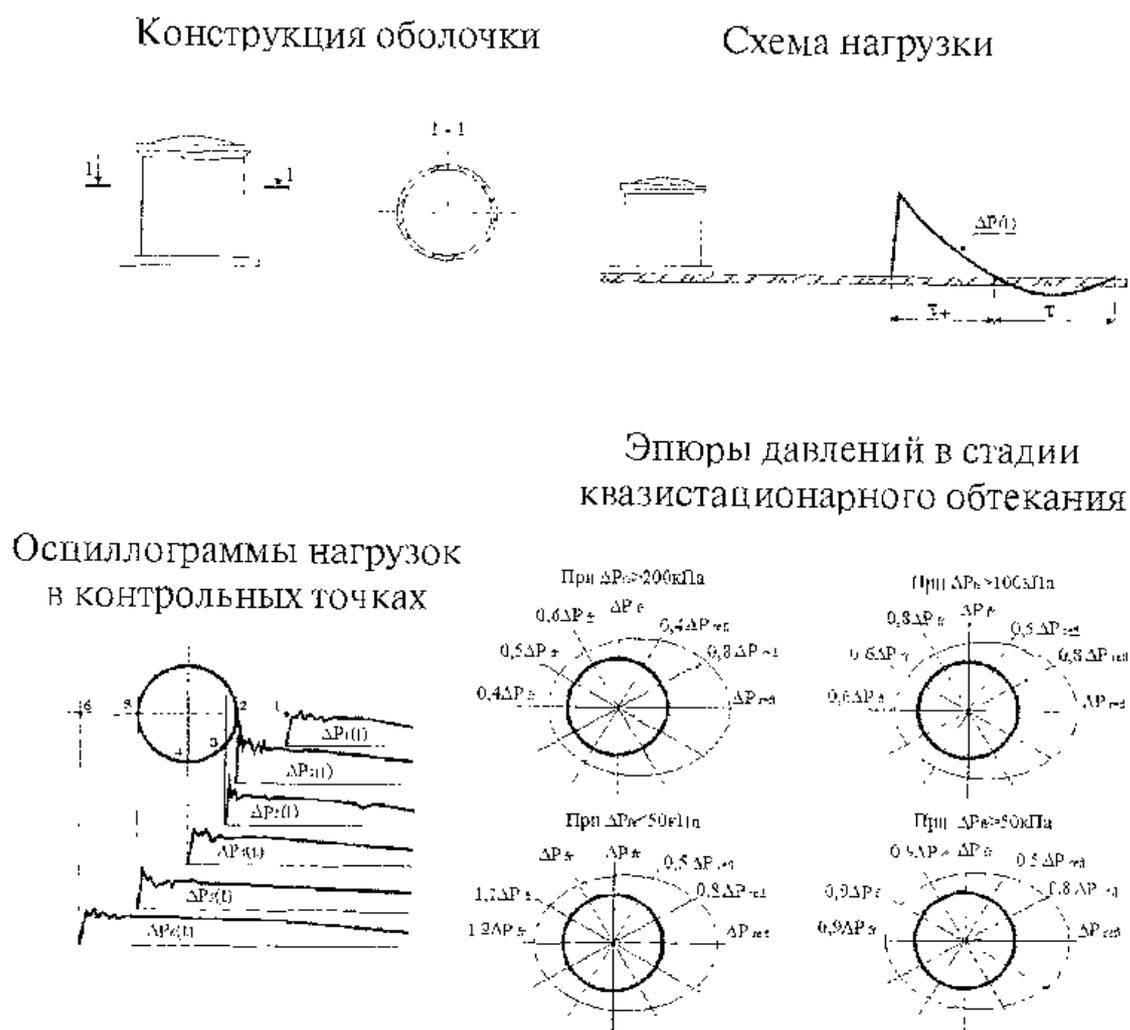


Рис. 1.18. Схема испытаний и параметры нагрузки

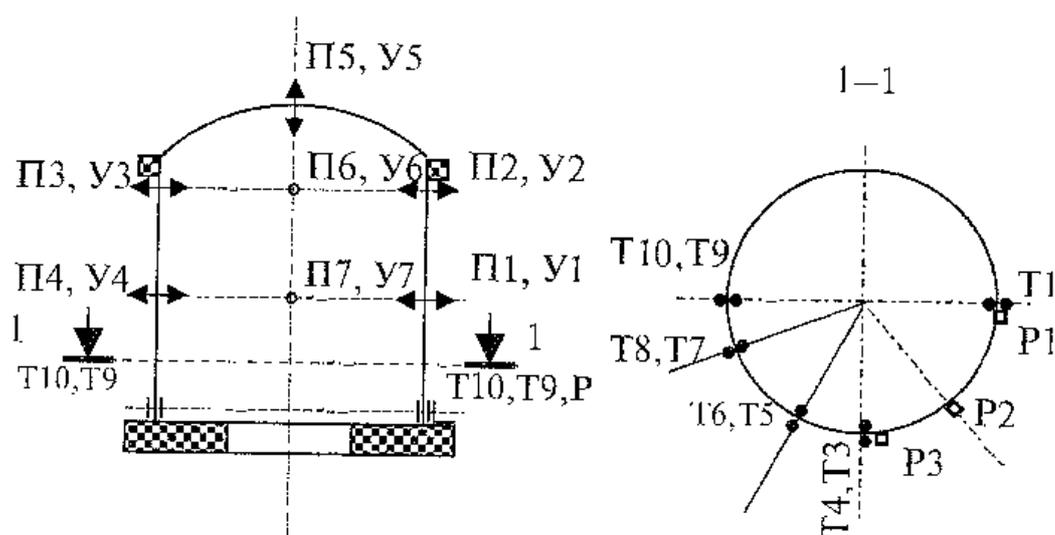
изменялся в пределах  $\Delta P_{\phi} = 20 - 340$  кПа, продолжительность фазы сжатия  $\tau_{+} = 20 - 300$  мс.

Преобразователи давлений устанавливались по ходу ВУВ на поверхности оболочки и в ее окрестности. Характер взаимодействия волны и сооружения во многом зависел и от состояния конструкций. Так, в случае сохранения целостности ограждающих конструкций происходило взаимодействие сооружения с внешней нагрузкой. Разрушение ограждающих конструкций приводило к нагнетанию во внутренний объем сооружения (или его части) волны затекания, которая влияла на характер деформирования.

Напряженно-деформированное состояние и кинематические параметры конструкций исследовались во всем диапазоне прочностных свойств материала.

Датчики приборов располагались в точках характерных сечений, выявленных путем предварительного расчета оболочки (рис. 1.19).

В процессе экспериментов проводились измерения параметров воздушной ударной волны (давление на фронте ударной волны  $\Delta P_{\phi}$ , давление разряжения  $\Delta P_{\text{раз}}$ , продолжительность фазы сжатия  $\tau_{+}$ , фазы разряжения  $-\tau_{-}$ ). Измерялись нагрузки на поверхности  $\Delta P(t)$  и во внутреннем объеме сооружения  $\Delta P(t)_{\text{вн}}$ , время избыточного давления и разряжения  $\tau_{+}$  и  $\tau_{-}$ . Для измерения величин относительных деформаций  $\varepsilon(t)$  использовались тензорезисторы. Перемещения  $w$  регистрировались посредством реостатных прогибомеров. Скорости  $\dot{w}$  и ускорения  $\ddot{w}$  измерялись посредством акселерометров. Движение трещины определялось по времени срабатывания датчиков разрыва ( $t_{\text{раз}}$ ), установленных по месту сопряжения цилиндрической части оболочки с основанием. Измерения и первичная обработка результатов проведены с использованием регистрирующей аппаратуры, совмещенной с измерительно-вычислительным комплексом. Обработка результатов измерений на



П — прогибомер; У — преобразователь ускорений;  
Т — тензорезистор; Р — датчик разрыва

Рис. 1.19. Схема расстановки преобразователей на оболочке

ИВК проведена по типовым программам математического обеспечения.

Общая погрешность измерений и автоматизированной обработки результатов на ИВК при доверительной вероятности  $P=0,95$  не превышала для измеряемых параметров: давления 15%, ускорений — 11,8%, относительных деформаций — 14%, скоростей — 12%.

Испытания проводились при последовательном увеличении нагрузки. Все конструкции доведены до разрушения. Известно, что каждому случаю динамического воздействия соответствует определенный характер движения и деформаций конструкции.

Исследования проведены для трех диапазонов нагрузки при  $\Delta P_{\phi} = 38-200$  кПа.

В первом диапазоне нагрузок исследовались упругие деформации конструкций. Во втором диапазоне нагрузки были увеличены, в результате чего появились значительные остаточные деформации. И, наконец, в третьем диапазоне нагрузок оболочки были разрушены.

Доля упругих деформаций для железобетонных конст-

рукций при кратковременном динамическом нагружении достигает 20% от предельной величины. Как правило, эксплуатация ответственных и дорогостоящих сооружений исключает возможность появления пластических деформаций. Можно считать, что отсутствие пластических деформаций обеспечивается, если после действия кратковременной динамической нагрузки в железобетонной конструкции отсутствуют трещины.

### 1.2.3. Упругие деформации оболочек

Упругие деформации оболочек исследовались в диапазоне давлений 38–60 кПа. Соответствующие этим давлениям скорости движения фронта ударной волны составили  $D_{\phi}=370\text{--}380$  м/с. При  $\Delta P_{\phi}=38$  кПа нагрузка не превышала 40% величины, вызвавшей необратимые деформации. Скорость продвижения фронта волны  $D_{\phi}=370$  м/с, продолжительность фазы сжатия  $\tau_{+}=250$  мс.

При встрече воздушной ударной волны (ВУВ) с лобовой поверхностью цилиндрической части оболочки возникла отраженная волна. Скорость нарастания давления в зоне отраженной волны составила  $\alpha=180$  МПа/с с максимальным давлением в отражении 90 кПа. Диаграммы давления на поверхности оболочки показаны на рис. 1.20.

В процессе дифракции волны в большей степени проявились деформации цилиндрической части оболочки, обращенной к взрыву. На момент скачка давления в отраженной волне практически отсутствовали смещения конструкции, в то время как возникли значительные перегрузки, отображающие инерционность конструкции.

Для цилиндрических поверхностей время падения давления отражения до давления торможения (обтекания) имеет меньшую продолжительность по сравнению с объектами прямоугольной формы. Обтекаемая поверхность цилиндра снижает величину этого времени до 20%.

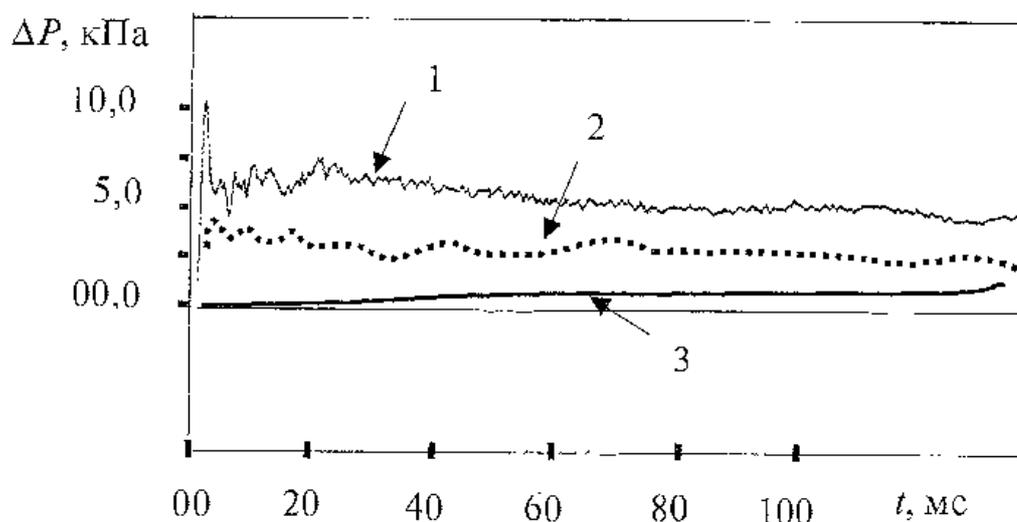


Рис. 1.20. Диаграммы давления на поверхности оболочки: 1 — давление на лобовой поверхности; 2 — давление в проходящей волне; 3 — давление во внутреннем объеме оболочки,  $\Delta P_{\phi} = 38$  кПа

Время движения фронта ВУВ по поверхности оболочки  $t_{\text{обт, экв}} = D_{\text{цил}} / D_{\phi} = 0,9 \text{ м} / 370 \text{ м/с} = 0,0025 \text{ с}$  ( $D_{\text{цил}}$  — диаметр цилиндрической части оболочки,  $D_{\phi}$  — скорость фронта ВУВ).

С наступлением квазистационарного обтекания началось движение оболочки по схеме изогнутой консоли. Наибольшие амплитуды наблюдались во втором цикле колебаний. Очевидно, после прохождения второй фазовой точки колебаний произошло наложение упругого отпора оболочки и внешней сдвигающей силы, в результате чего амплитуды перемещений второго цикла колебаний получились наибольшими. Колебания в процессе обтекания осуществлялись относительно смещенного уровня, вызванного действием скоростного напора, сдвигающая сила которого препятствовала раскачиванию конструкции при данных соотношениях частотных характеристик нагрузки и оболочки. На рис. 1.21 показаны диаграммы относительных перемещений, отражающие последовательность упругих движений и являющиеся результатом наложения локальных и общих форм деформаций оболочки.

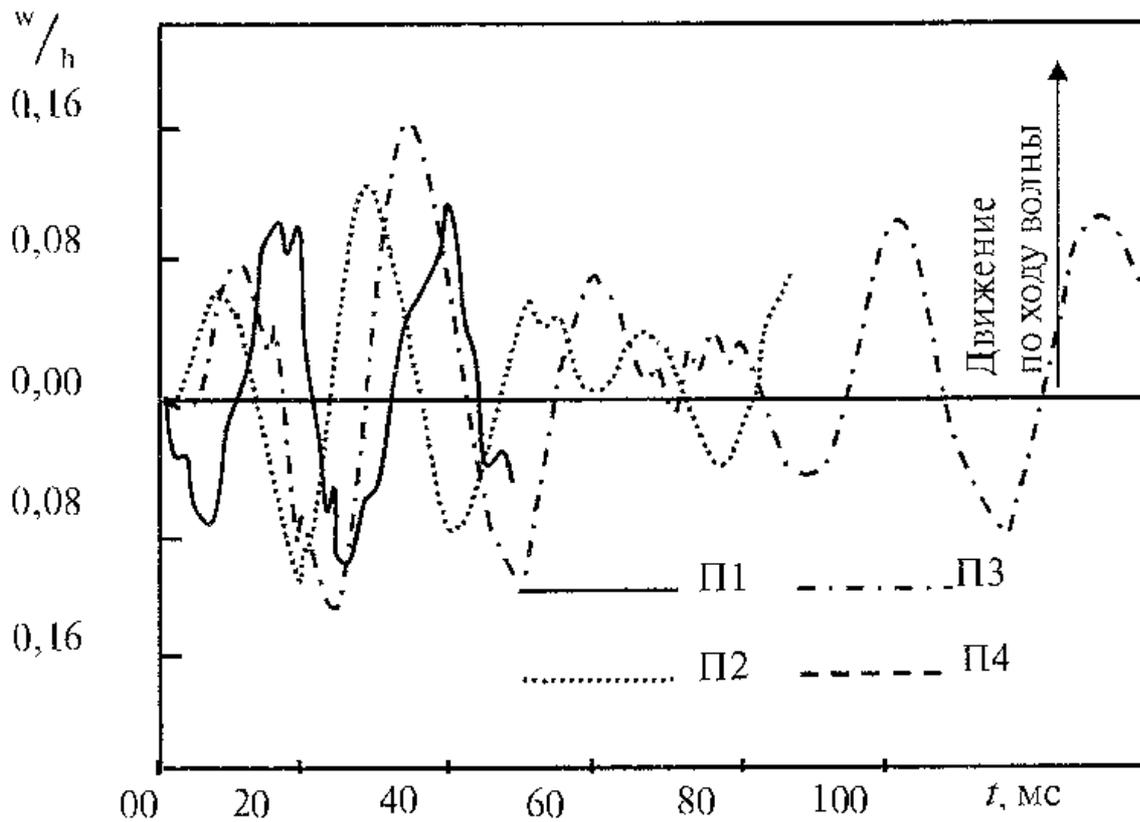
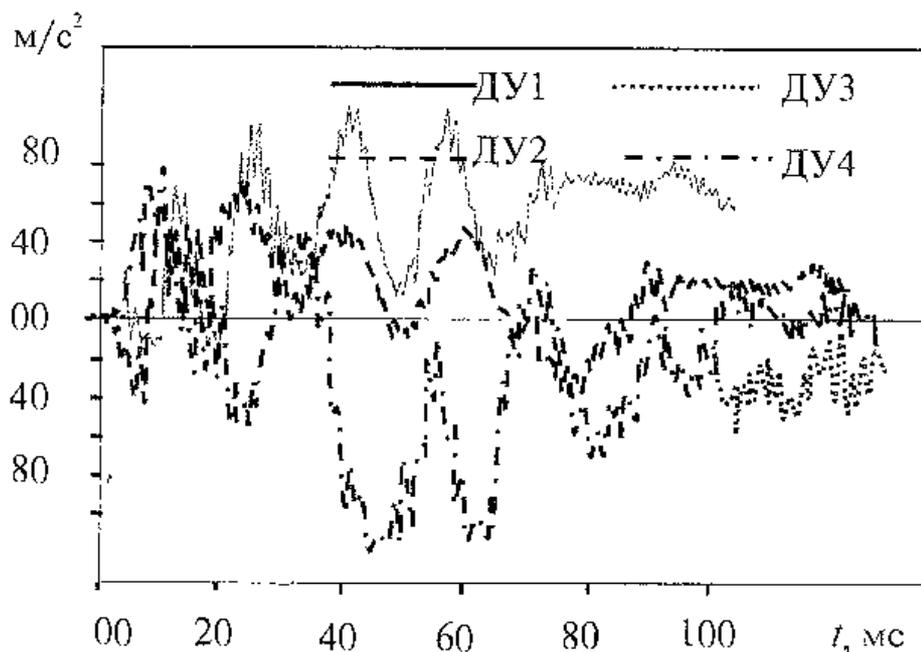


Рис. 1.21. Диаграммы перемещений во времени:  $w$  – перемещение, нормальное к срединной поверхности оболочки;  $h$  – толщина стенки оболочки,  $\Delta P_{\phi} = 38$  кПа

Дополнительные представления о движении оболочки дают акселерограммы, полученные в тех же точках, что и для перемещений (рис. 1.22). Наиболее податливая стенка цилиндра (точка 1), прогибаясь по ходу волны на протяжении периода, испытывала высокочастотные колебания, что соответствует в основном локальным деформациям стенки цилиндра, обращенной к волне. После чего движения ее стали более гармоничными, отражая в основном общие формы колебаний. Диаграмма ускорений верхней точки 2 в большей степени определялась движением оболочки как целого, и степень влияния локальных колебаний цилиндра здесь менее значительна. Ускорения точки 3 возникли с некоторым сдвигом во времени, определенным инерционностью конструкции. Траектория ее движения определя-

Рис. 1.22. Диаграммы ускорений,  $\Delta P_{\phi} = 38$  кПа

лась общими формами колебаний с незначительным наложением высоких частот.

Диаграммы меридианных деформаций кольцевого сечения оболочки по месту ее сопряжения с опорной плитой приведены на рис. 1.23.

Сравнение диаграмм показывает, что преобладающими являются более простые траектории движения, и степень влияния локальных деформаций при данном уровне нагрузки незначительна.

При  $\Delta P_{\phi} = 60$  кПа (рис. 1.24) произошли заметные изменения в поведении колеблющейся системы, особенно в первом цикле колебаний. Большой нагрузке соответствовал большой импульс отраженной волны и увеличенная сдвигающая сила скоростного папора. Сначала в основном проявились локальные деформации стенки цилиндра, обращенной к волне. Площадь локальных деформаций на лобовой поверхности составила около четверти поверхности цилиндра. Максимальные смещения появились в первом цикле колебаний. После чего в стадии квазистационарного обтекания колебания происходили относительно смещен-

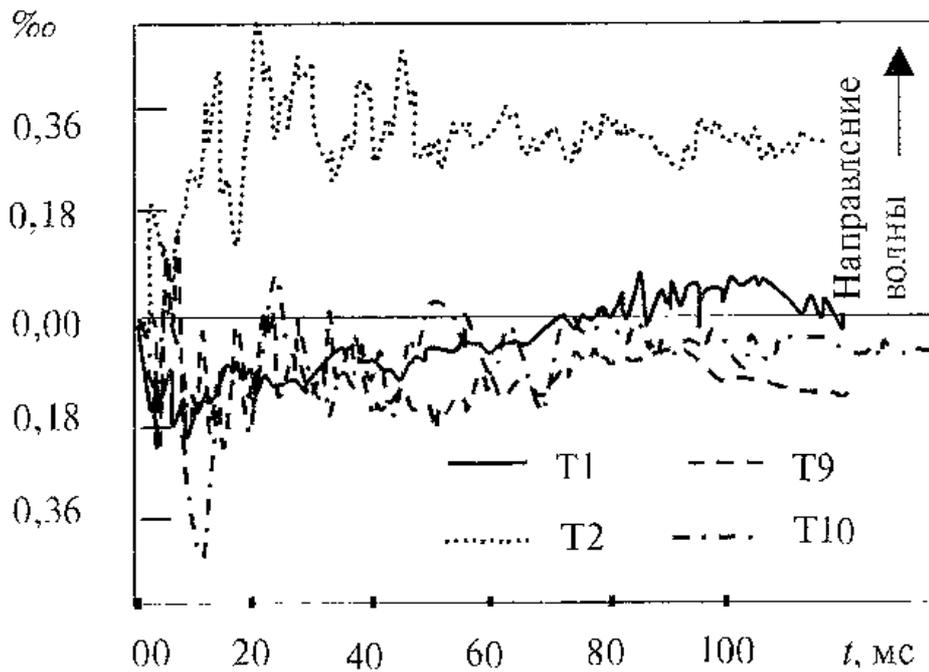


Рис. 1.23. Меридианные деформации нижнего кольцевого сечения цилиндрической оболочки,  $\Delta P_{\phi} = 38$  кПа

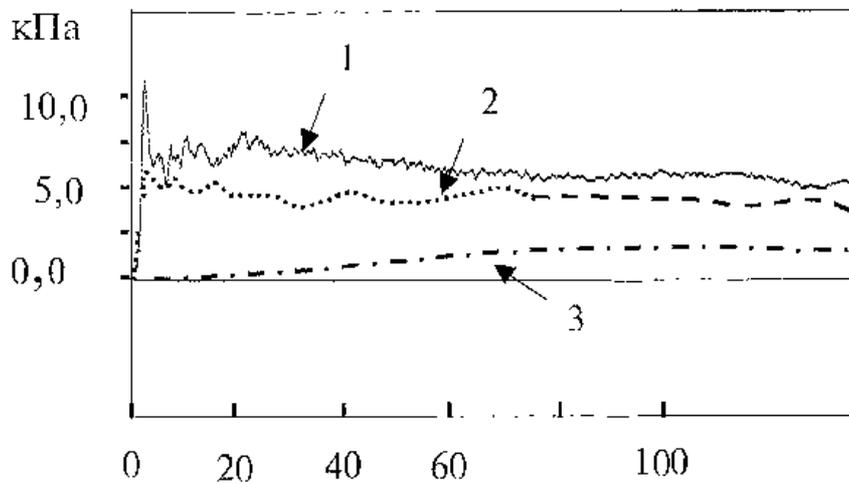


Рис. 1.24. Диаграммы давления на поверхности оболочки: 1 — давление на лобовой поверхности; 2 — давление в проходящей волне; 3 — давление во внутреннем объеме оболочки,  $\Delta P_{\phi} = 60$  кПа

ного уровня и имели сложные формы. При этом нижней частоте соответствовали колебания, охватывающие всю оболочку. Для иллюстрации данных закономерностей на

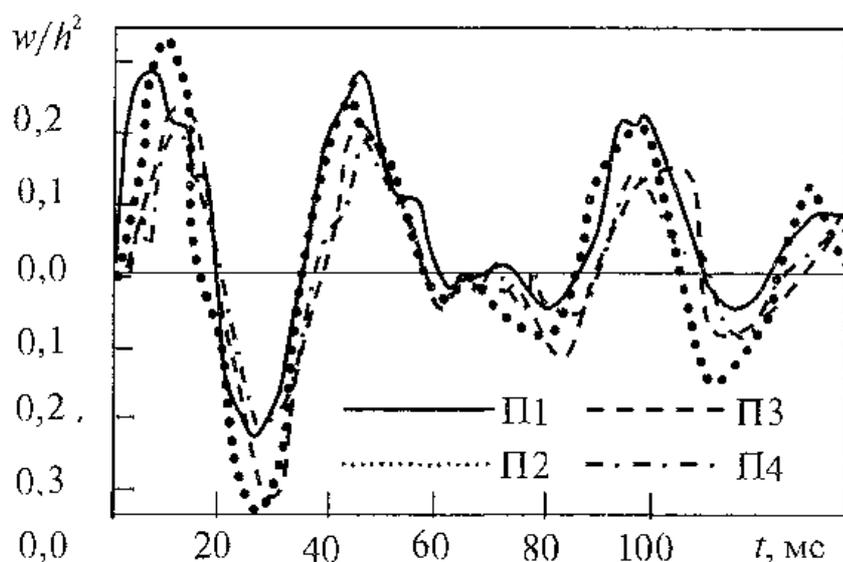


Рис. 1.25. Диаграммы перемещений во времени:  $w$  – перемещение, нормальное к срединной поверхности оболочки;  $h$  – толщина стенки оболочки,  $\Delta P_\phi = 60$  кПа

рис. 1.25 приведены относительные перемещения характерных точек конструкции, а также показана кривая меридиальных деформаций срединного слоя оболочки, измеренная в нижнем кольцевом сечении цилиндра (рис. 1.26).

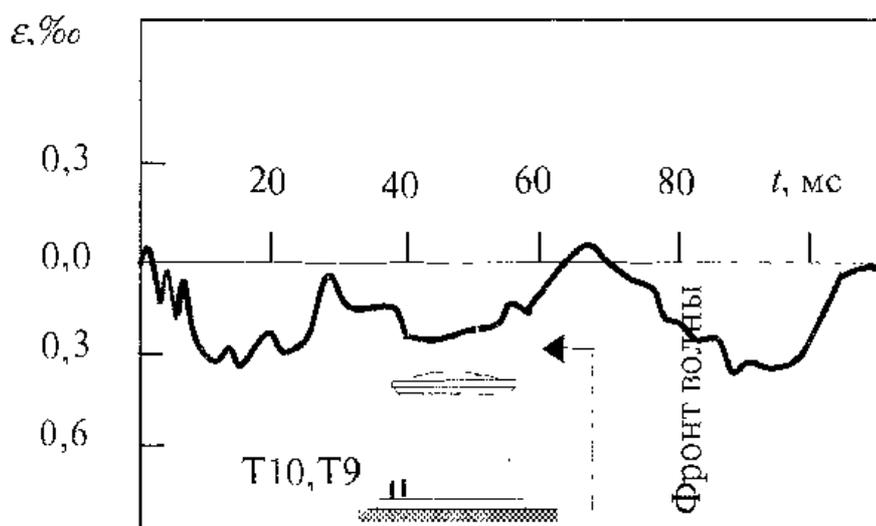


Рис. 1.26. Диаграмма относительных деформаций срединной поверхности в основании цилиндрической оболочки,  $\Delta P_\phi = 60$  кПа

Величины относительных деформаций получены вычислением полусуммы деформаций внутренней и внешней поверхностей оболочки.

#### 1.2.4. Упруго-пластические деформации и разрушение оболочек

Упруго-пластические деформации оболочек были зарегистрированы в диапазоне давлений  $\Delta P_\phi = 112 - 190$  кПа.

При  $\Delta P_\phi = 112$  кПа (скорость фронта волны составила 450 м/с, продолжительность фазы сжатия – 300 мс, давление в отраженной волне  $\Delta P_{отр} = 250$  кПа, рис. 1.27) появились трещины в бетоне и пластические деформации в арматуре. Как и в случае малых нагрузок, в начальный момент времени наибольшие скорости перемещений получили средние точки цилиндрической части, затем начались колебания оболочки по ходу волны. Это привело к растяжению передней стенки цилиндра, что замедлило скорости точек образовавшейся вмятины из плоскости.

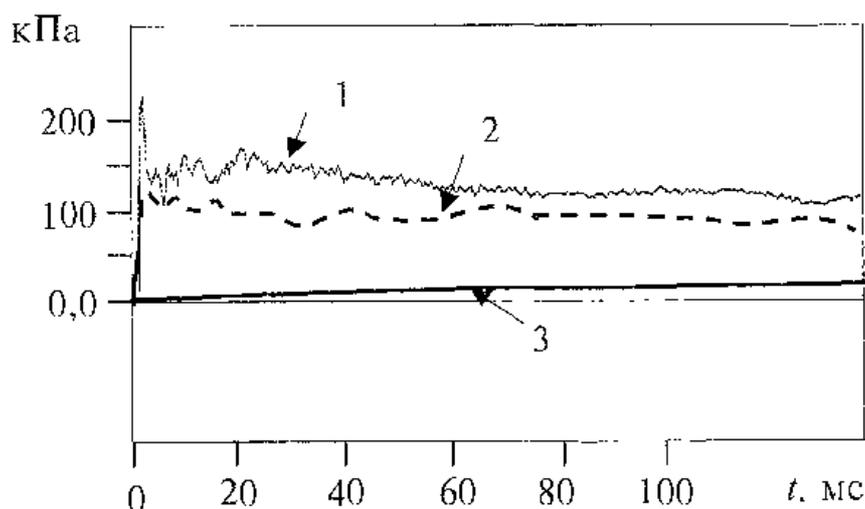


Рис. 1.27. Диаграммы давления на поверхности оболочки: 1 — давление на лобовой поверхности; 2 — давление в проходящей волне; 3 — давление во внутреннем объеме оболочки,  $\Delta P_\phi = 112$  кПа

Действие отраженной волны вызвало кратковременное смещение ненагруженной тыльной стенки цилиндра навстречу волне. Возникшие при этом деформации растяжения были незначительными по величине и развивались со скоростью  $0,3-0,4 \text{ с}^{-1}$ . Пластические деформации возникли при повторном отклонении оболочки по ходу волны, и образовались трещины в бетоне по месту сопряжения цилиндрической части с основанием, а также наклонные трещины на боковых поверхностях цилиндра. Снижение жесткости вызвало увеличение периодов колебаний по нижним частотам. Остаточные прогибы были малочувствительны к изменению нагрузки  $P(t)$  при ее убывании (рис. 1.28).

Разрушение оболочек проведено при нагрузках  $\Delta P_\phi = 190-280 \text{ кПа}$ . Первая оболочка была разрушена при последовательном увеличении давления на фронте ВУВ до  $\Delta P_\phi = 190 \text{ кПа}$ . В стадии дифракции максимальные смещения получила лобовая поверхность цилиндрической части оболочки. С развитием деформаций перемещения верхних

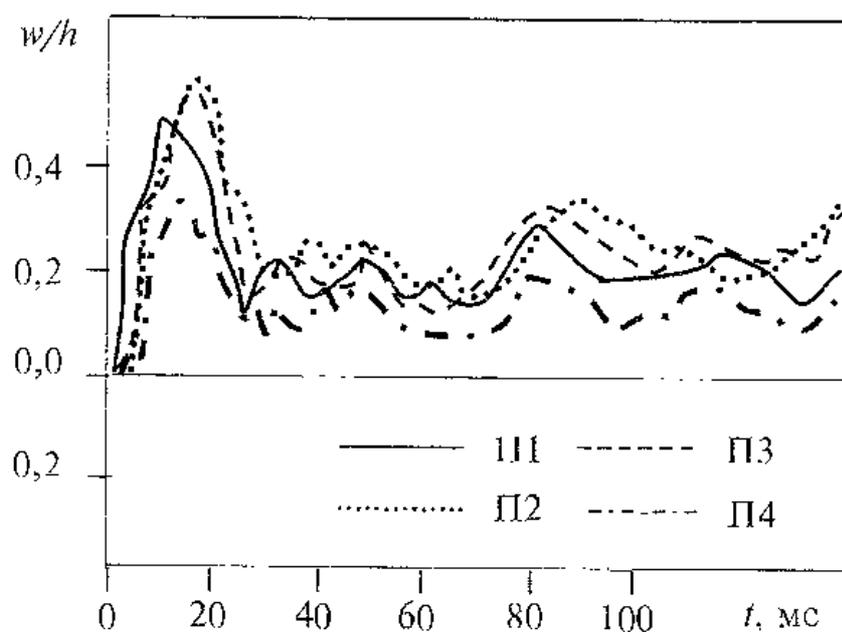


Рис. 1.28. Диаграммы перемещений во времени:  $w$  — перемещение, нормальное к срединной поверхности оболочки;  $h$  — толщина стенки оболочки,  $\Delta P_\phi = 112 \text{ кПа}$

точек оболочки в первом цикле колебаний стали наибольшими и составили 0,6 толщины стенки оболочки. Последующие три цикла колебаний происходили относительно смещенного уровня, отвечающего наклону оболочки по направлению движения волны. Очевидно, в этот период происходило активное раскрытие трещин. Жесткость оболочки в целом снизилась, вследствие чего амплитуды последующих колебаний уменьшились по сравнению с первым на 15–20%.

Поведение оболочек при нагрузках, значительно превышающих несущую способность, исследовалось в двух опытах. В первом давление на фронте ударной волны составило  $\Delta P_{\phi} = 220$  кПа, во втором  $\Delta P_{\phi} = 280$  кПа. Диаграммы нагрузок, показанные на рис. 1.29, соответствуют изменению давления в отраженной волне (1) и давления на фронте проходящей волны (2). Цифрой 3 обозначено изменение давления во внутреннем объеме оболочки.

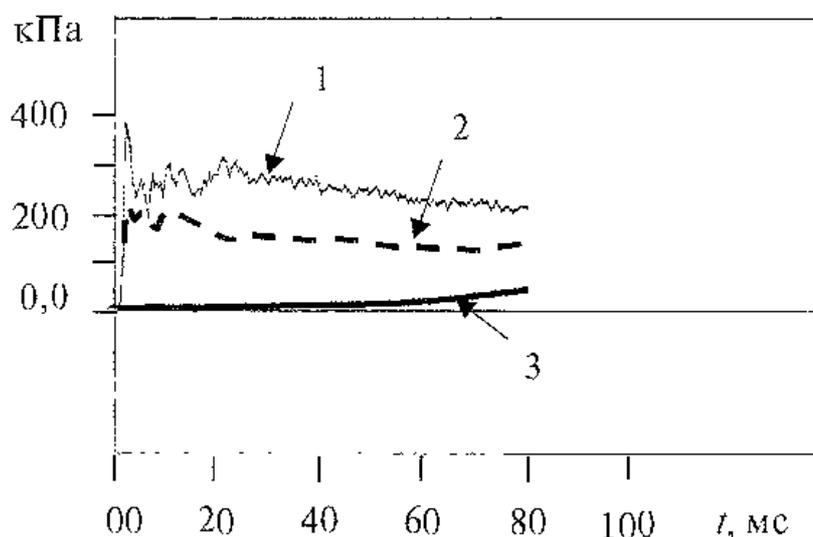


Рис. 1.29. Диаграммы давления на поверхности оболочки: 1 — давление на лобовой поверхности; 2 — давление в проходящей волне; 3 — давление во внутреннем объеме оболочки,  $\Delta P_{\phi} = 220$  кПа

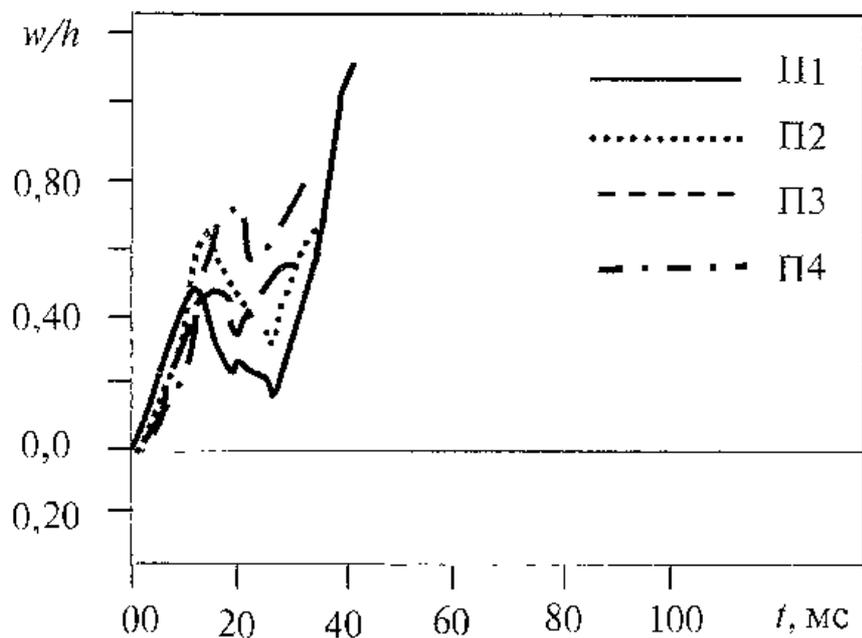


Рис. 1.30. Диаграммы перемещений во времени:  $w$  – перемещение, нормальное к срединной поверхности оболочки;  $h$  – толщина стенки оболочки,  $\Delta P_{\phi} = 220$  кПа

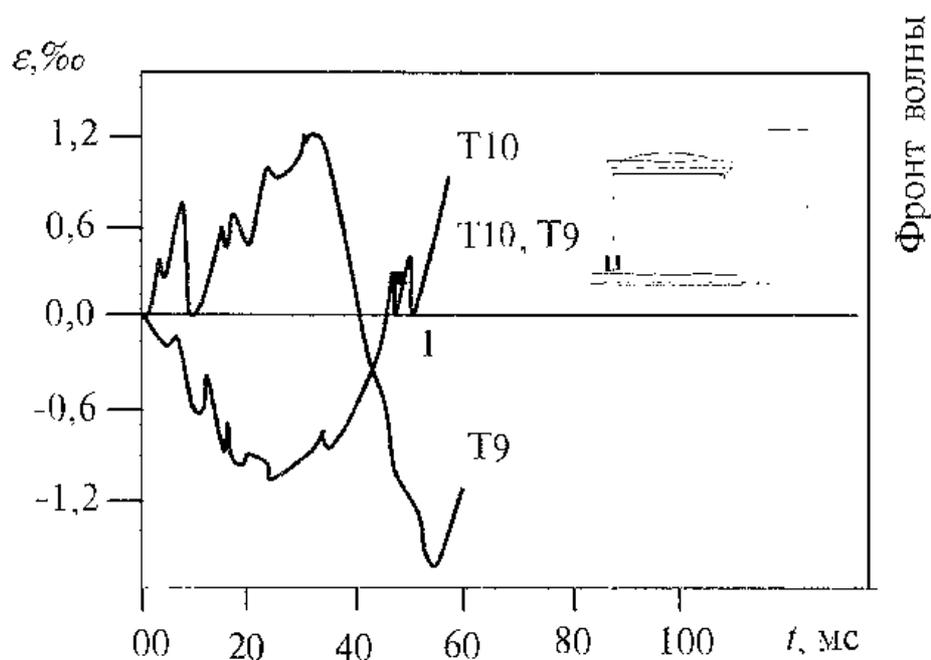


Рис. 1.31. Диаграммы относительных деформаций при  $\Delta P_{\phi} = 220$  кПа

При действии ударной волны с давлением на фронте 220 кПа оболочка совершила одно колебание (рис. 1.30), после чего разрушилась. Как видно по диаграммам относительных деформаций (рис. 1.31), в процессе разрушения имели место изгибные деформации.

Во втором опыте при  $\Delta P_\phi = 280$  кПа оболочка совершила полный цикл колебаний (рис. 1.32). В стадии дифракции деформации изменялись в пределах 0,80–1,2‰ (рис. 1.33). Разрушение произошло в процессе неустановившегося обтекания в результате появления трещин по месту сопряжения цилиндра с основанием и на поверхности, обращенной к набегающей волне.

С развитием трещин сжатая часть кольцевого сечения деформировалась со значительной скоростью. Так, скорость деформаций внешнего сжатого волокна стенки оболочки достигла  $1,56 \text{ с}^{-1}$ , скорость деформаций внутренней поверхности –  $0,74 \text{ с}^{-1}$ . Предельные значения деформаций

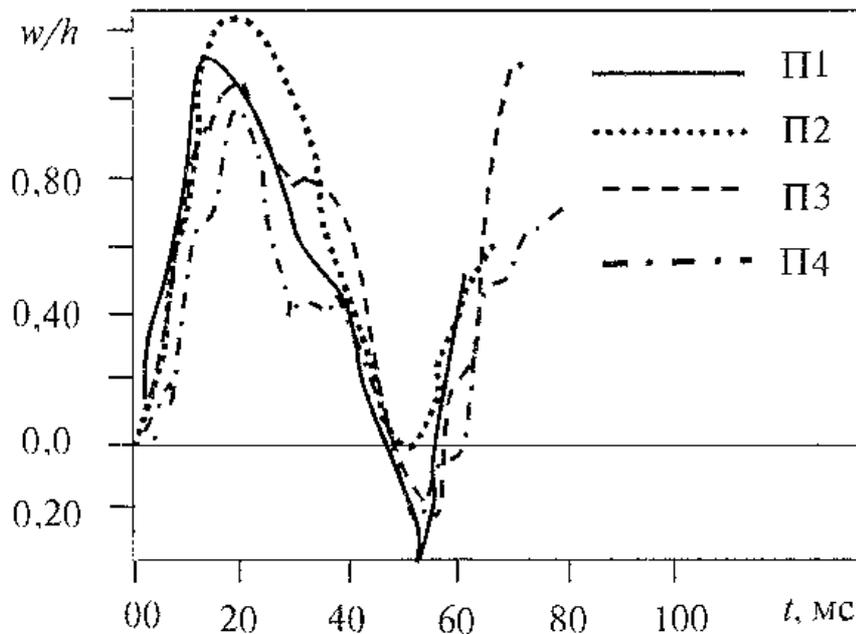


Рис. 1.32. Диаграммы перемещений во времени:  $w$  – перемещение, нормальное к срединной поверхности оболочки;  $h$  – толщина стенки оболочки,  $\Delta P_\phi = 280$  кПа

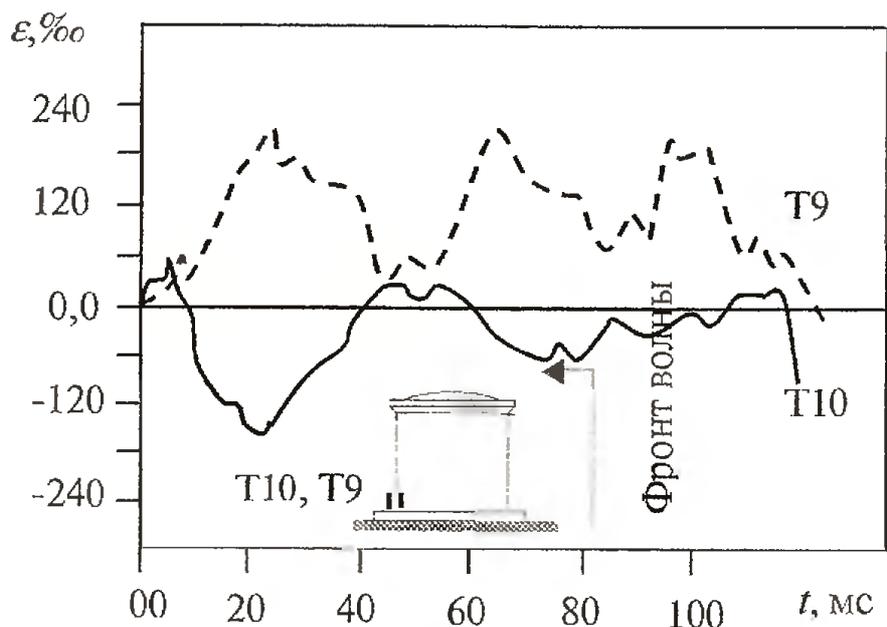


Рис. 1.33. Диаграммы относительных деформаций при  $\Delta P_{\phi} = 280 \text{ кПа}$

сжатия бетона достигли  $4,3\text{‰}$ . После чего произошло раздробление сжатого бетона и разрыв арматуры. Оболочка была сорвана с основания воздушным потоком.

### 1.2.5. Формы разрушения оболочек от действия воздушной ударной волны

Разрушенные оболочки показаны на рис. 1.34 и 1.35. Разрушения включают образование наклонных трещин на боковых поверхностях оболочек, а также появление кольцевой трещины по месту сопряжения цилиндрической части оболочки с основанием. При полном разрушении первой и второй оболочек произошло их опрокидывание и сдвиг сжатой зоны бетона цилиндрической оболочки по месту сопряжения с основанием (рис. 1.35 б).

Анализ результатов экспериментов показал, что с увеличением давления и скорости нагрузки поведение конструкции качественно изменялось. При этом изменя-



Рис. 1.34. Оболочки, разрушенные ударной волной взрыва [15]

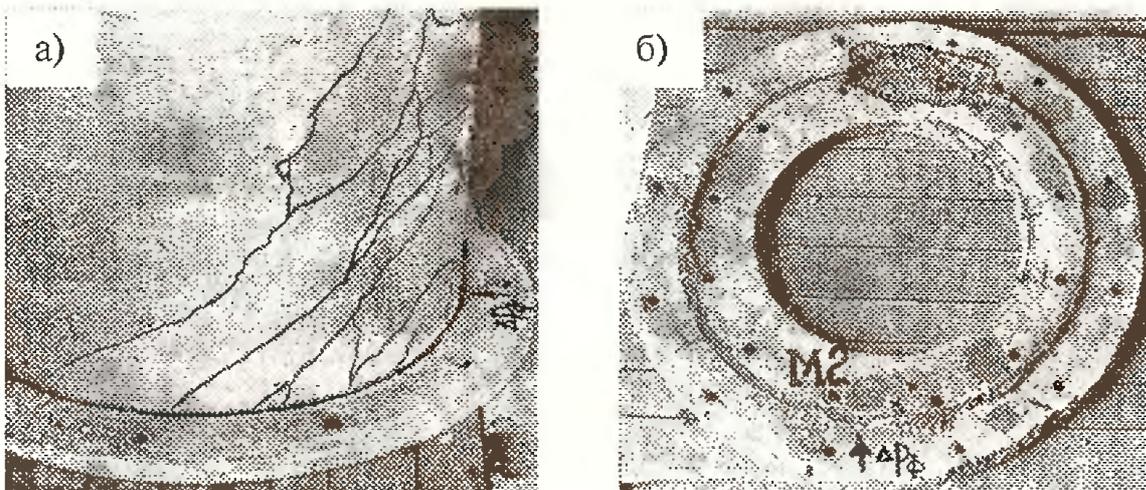


Рис. 1.35. Фрагмент разрушенной оболочки: а) боковая поверхность цилиндра оболочки №1; б) опорная плита оболочки №2

лись и количественные показатели. Так, наибольшие перемещения, ускорения и деформации возникали в зависимости от соотношений частотных параметров конструкций и нагрузки. При малых нагрузках максимальные смещения

были зарегистрированы во втором цикле. В стадии упруго-пластического деформирования наибольшие деформации наблюдались в первом цикле, а разрушение произошло во второй фазе первого цикла колебаний. Выделяя локальные и общие формы движения, с достаточной точностью можно обосновать расчетные схемы конструкций при инженерной оценке их несущей способности.

Очевидно, в процессе взаимодействия с ударной волной и в стадии упруго пластического деформирования, и при разрушении диаграмма сопротивления может быть представлена зависимостью, в которой ветви возрастающих напряжений сменяются различными по уровню разгрузками и наоборот.

Статический анализ диаграммы сопротивления железобетона с разгрузкой [7] может быть положен в основу динамического расчета с использованием модели мейзиш-типа [9], что, по нашему мнению, наиболее достоверно отражает динамику напряженно-деформированного состояния исследуемой оболочки в процессе движения, будь то упругие колебания или движение в процессе разрушения.

По результатам экспериментов для обоснования расчетных схем метода КЭ можно выделить три схемы трещи-

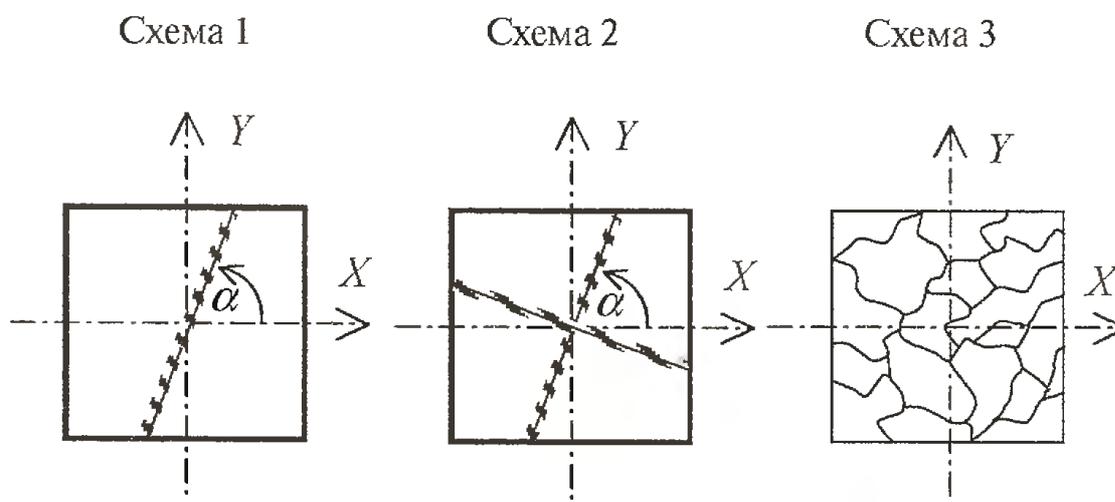


Рис. 1.36. Схемы образования трещин в стене оболочки

нообразования плоского элемента, показанные на рис. 1.36.

Первая схема учитывает появление сквозной наклонной трещины. Вторая схема соответствует появлению двух перекрещивающихся трещин. Согласно третьей схеме, происходит раздробление бетона от всестороннего сжатия.

### **1.3. Экспериментальные исследования моделей реакторного отделения АЭС на действие воздушной ударной волны**

Проблема расчета и проектирования пространственных сооружений на аварийные нагрузки в течение ряда лет является весьма актуальной. Аварии в результате взрыва могут вызвать значительные разрушения и привести к большим материальным потерям. Тестирование аварийных ситуаций для дорогостоящих объектов дает возможность предусмотреть последствия аварий и разработать мероприятия по их устранению.

Требования безопасности работы АЭС приводят к необходимости учета ряда специальных динамических нагрузок и воздействий, включая землетрясение, удар падающего летательного аппарата, ударную волну взрыва и др. К настоящему времени достаточно подробно рассмотрены вопросы прочности железобетонных конструкций на действие статических нагрузок. В меньшей степени разрешены задачи на действие распределенных динамических нагрузок ударной волны взрыва и ударных нагрузок от летящего предмета.

Исследования сооружений на действие аварийных динамических нагрузок связаны с разрешением ряда вопросов, касающихся определения параметров нагрузки и собственно динамических свойств объекта. Решения, оценивающие динамические свойства сооружения, наряду с за-

дачей прочности имеют самостоятельное значение. Например, когда нагрузки или некоторая их последовательность не вызывают разрушений, а являются причиной чрезмерных смещений или ускорений, способных вызвать технологические аварии и вследствие этого вывести сооружение из строя.

### **1.3.1. Методика проведения эксперимента**

Реакторное отделение представляет собой уникальное сооружение, в состав которого включена защитная оболочка, конструкция обстройки и монолитно совмещенная с ними фундаментная часть.

Значительные размеры и сложность конструкции реакторного отделения приводят к необходимости упрощений и замены реального сооружения масштабной моделью. В процессе исследований проведены эксперименты и расчеты модели реакторного отделения АЭС, выполненной в масштабе 1:35.

Результаты рассматриваемых экспериментов не предусматривают пересчет показателей на реальное сооружение. Эти результаты могут быть использованы для изучения картины деформаций и разрушения моделей, подверженных воздействию ВУВ, а также для формирования расчетных предпосылок и проверки результатов теоретических исследований.

#### **1.3.1.1. Характеристики модели и материалов**

Задачи моделирования динамической системы «нагрузка—сооружение» предполагают решение ряда специальных вопросов, касающихся проектирования и строительства моделей исследуемого сооружения, создания динамической нагрузки с заданными параметрами, а также обеспечения измерений исследуемых параметров при заданной точности.

Выбор и обоснование конструкции модели, имитирующей работу строительного комплекса при действии ВУВ, проведены из соображений максимального упрощения структуры объекта. При этом учитывалось, что наиболее характерными конструктивными объектами реакторного отделения являются фундаментная часть, защитная оболочка и обстройка. На рис. 1.37 показаны общий вид и характерные сечения железобетонной монолитной модели, выполненной в масштабе 1:35 по отношению к натуре. Как видно из рисунка, в конструкции модели сохранены лишь основные формы фундаментной части, защитной оболочки и обстройки. Все перегородки и конструктивные узлы выполнены с таким расчетом, чтобы, с одной стороны, упростить конструктивные формы, с другой стороны, построить конструктивную систему, отражающую основные качества прототипа.

Конструкция модели энергоблока представляет собой пространственное монолитное сооружение, выполненное из армированного мелкозернистого бетона. На виде сверху: внешний прямоугольный контур — опорная плита, средний прямоугольный контур — внешние ограждающие стены обстройки; внутренний прямоугольный контур — внутренние ограждающие стены обстройки, две концентрические окружности — вид купола составной оболочки.

Первый этаж модели — фундаментный блок — выполнен в виде двух вертикально стоящих коробов, монолитно совмещенных внизу с опорной плитой модели и в верхней части с промежуточной плитой, объединяющей основание оболочки и основание обстройки.

Вертикальное сечение модели А—А и В—В. На первом этаже виден внутренний короб фундаментной части. Справа и слева в конструкции обстройки видны угловые короба. Они видны и на плане сечений 1—1 и 2—2. Собственно стена обстройки выполнена монолитной двухэтажной. Между этажами перекрытие толщиной 30 мм. По длине стена так-

же разделена на две части. На разрезе виден крест. Крыша обстройки, крест и коробка по углам выполнены толщиной 30 мм и одинаково армированы. Как видно, средний и верхний этажи обстройки имеют одинаковые конструкции. Сечение симметрично относительно центральных осей, поэтому размеры указаны с одной стороны. Для изготовления всех конструктивных форм применялись сборно-раз-

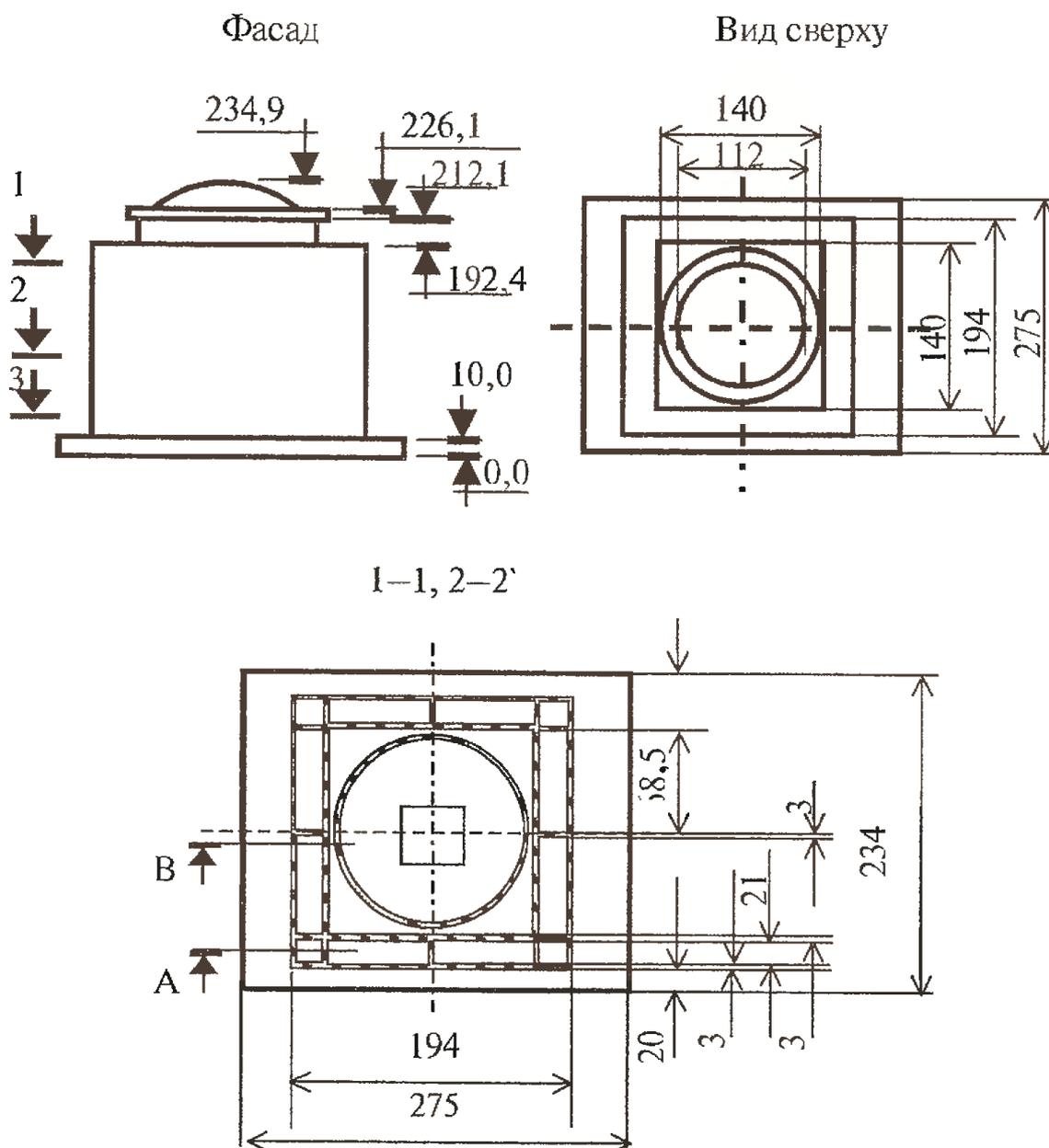


Рис. 1.37 а. Конструкция модели энергоблока

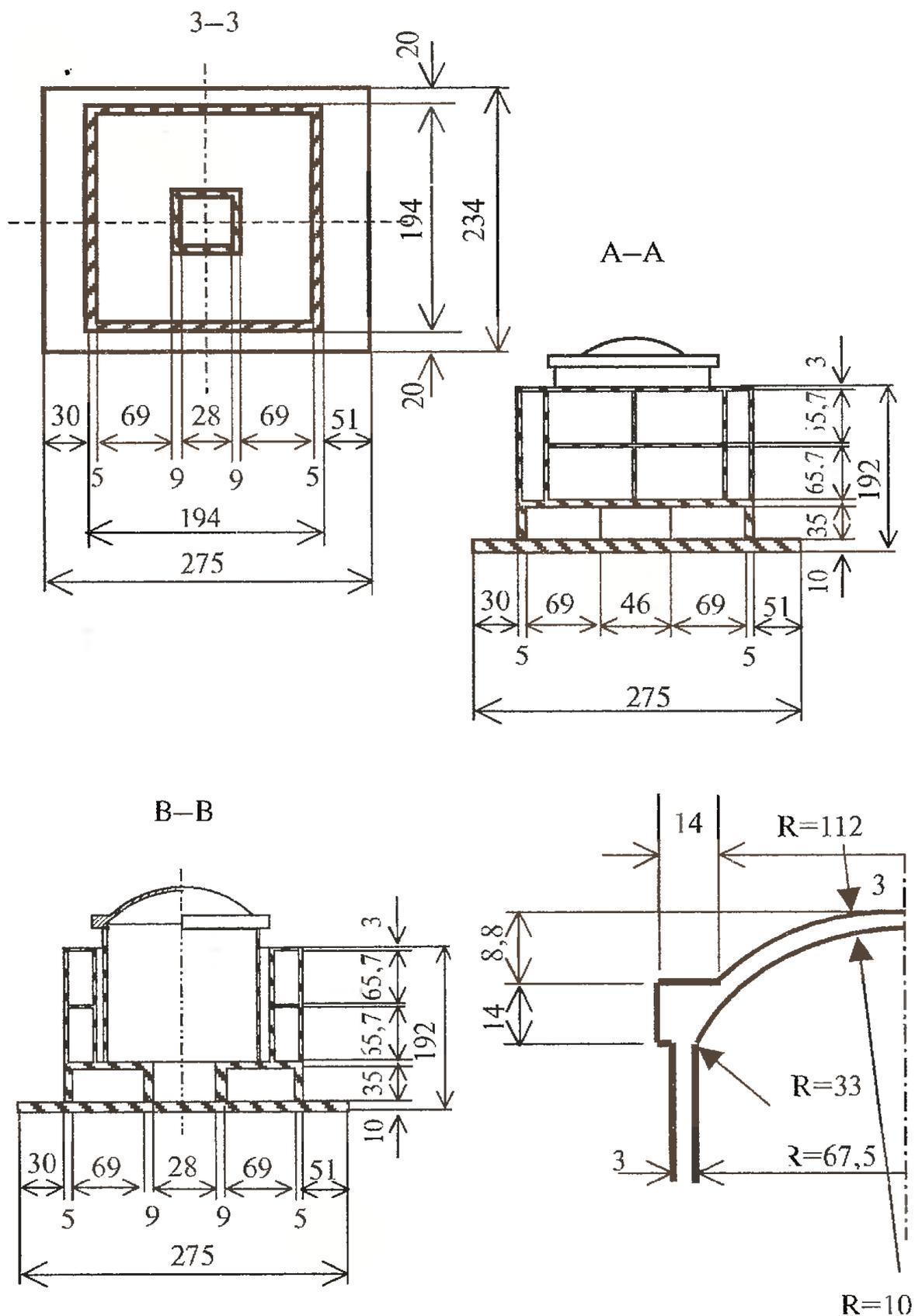


Рис. 1.37 б. Конструкция модели энергоблока

борные металлические опалубки. Модели изготавливались из песчаного бетона с модулем крупности до 2,5 мм при водоцементном отношении  $V/C=0,45$ . Активность портландцемента  $R_u=40,1$  МПа. Отношение песка к цементу по массе составило 2,5:1. Средняя кубиковая прочность для первой и третьей моделей составила  $R_b=25$  МПа; для второй и четвертой –  $R_b=34$  МПа.

Армирование цилиндра выполнено двойной сеткой из отожженной проволоки В-1 диаметром 2,5 мм. Шаг сетки по высоте цилиндра – 23 мм, по радиусу – 36 мм. Процент армирования по кольцу для цилиндра равен 1,4% ( $\sigma_m=215,0$  МПа), процент армирования вертикальными стержнями – 0,9% ( $\sigma_m=215,0$  МПа).

Армирование купола выполнено двойной сеткой из отожженной проволоки В-1 диаметром 2,5 мм ( $\sigma_m=215,0$  МПа). Процент армирования в кольцевом направлении 1,6%, в радиальном направлении – 0,9%.

Армирование промежуточной плиты, объединяющей фундамент, оболочку и обстройку, выполнено двойной сеткой 70x70 мм из проволоки диаметром 4 мм ( $\sigma_m=365,0$  МПа), процент армирования в продольном и поперечном направлениях – 0,66%.

Армирование ограждающих конструкций обстройки и «креста» проведено сетками из проволоки диаметром 2,5 мм ( $\sigma_m=215,0$  МПа), при этом как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях процент армирования равен 0,4%.

Опорная плита модели армирована двойной арматурной сеткой 90x90 мм, выполненной из стержней арматуры класса А-III диаметром 10 мм ( $\sigma_m=420,0$  МПа).

### 1.3.1.2. Средства измерения и схема расстановки приборов

Напряжено-деформированное состояние и кинематические параметры конструкций исследовались во всем диапазоне прочностных свойств материала.

Датчики приборов располагались в точках характерных сечений, выявленных путем предварительного расчета (рис. 1.38 а).

В процессе экспериментов проводились измерения параметров воздушной ударной волны (давление на фронте ударной волны  $\Delta P_{\phi}$ , давление разряжения  $\Delta P_{\text{разр.}}$ , продолжительность фазы сжатия  $\tau_+$  и фазы разряжения  $\tau_-$ ). Измерялись нагрузки на поверхности  $\Delta P(t)$  и во внутреннем объе-

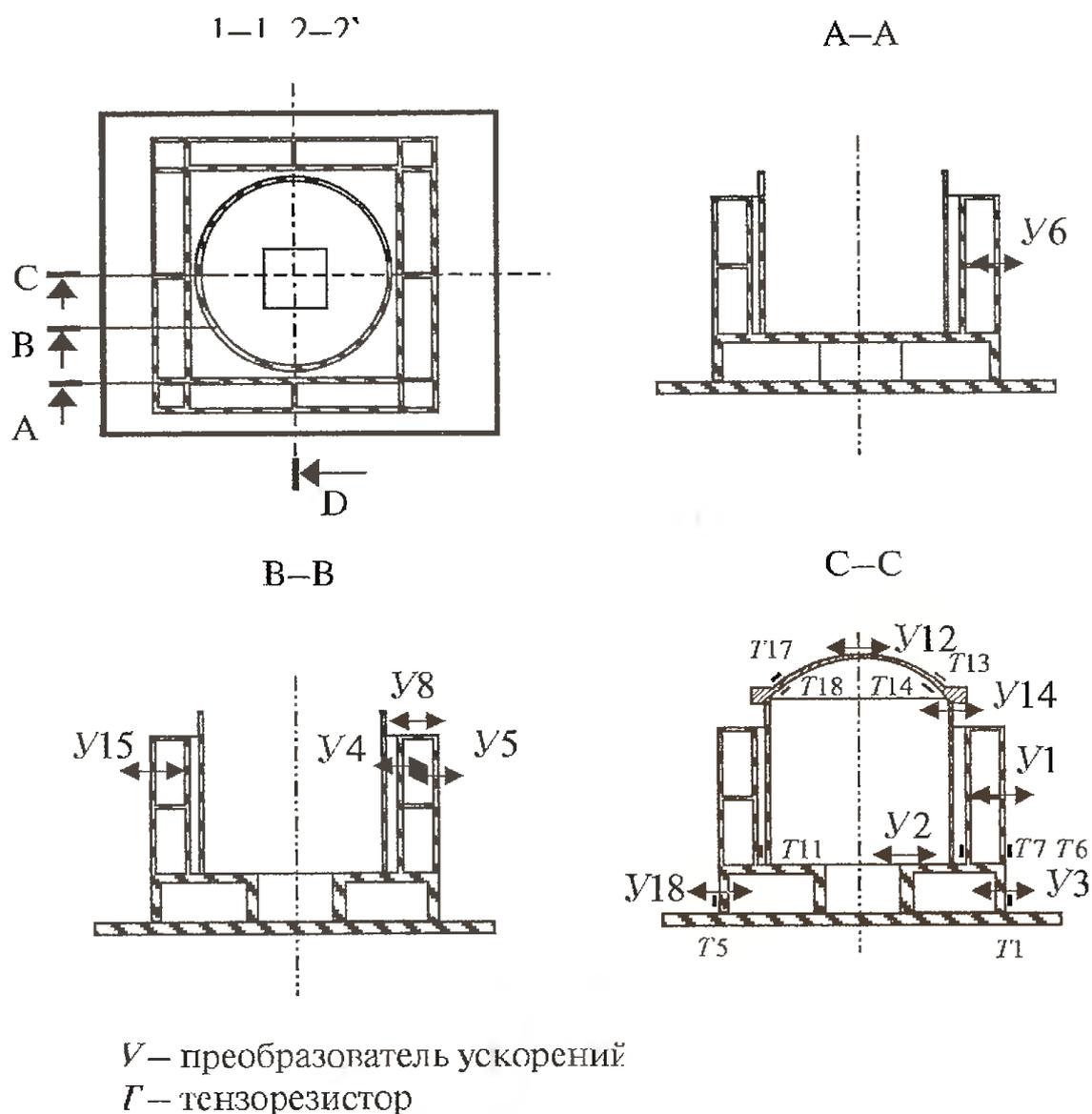


Рис. 1.38 а. Схема расстановки преобразователей

ме сооружения  $\Delta P(t)_{\text{зам}}$ , время избыточного давления и разряжения  $\tau_+$  и  $\tau_-$ . Схема расстановки преобразователей давления показана на рис. 1.38 б. Для измерения величин относительных деформаций  $\varepsilon(t)$  использовались тензорезисторы.

Скорости  $\dot{w}$  и ускорения  $\ddot{w}$  измерялись посредством акселерометров. Перемещения  $w$  определялись путем интегрирования графиков ускорений. Движение трещины по месту сопряжения цилиндрической части оболочки с основанием определялось по времени срабатывания датчиков разрыва ( $t_{\text{разр.}}$ ).

Измерения и первичная обработка результатов проведены с использованием регистрирующей аппаратуры, со-

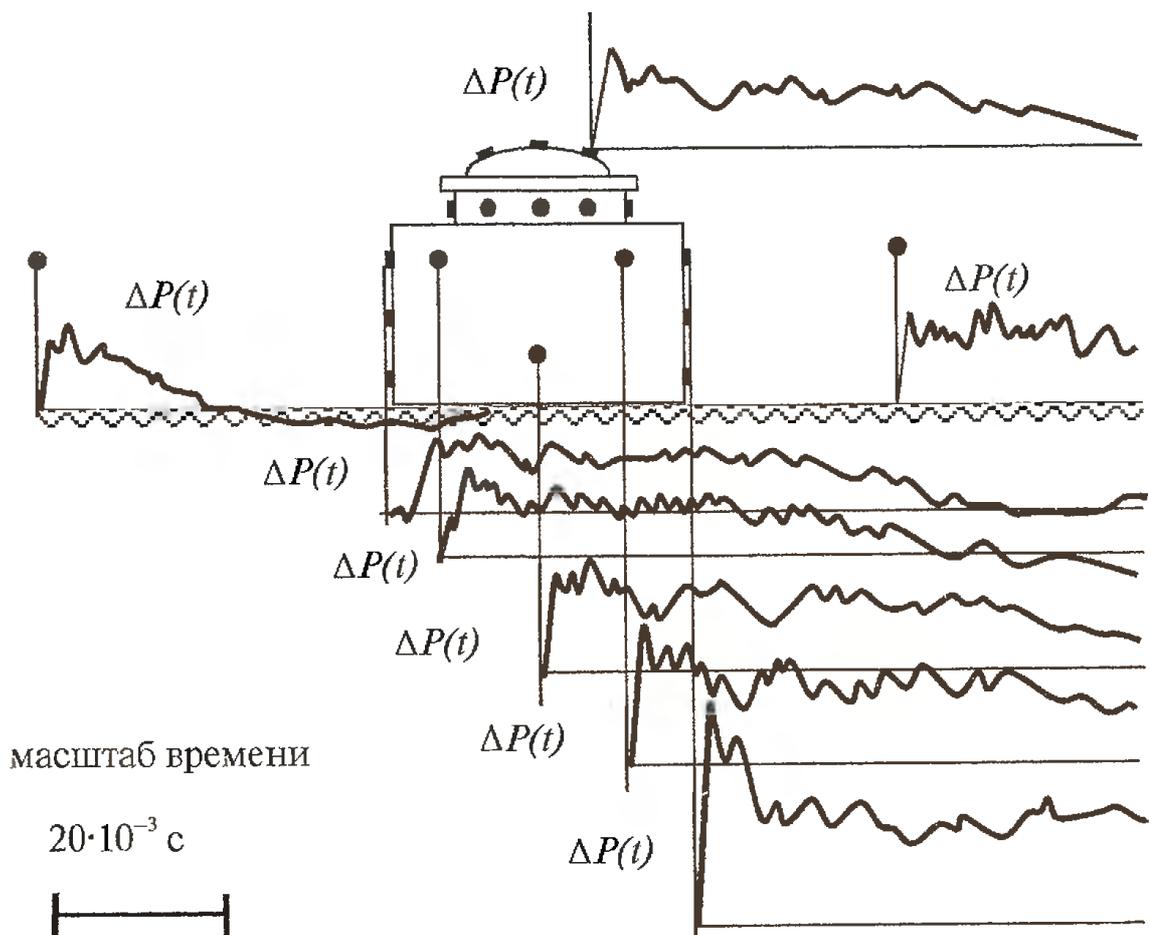


Рис. 1.38 б. Схема расстановки преобразователей

вмещенной с измерительно-вычислительным комплексом. Обработка результатов измерений на ИВК проведена по типовым программам математического обеспечения.

Общая погрешность измерений и автоматизированной обработки результатов на ИВК при доверительной вероятности  $P=0,95$  не превышала для измеряемых параметров: давления – 15%; ускорений – 11,8%; относительных деформаций – 14%; скоростей – 12%.

### 1.3.1.3. Параметры нагрузки

Нагрузка в экспериментах создавалась моделированной ВУВ. В процессе испытаний измерялось давление на фронте ВУВ, ее продолжительность, а также форма импульса. Были также проведены опыты, в которых модели подвергались неоднократному нагружению от последовательно проведенных взрывов. Схемы испытаний показаны на рис. 1.39.

Результаты экспериментов были использованы при составлении расчетных схем, в которых параметры нагрузок представлены упрощенными расчетными диаграммами. Этот подход широко используется в инженерной практике при трансформации форм импульса нагрузки реального взрыва [1, 6, 19].

Распределение давлений по поверхности модели на шаге расчета принималось в виде статических эпюр, принятых по результатам измерений, а также с учетом опубликованных результатов и рекомендаций. Картина нагрузок становится более полной при соблюдении хронологии давлений на поверхности с учетом скорости продвижения фронта ВУВ.

Рассмотрим параметры нагрузок, действующих на поверхности модели от ВУВ при  $\Delta P_{\phi}=51$  кПа (рис. 1.40 а–в). Эта нагрузка принята к рассмотрению потому, что для двух первых моделей проведены опыты на однократное и двукратное действие ВУВ с давлением на фронте  $\Delta P_{\phi}=51$  кПа

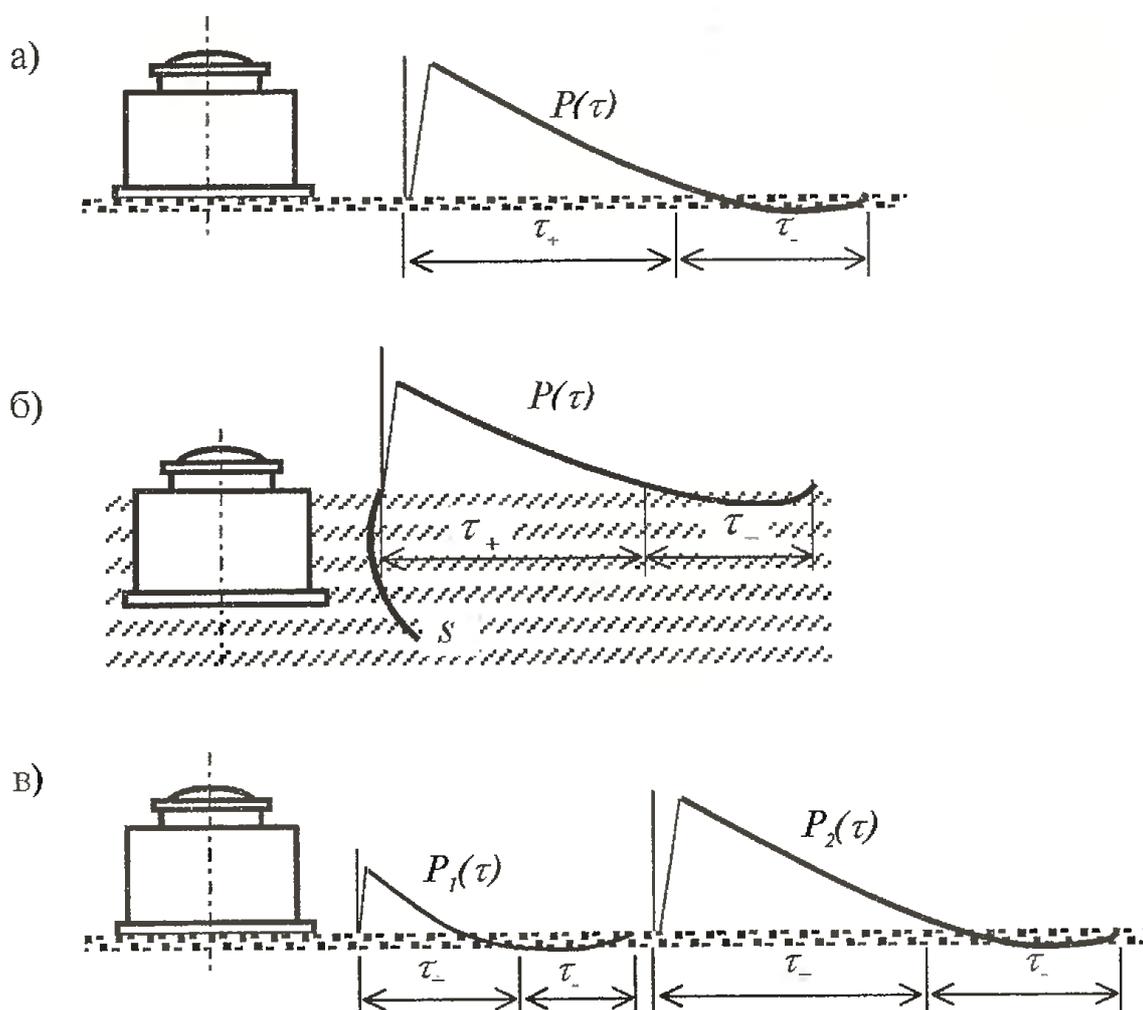


Рис. 1.39. Схемы испытаний модели реакторного отделения на действие воздушной ударной волны: а) модель жестко закреплена на поверхности; б) модель заглублена в песчаный грунт; в) действие комбинированной нагрузки

и скоростью фронта  $D_\phi = 395$  м/с,  $\tau_+ = 160$  мс — продолжительность фазы сжатия.

На рис. 1.40 а–в показаны каждые пять эпюры давления во время дифракции волны и эпюры давлений при квазистационарном обтекании. Время движения фронта волны по поверхности модели составило  $t_{обт} = 1,94$  м / 395 м/с =  $4,91 \cdot 10^{-3}$  с.

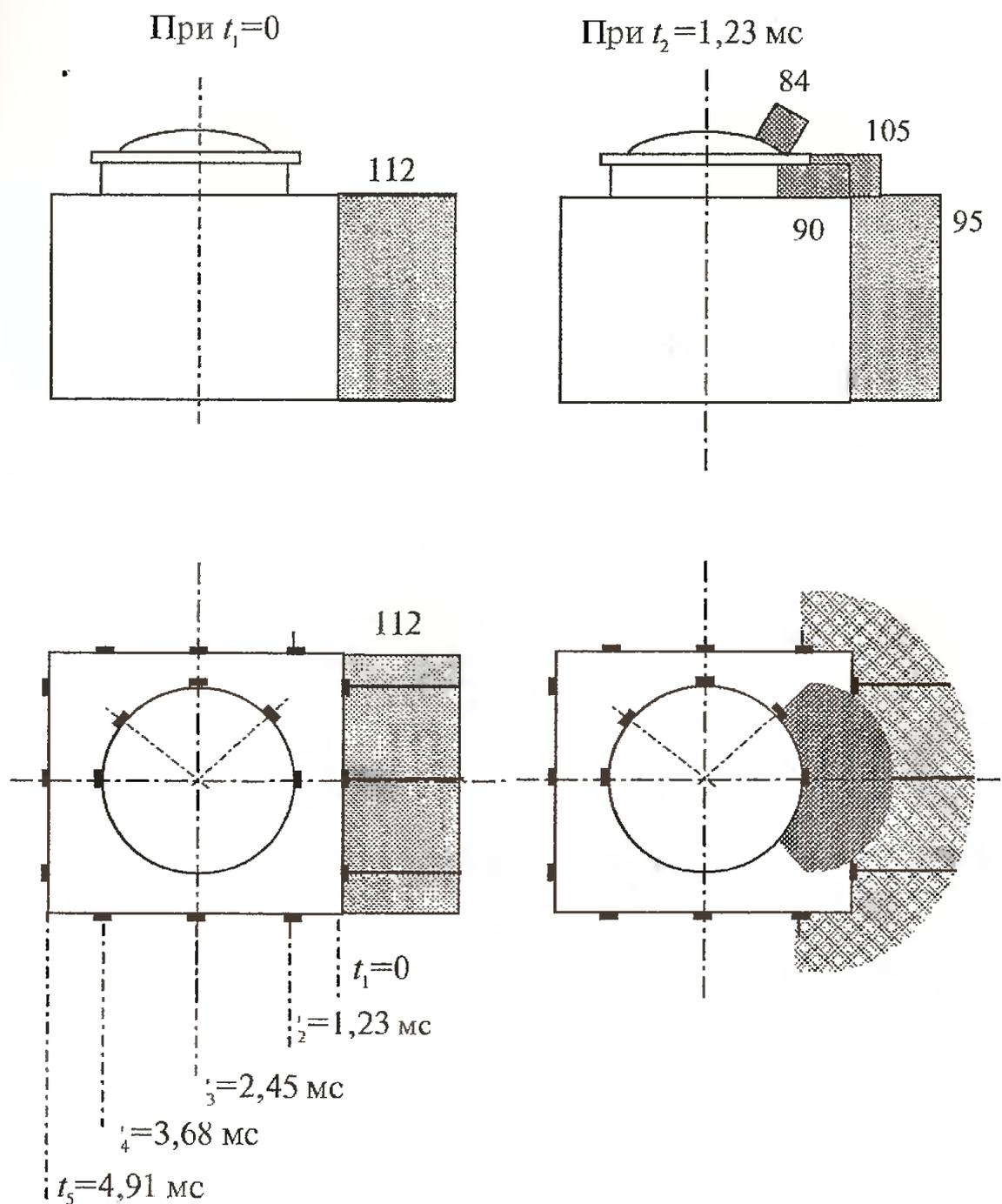


Рис. 1.40 а. Эпюры давлений в стадии дифракции и при квазистационарном обтекании,  $\Delta P=51$  кПа; значения давлений даны в кПа (при  $t_1=0$  и при  $t_2=1,23$  мс)

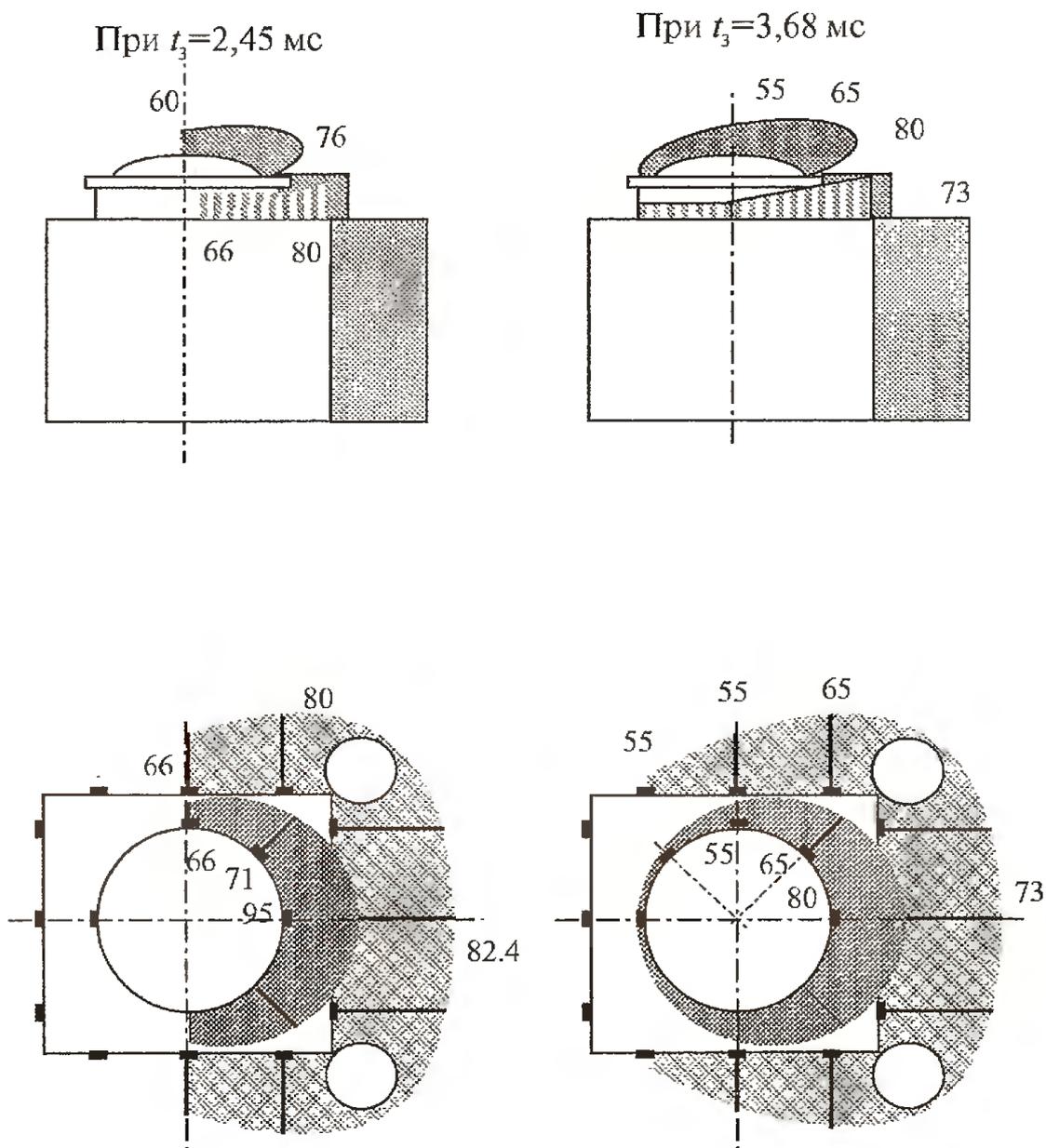


Рис. 1.40 б. Эпюры давлений в стадии дифракции и при квази-стационарном обтекании,  $\Delta P = 51$  кПа; значения давлений даны в кПа (при  $t_3 = 2,45$  и  $t_3 = 3,68$  мс)

При  $t_4=4,91$  мс

Режим квазистационарного обтекания,  $\tau_+ = 160 \cdot 10^{-3}$  с — продолжительность фазы сжатия

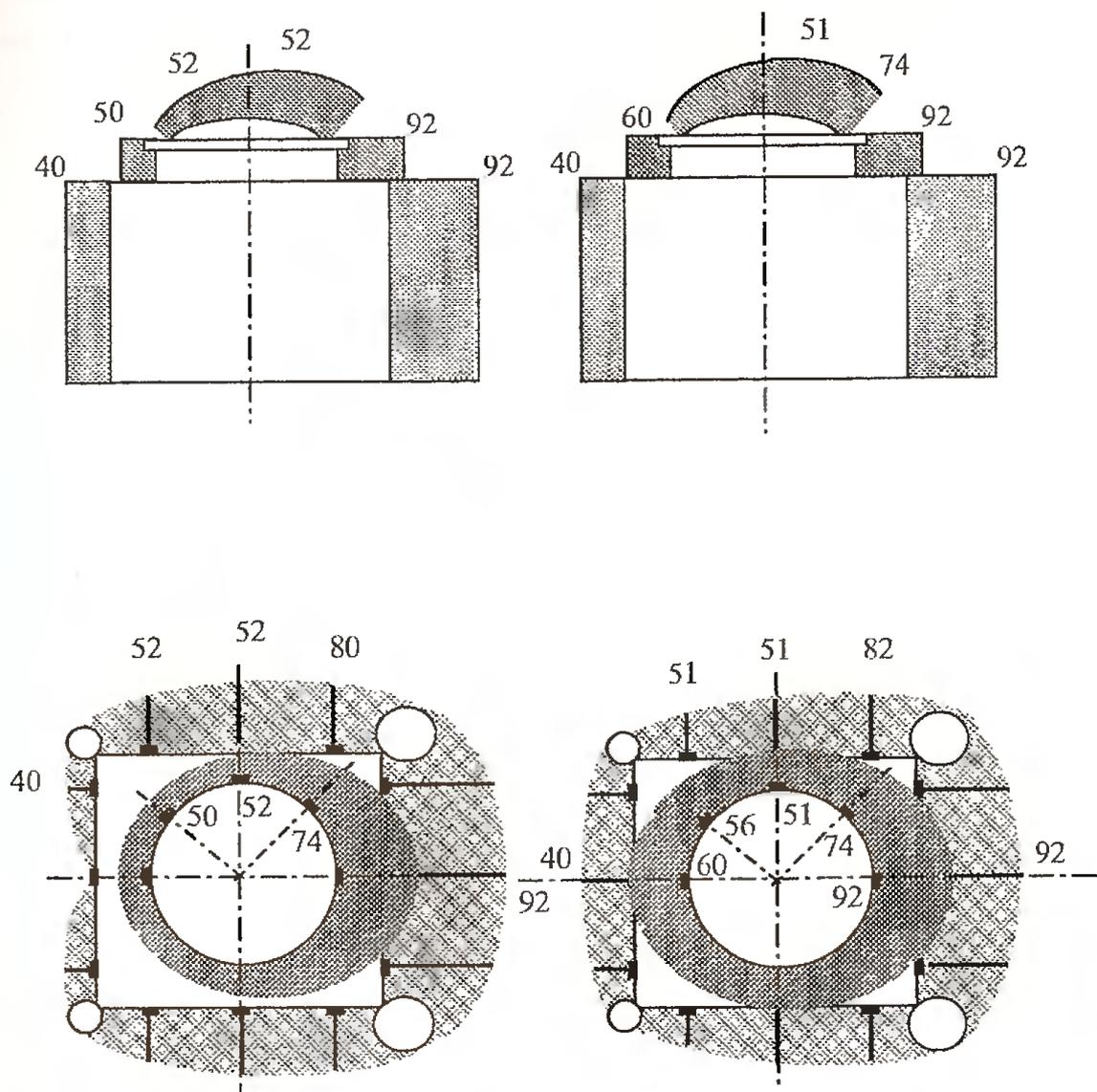


Рис. 1.40 в. Эпюры давлений в стадии дифракции и при квазистационарном обтекании,  $\Delta P=51$  кПа; значения давлений даны в кПа (при  $t_4=4,91$  и  $\tau_+=160 \cdot 10^{-3}$  с)

#### 1.3.1.4. Динамические характеристики моделей

При разложении колебаний по собственным формам важным является правильное представление о динамическом поведении конструкции под нагрузкой. Спектр ответов конструкции, указывающий на доминирующие частоты, можно получить либо теоретически, либо экспериментально. Рассмотрим результаты экспериментов и сравним эти результаты с данными расчетов.

Экспериментальное определение частот собственных колебаний проводилось в процессе свободных затухающих колебаний после действия короткой по времени нагрузки. Измерения показали, что частоты, соответствующие колебаниям по основному тону, приближаются к значениям:

для модели  $\omega_1^{\text{модели}} = 48,3 \text{ с}^{-1}$ ;

для обстройки  $\omega_1^{\text{обстр.}} = 78,5 \text{ с}^{-1}$ ;

для оболочки  $\omega_1^{\text{обол.}} = 80,0 \text{ с}^{-1}$ ;

для купола оболочки  $\omega_1^{\text{купола}} = 105 \text{ с}^{-1}$ ;

для внешней стены обстройки  $\omega_1^{\text{ст.обстр.}} = 333 \text{ с}^{-1}$ .

Среднее значение логарифмического декремента затухания  $\Delta = 0,19$ .

Расчеты по определению собственных частот моделей проведены методом КЭ по двум схемам [11].

Согласно первой схеме, модель располагалась на поверхности земли, а ее опорная плита жестко крепилась к основанию. По второй схеме модель на три четверти была заглублена в песчаный грунт (рис. 1.41).

Нагрузка на сооружение прилагалась нормально к поверхности. Эпюры нагрузки принимались по результатам экспериментальных исследований и показаны на рис. 1.41 б.

Расчетная схема модели, заглубленной в грунт, получена из расчетной схемы модели, жестко закрепленной на

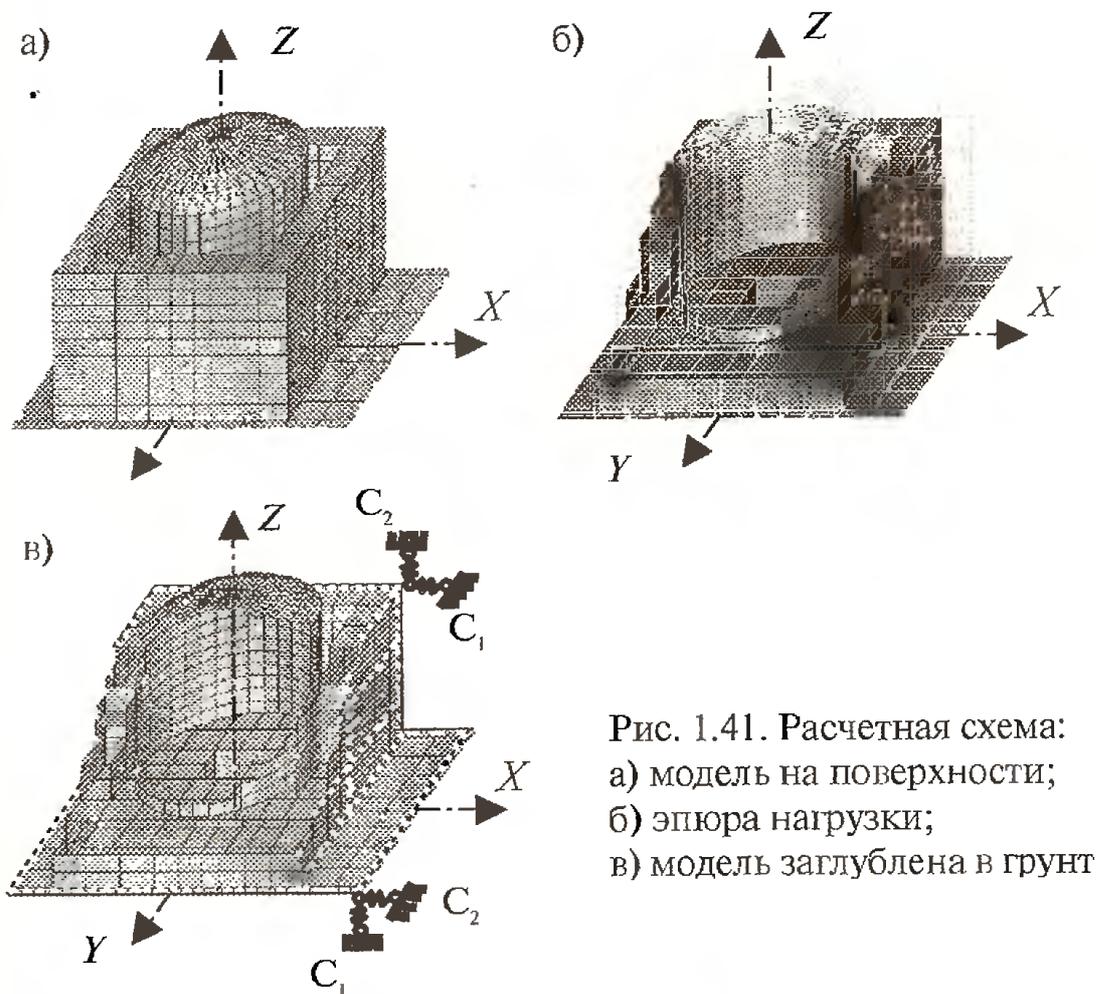


Рис. 1.41. Расчетная схема:  
 а) модель на поверхности;  
 б) эпюра нагрузки;  
 в) модель заглублена в грунт

поверхности, путем замены жесткой заделки опорной плиты упругими связями, а также введением этих связей в узлы на внешних поверхностях стен обстройки.

Физико-механические характеристики песчаного грунта приняты по справочным данным и введены в расчет использованием идентификатора для коэффициента постели на сжатие и идентификатора для коэффициента постели на сдвиг.

В процессе расчетов для каждой расчетной схемы были рассмотрены пятьдесят форм колебаний (рис. 1.42, 1.43) и соответствующие им картины напряженного состояния, представленные в виде изополей нормальных напряжений.

Сравнение форм колебаний показало, что для заглуб-

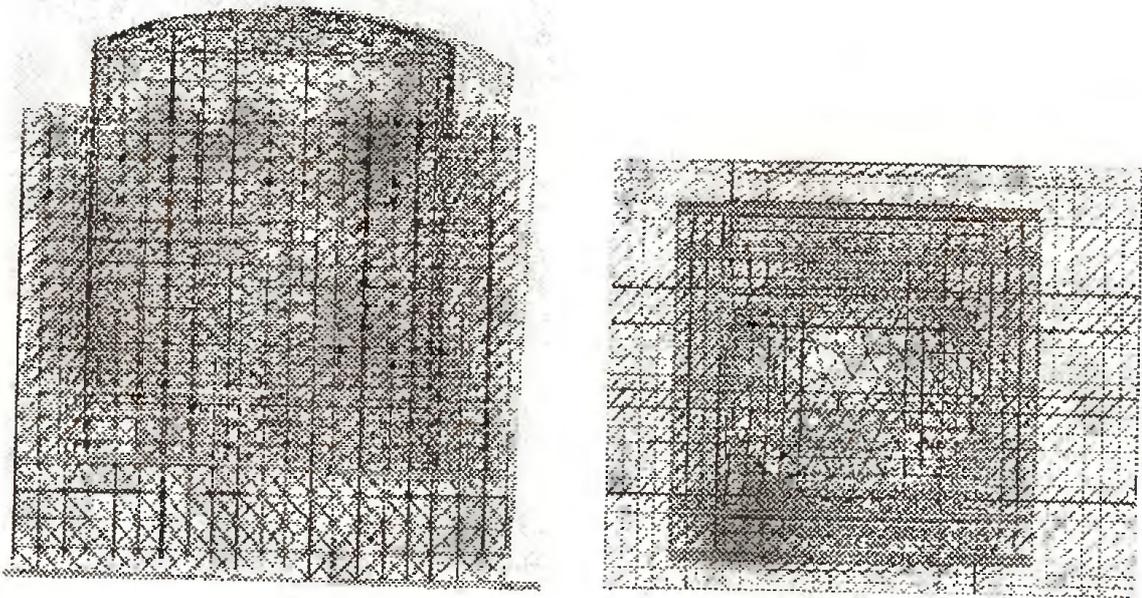


Рис. 1.42. Перемещения по первой форме колебаний

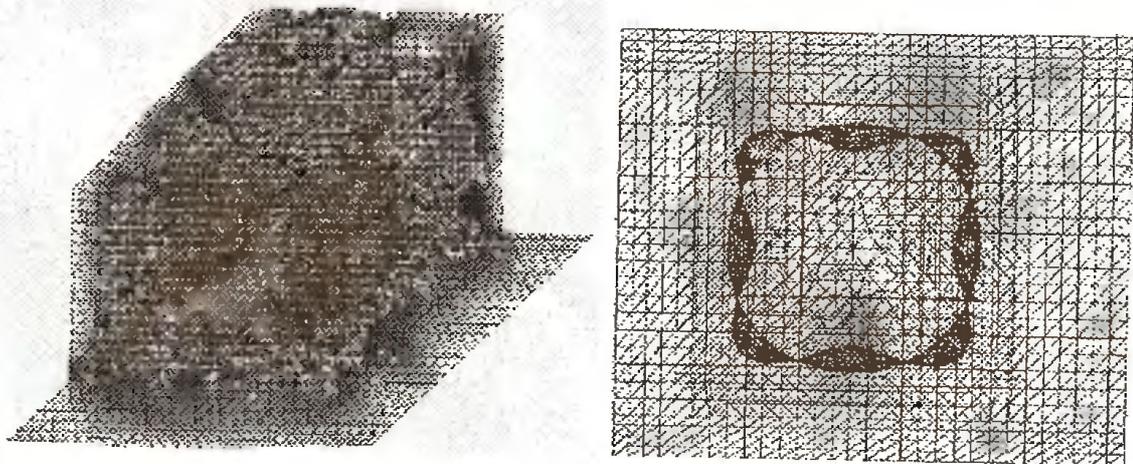


Рис. 1.43. Перемещения по десятой форме колебаний

ленной конструкции частоты собственных колебаний снизились.

В области низких частот (например, первая форма) наблюдалось значительные различия качественных и количественных параметров напряженно деформированного состояния. Заглубленные конструкции колебались со значительным сдвигом по фазе.

Так, сравнивая изополя напряжений по оси  $Z$ , отметим, что для первой формы колебаний (рис. 1.44), для конструкции на жестком основании изополе качественно совпадает с картиной напряженно-деформированного состояния для заглубленной конструкции по девятой форме (рис. 1.45) [11].

В области более высоких частот в большей степени на напряженно-деформированное состояние оказывает влияние грунт, прилегающий к боковой поверхности обстройки. И в этом случае практически никакого влияния на качественную картину напряженно-деформированного состояния не оказывают условия крепления опорной плиты.

Удерживаемая песчаной средой модель энергоблока стала менее податливой и, как следствие этого, конструкции, из которых она состоит, стали более чувствительны к высокочастотным возбуждениям. При этом период колебаний оболочки модели с жестким креплением основания значительно превысил соответствующий период оболочки энергоблока, помещенного в грунт, тогда как амплитудные значения их ускорений были практически одинаковыми. Движение заглубленной конструкции под нагрузкой началось с некоторой задержкой во времени, составляющей  $1/8$  часть от периода собственных колебаний по основному тону. При этом в начальный момент времени происходили колебания ее отдельных элементов. Отмечено, что скорости вертикальных перемещений конструкций модели несколько превысили скорости горизонтальных смещений, совпадающих по направлению с движением фронта ударной волны. С течением времени в процесс колебаний был вовлечен грунт, прилегающий к стенам обстройки, в результате чего частоты собственных колебаний заглубленной модели снизились, по данным экспериментов — на 25%, по данным расчета — на 21%.

Эти расхождения увеличивались для более сложных форм движения, происходящих в области высоких частот.

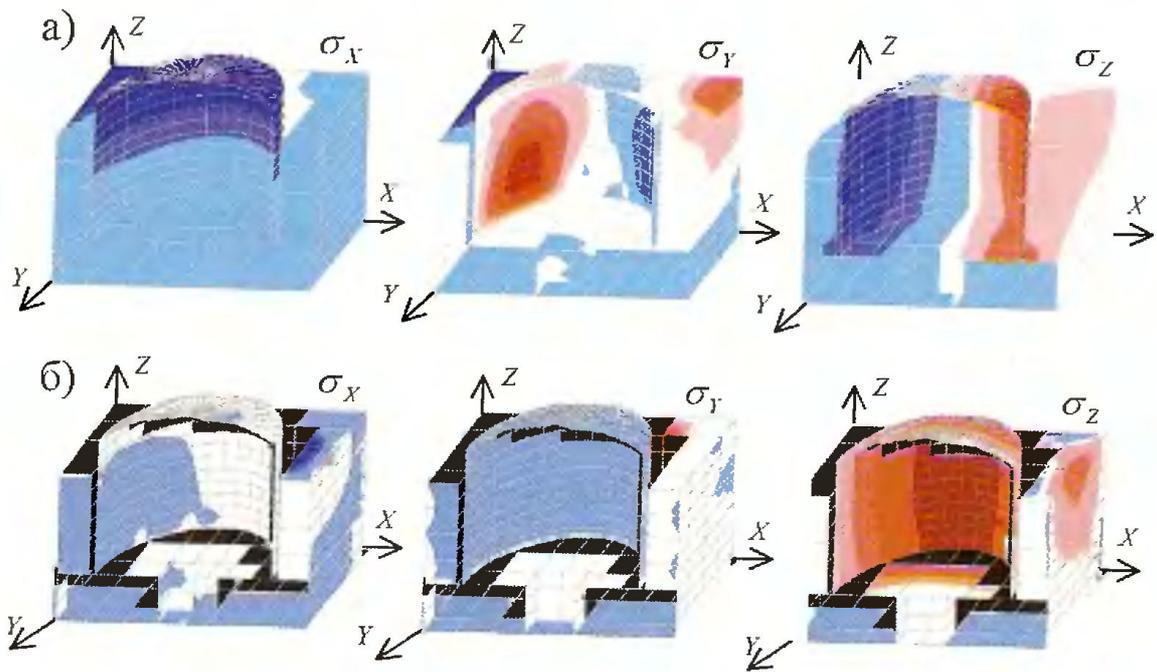


Рис. 1.44. Изополя напряжений по осям  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  для первой формы колебаний: а) опорная плита сооружения жестко закреплена на поверхности; б) сооружение заглублено в грунт [11]

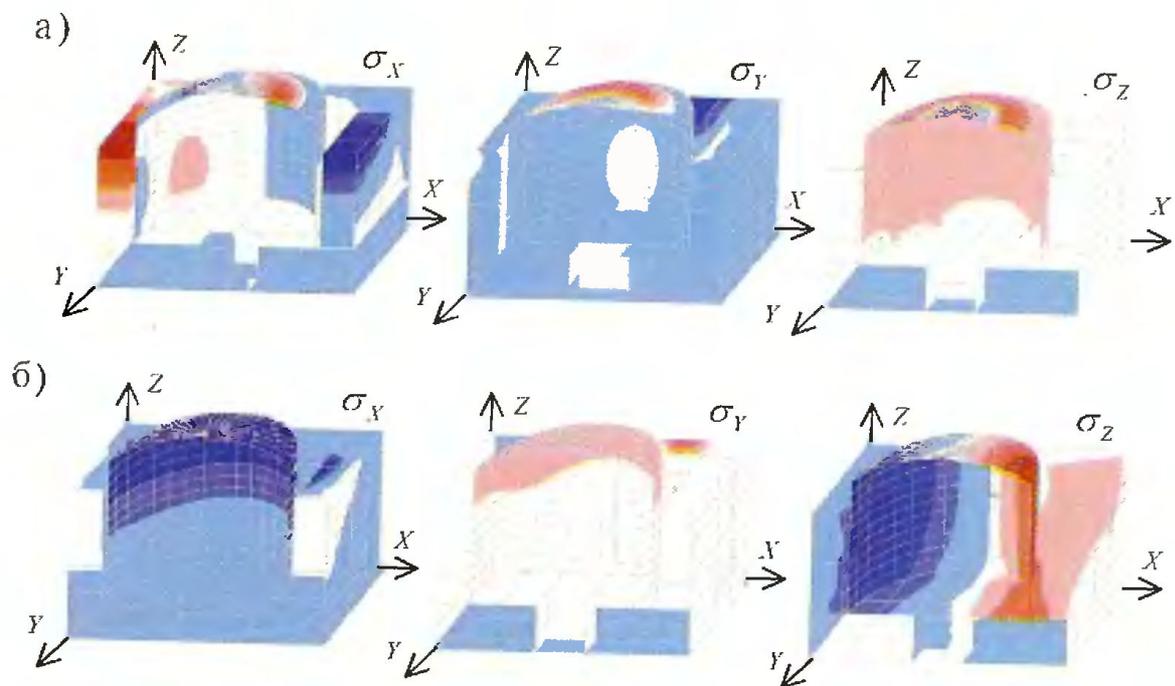


Рис. 1.45. Изополя напряжений по осям  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  для девятой формы колебаний: а) опорная плита сооружения жестко закреплена на поверхности; б) сооружение заглублено в грунт [11]

Проведенные исследования показали, что динамические свойства сооружения, заглубленного в грунт, заметно изменяются и должны учитываться расчетом. Причем в условиях реального взрыва изменяется последовательность и характер действующих нагрузок, определяющих характер деформаций и прочность конструкций.

### 1.3.2. Деформации и прочность модели при действии воздушной ударной волны

#### 1.3.2.1. Упругие деформации модели при действии воздушной ударной волны от одного взрыва

Упругие деформации конструкций моделей наблюдались в диапазоне давлений  $\Delta P_{\phi} = 10-50$  кПа ( $\Delta P_{\phi}$  — давление на фронте волны). Продолжительность фазы сжатия изменялась в пределах  $\tau_{+} = 100-150$  мс, фазы разряжения —  $\tau_{-} = 130-160$  мс. Давление в волне разряжения достигало  $\Delta P_{-} = 4-8$  кПа.

Рассмотрим результаты испытаний первой и второй моделей при  $\Delta P_{\phi} = 14$  кПа,  $\tau_{+} = 80$  мс,  $\tau_{-} = 130$  мс,  $\Delta P_{\phi} = 5,2$  кПа. Обобщенные формы движения модели имели гармонический затухающий характер. Периодичность колебаний с преобладанием нижних частот характерна для движущейся опорной плиты (У2) и оболочки (У14) (рис. 1.46). Защищенные внешними стенами внутренние конструкции заметных деформаций не получили (У4). Их движение определялось в начальный момент действием волны отражения и сопровождалось влиянием колебаний основных конструкций. Заметные деформации получили стены обстройки, обращенные к ВУВ.

Соответствующие диаграммы относительных деформаций во времени для фронтальной (Т6, Т7) и тыльной стен (Т11) обстройки и тыльной стены фундаментного блока (Т5) показаны на рис. 1.47. Практически мгновенная реакция и рост до максимума деформаций передней стенки об-

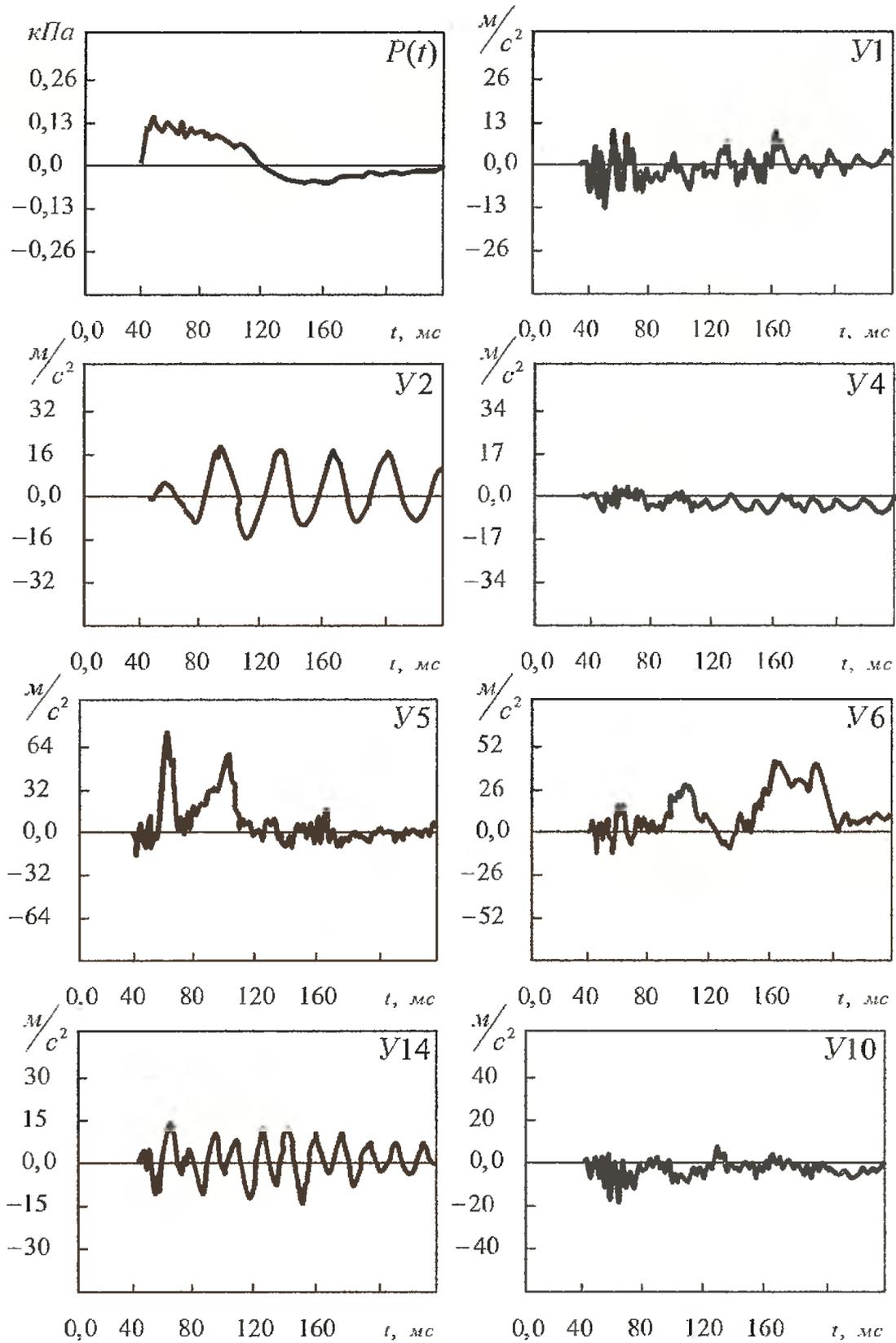


Рис. 1.46. Акселерограммы конструкций модели при нагрузке  $\Delta P_{\phi} = 14$  кПа

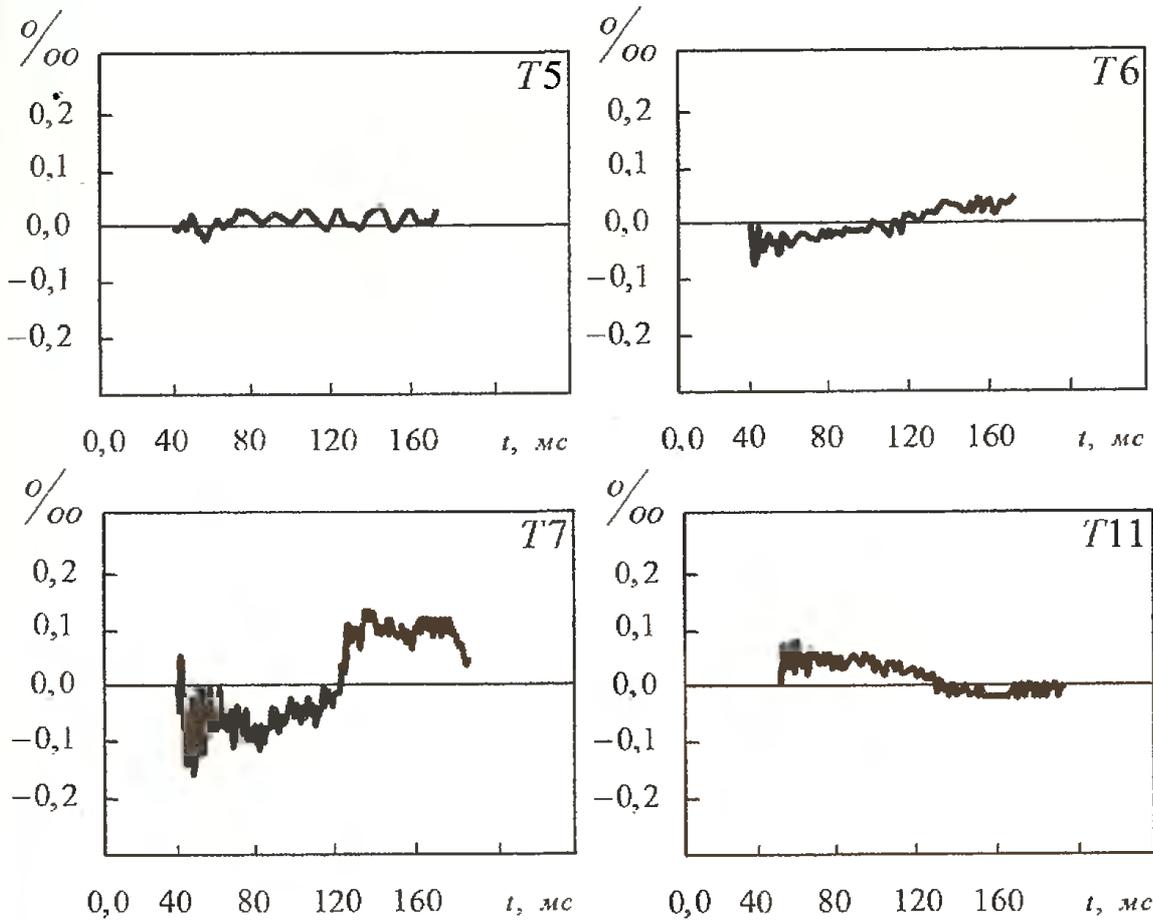


Рис. 1.47. Диаграммы относительных деформаций конструкций модели при  $\Delta P_{\phi} = 14$  кПа

стройки обусловлены ее незначительной жесткостью по сравнению с другими конструкциями. Максимальные перегрузки на внешней стене (У5) возникли на 25-й мс — это время соизмеримо с продолжительностью собственного периода по нижней форме ( $T_1 = 30$  мс). Максимальный пик на диаграмме (У5) совпадает с заметными всплесками на виброграммах фундамента и обстройки. При этом амплитудные значения скорости движения были равны:

- для внешней стены — 1,4 м/с;
- для обстройки — 0,66 м/с;
- для фундаментной плиты — 0,18 м/с.

При действии незначительных нагрузок, как правило,

проявлялись более высокие частоты колебаний. И это видно из рассмотрения диаграмм деформаций на рис. 1.48. Энергии действующей волны не достаточно для раскачивания модели. Поэтому в большей степени проявились локальные деформации отдельных конструкций ( $T5$ ,  $T6$ ).

Наиболее заметны деформации обстройки ( $T7$ ,  $T11$ ), имеющей развитую поверхность и получившей большую нагрузку по сравнению с другими конструкциями.

Увеличение нагрузки до  $\Delta P_\phi = 45$  кПа не вызвало повреждений в конструкциях модели. Между тем, на диаграммах деформаций стали более заметными моды низкой частоты, что позволяет выделить простые формы движения, описывающие колебания конструкций в целом.

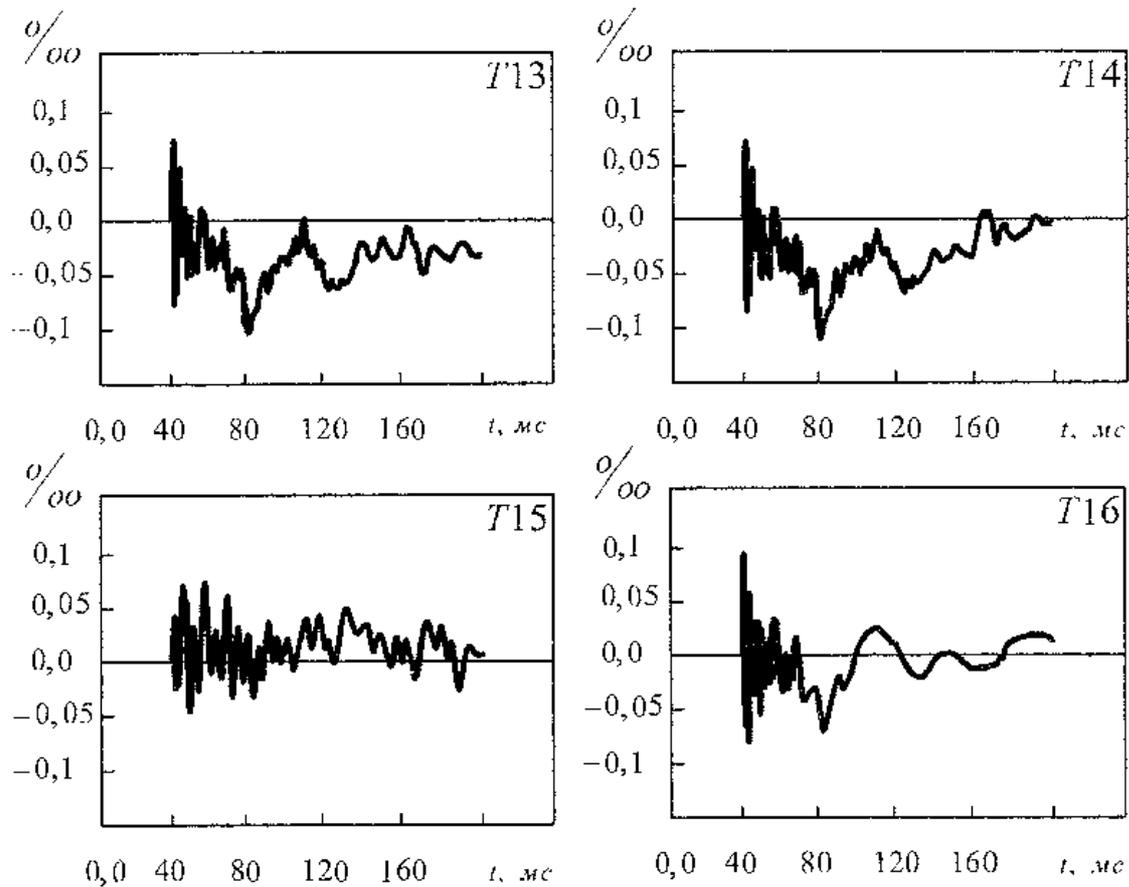


Рис. 1.48. Диаграммы относительных деформаций купола оболочки при  $\Delta P_\phi = 45$  кПа

Защищенная конструкцией обстройки цилиндрическая часть оболочки практически не деформировалась. В начальный момент колебания ее были вызваны кинематическим возбуждением через опорную плиту, после чего происходили при взаимодействии с ВУВ. Более заметными были деформации купола. На рис. 1.49 показаны диаграммы относительных деформаций внешней ( $T13$ ,  $T15$ ) и внутренней ( $T14$ ,  $T16$ ) поверхностей основания купола. При этом посредством тензорезисторов  $T13$ ,  $T14$  измерялись меридианные деформации,  $T15$ ,  $T16$  – кольцевые деформации. Колебания имели затухающий характер. Максимальные деформации не превысили  $0,1\%$ .

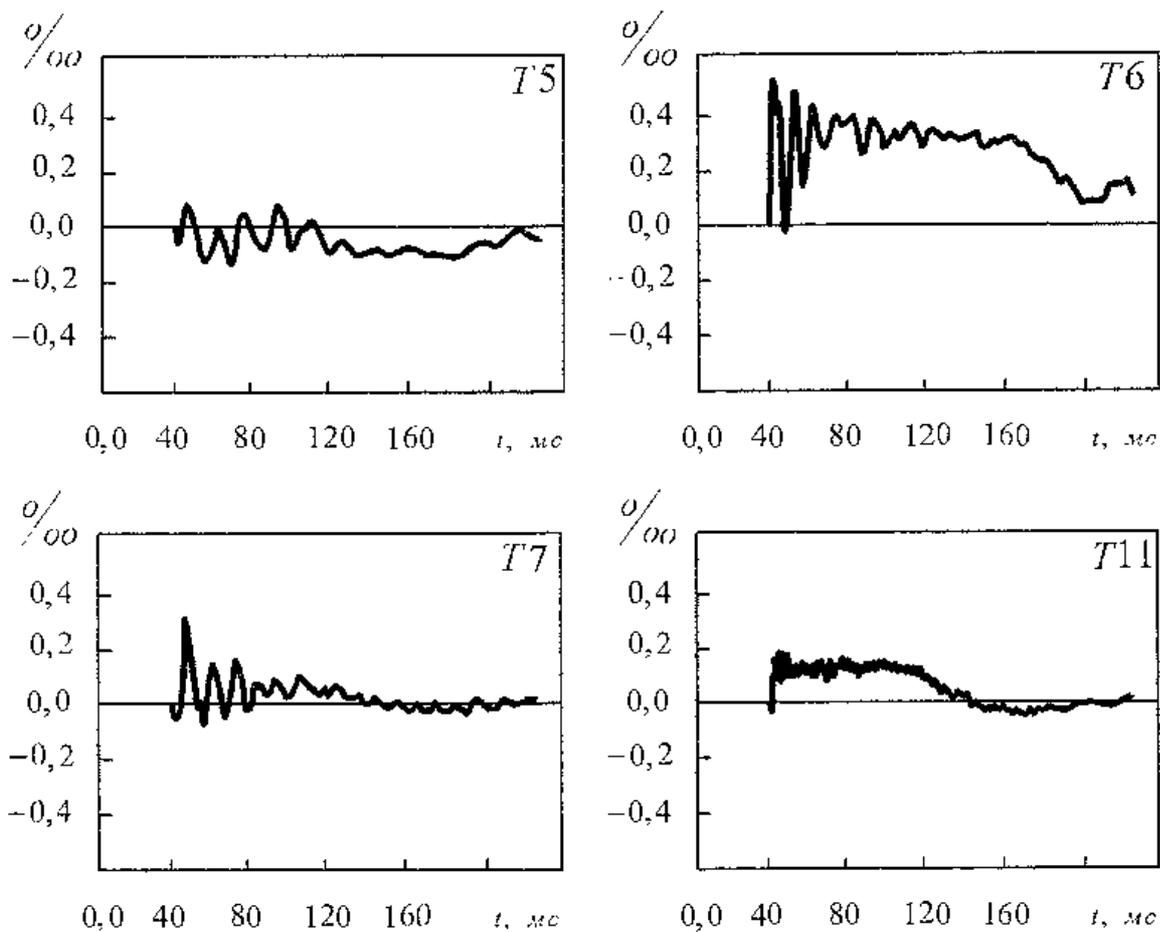


Рис. 1.49. Диаграммы относительных деформаций конструкций модели при  $\Delta P_{\phi} = 45$  кПа

### 1.3.2.2. Упруго-пластические деформации и разрушение модели при действии воздушной ударной волны от одного взрыва

Эксперименты проводились при постепенном увеличении нагрузки, что приводило к изменению форм движения. На рис. 1.50 показаны три диаграммы относительных деформаций бетонной поверхности тыльной стены фундаментного блока ( $T5$ ), полученные при нагрузках  $\Delta P_\phi=45$  кПа,  $\Delta P_\phi=60$  кПа и  $\Delta P_\phi=90$  кПа соответственно. Показания установленного в основании фундаментного блока тензорезистора ( $T5$ ) отражают закономерности движения модели в целом. При малых нагрузках в процессе упругих колебаний преобладали моды высоких частот.

Увеличение нагрузки вызвало проявление низких частот колебаний, отражающих гармонические формы движения.

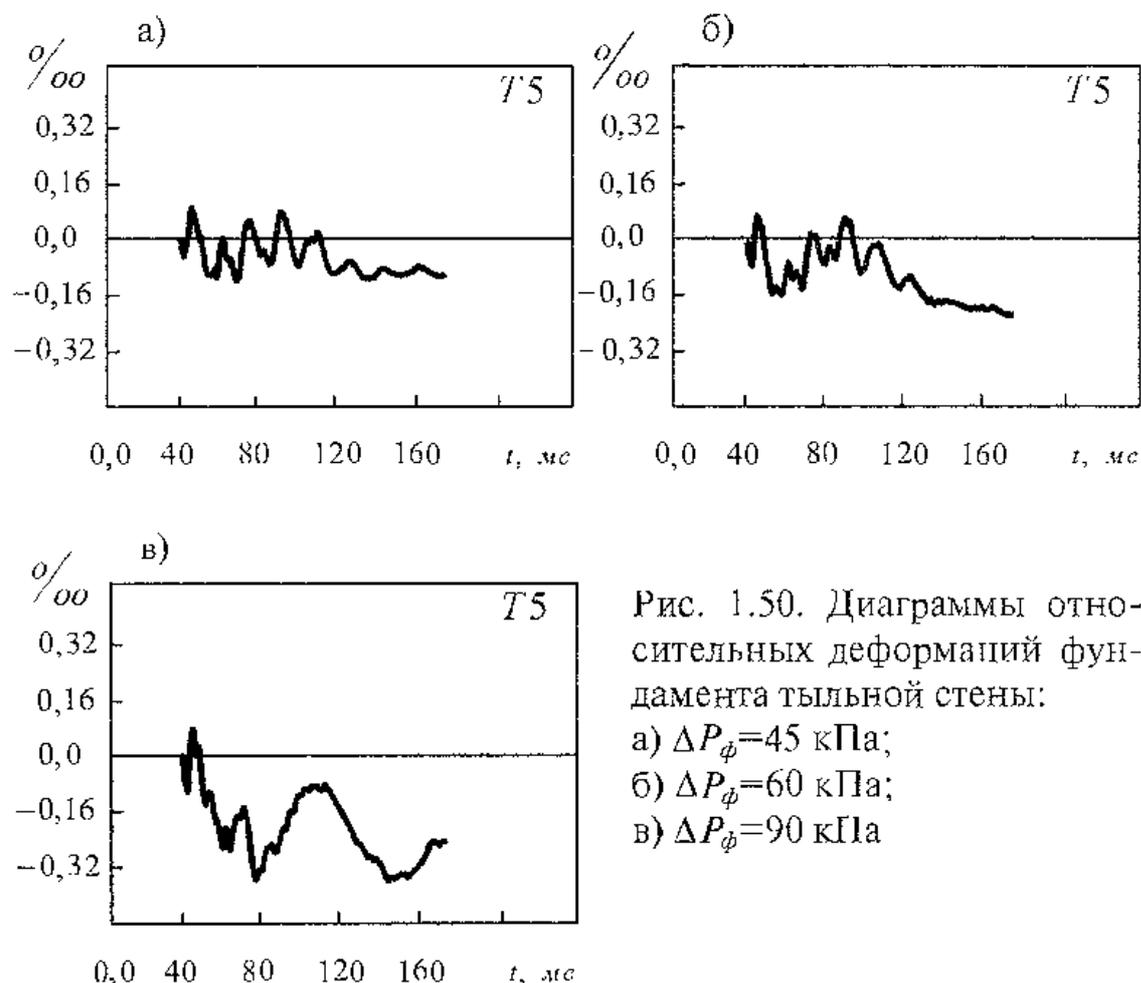


Рис. 1.50. Диаграммы относительных деформаций фундамента тыльной стены:

- а)  $\Delta P_\phi=45$  кПа;
- б)  $\Delta P_\phi=60$  кПа;
- в)  $\Delta P_\phi=90$  кПа

Необратимые деформации и трещины в бетоне фронтальной ограждающей стены обстройки появились при  $\Delta P_\phi = 117$  кПа в первой и при  $\Delta P_\phi = 90$  кПа во второй моделях. Продолжительность фазы сжатия  $\tau_+ = 120$  мс, фазы разряжения  $\tau_- = 100$  мс. Диаграммы давления на фронте ВУВ и в отраженной волне показаны на рис. 1.51. Здесь же приведены акселерограммы некоторых конструкций, отражающие поведение модели под нагрузкой. Наибольшие перегрузки и смещения получили конструкции, воспринявшие действие отраженной волны по направлению движения ВУВ. Это конструкции фронтальной стены обстройки, на уровне ее верхнего среза (У8) и фронтальной стены фундаментного блока (У3). Инерционность конструкций модели способствовала некоторой задержке начала их движения. Последовательность движения определялась началом и временем действия нагрузки, массой и жесткостью конструкций. Наиболее податливые внешние стены обстройки (У5, У6, У1) получили наибольшие смещения в первой фазе колебаний при действии квазистационарного воздушного потока. Движение оболочки (У14) началось в результате кинематического воздействия через основание. Направление движения против волны изменилось под воздействием ВУВ, фронт которой столкнулся с поверхностью цилиндра через 1,5 мс после начала движения. Закрытая от действия ВУВ, имеющая соизмеримую жесткость с пространственной конструкцией обстройки оболочка получила меньшие ускорения и смещения по сравнению с обстройкой. Взаимодействие ВУВ с конструкциями модели имело весьма сложный характер. Учитывая нестационарность силового воздействия и конструктивную сложность модели, следует выделить наиболее простые формы движения, отражающие резонансы конструкций на нижних частотах колебаний. Для этого удобнее использовать диаграммы относительных деформаций, показанные на рис. 1.52.

Максимальные значения деформаций при растяжении.

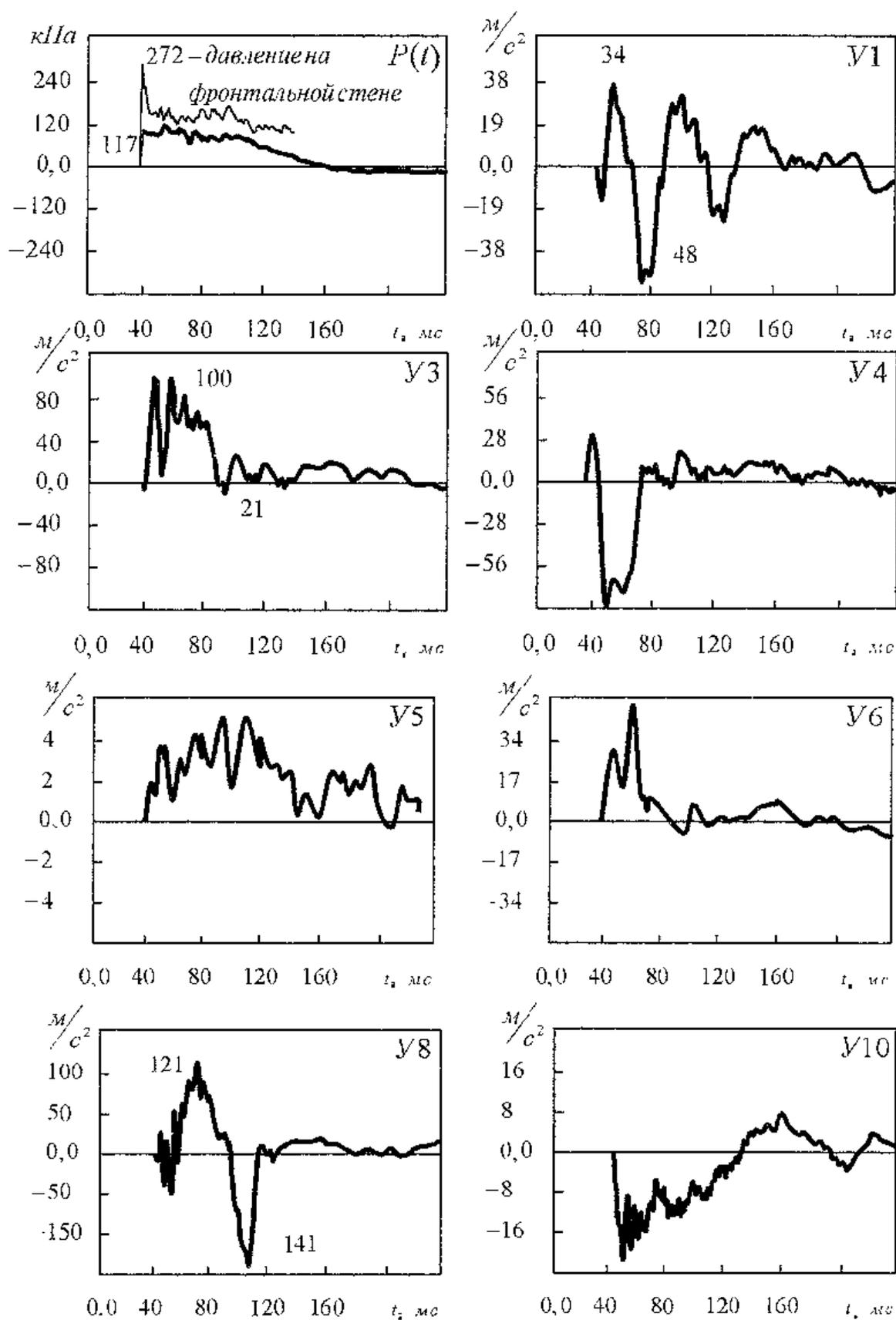


Рис. 1.51 а. Диаграмма нагрузки при  $P_{\phi}=117$  кПа и соответствующие акселерограммы конструкций модели

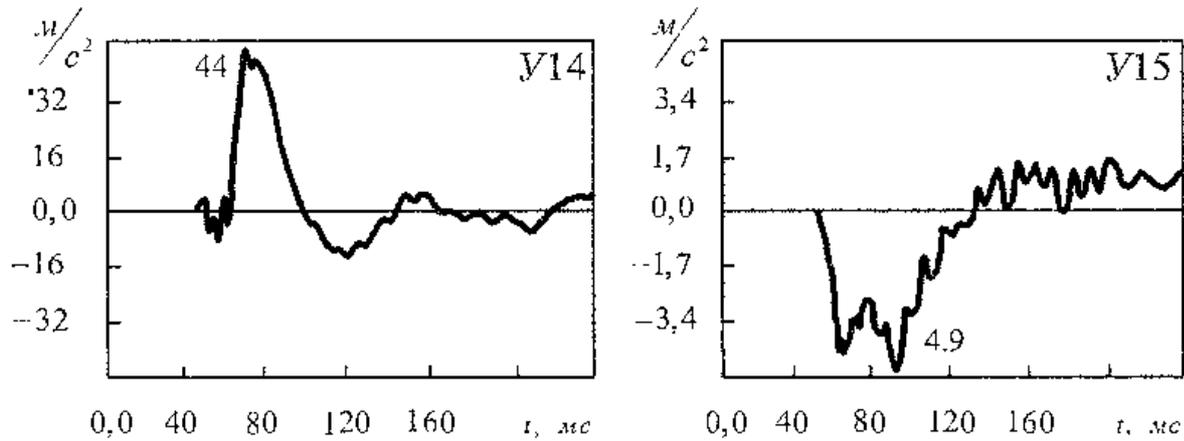


Рис. 1.51 б. Диаграмма нагрузки при  $\Delta P_{\phi} = 117$  кПа и соответствующие акселерограммы конструкций модели

возникли в конструкции внутренней ограждающей стены обстройки (Т7) и достигли 1,9‰, в то время как деформации сжатия вертикального ребра жесткости фронтальной стены обстройки достигли 5,2‰. Такие большие деформации предполагают разрушение железобетонного сечения, чего не произошло. Между тем, их возникновение может быть объяснено условиями динамического деформирования в стесненных условиях, что, по-видимому, и увеличило деформативность песчаного бетона. Сравнение деформаций внешних стен обстройки (Т7, Т11) показывает их движение в противофазе при частоте колебаний около 80 Гц.

Деформации поверхности купола были на порядок меньшими по сравнению с деформациями конструкций обстройки и имели быстрозатухающий гармонический характер. На рис. 1.53 показаны диаграммы изгибающих погонных моментов, полученные путем упругого расчета по схеме изгибаемого элемента.

Меридианальные моменты, возникшие в основании купола ( $M_1$ ,  $M_2$ ) в период дифракции, соизмеримы между собой. Колебания сначала происходили в противофазе, после чего трансформировались и стали симметричными. Кольцевые моменты ( $M_3$ ) были меньшими по величине и убывали со временем с меньшим декрементом.

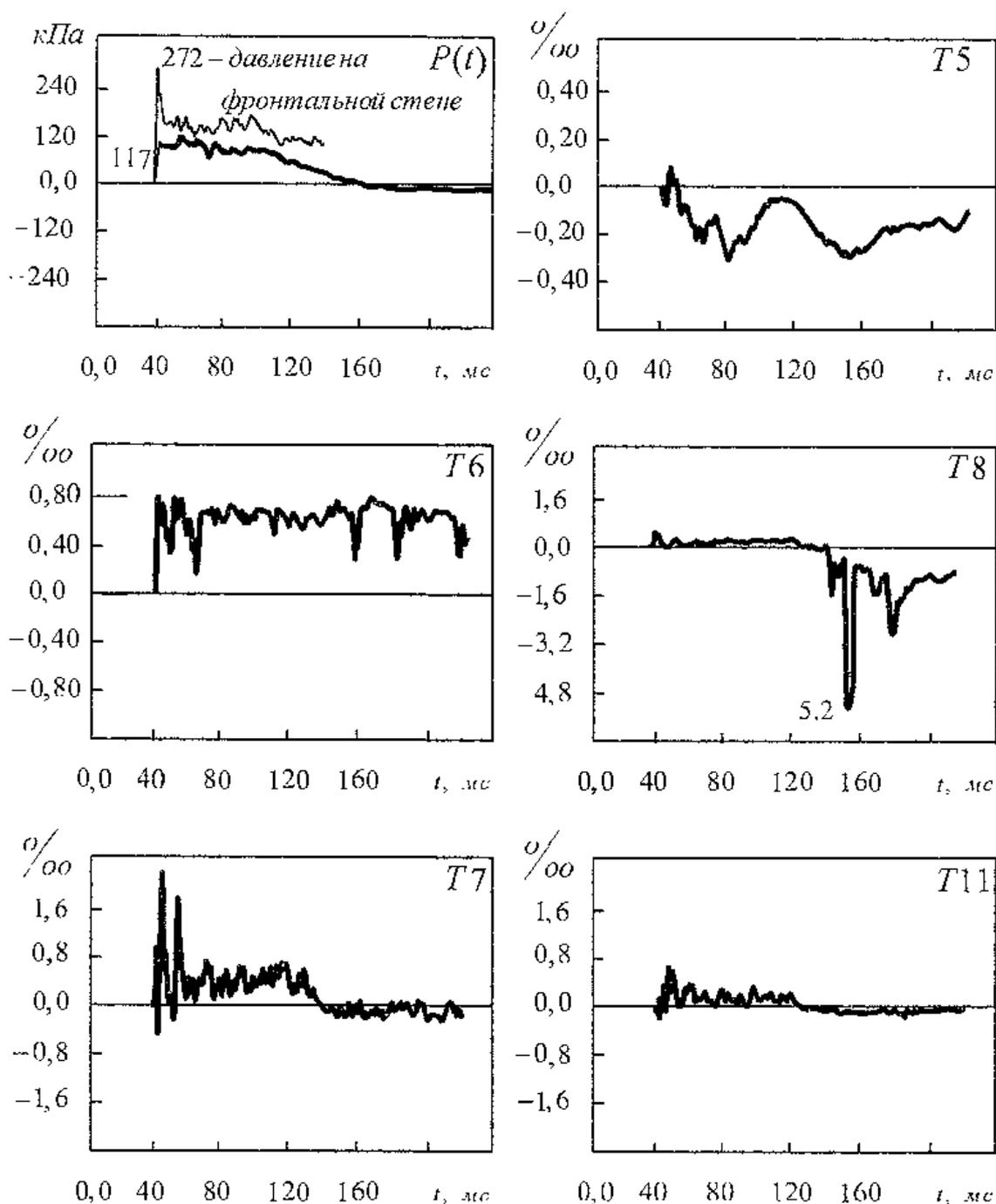


Рис. 1.52. Диаграммы нагрузки при  $\Delta P_\phi = 117$  кПа и соответствующие диаграммы относительных деформаций

Разрушение первой модели проведено при  $\Delta P_\phi = 142$  кПа,  $\tau_+ = 150$  мс, давление в отраженной волне, измеренное на фронтальной стене обстройки, равно 310 кПа, продолжительность действия отраженной волны  $\Delta t_{отр} = 5$  мс. Ре-

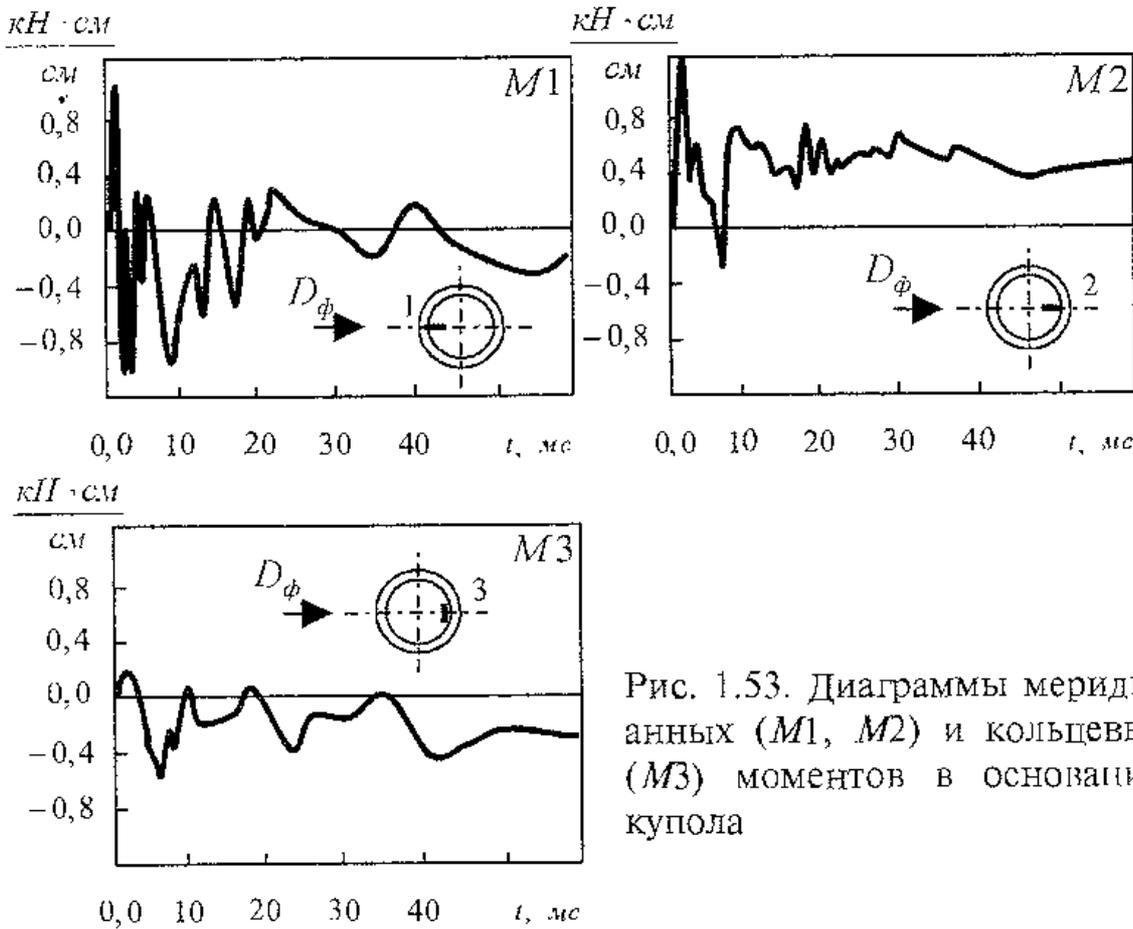


Рис. 1.53. Диаграммы меридианных ( $M1$ ,  $M2$ ) и кольцевых ( $M3$ ) моментов в основании купола

зультатирующая сдвигающая сила во время дифракции достигла величины  $1,25 \cdot 10^3$  кН, при квазистационарном обтекании  $S_1 = 1,6 \cdot 10^2$  кН. Вторая модель разрушена ударной волной с давлением на фронте  $\Delta P_\phi = 160$  кПа,  $\Delta P_{отр} = 360$  кПа,  $\Delta t_{отр} = 7$  мс. Результирующая сдвигающая сила во время дифракции достигла величины  $1,4 \cdot 10^3$  кН, при квазистационарном обтекании  $S_1 = 3,6 \cdot 10^2$  кН.

На рис. 1.54 приведены диаграммы нагрузок и ускорений, возникших в процессе взаимодействия с ВУВ.

Действие отраженной волны вызвало кратковременное сопротивление конструкций, выразившееся в задержке начала движения. После чего по мере продвижения фронта волны по поверхности модели конструкции смещались, совершая колебания. С большей скоростью перемещались «гибкие» внешние стены обстройки, разрушенные в течение первого периода.

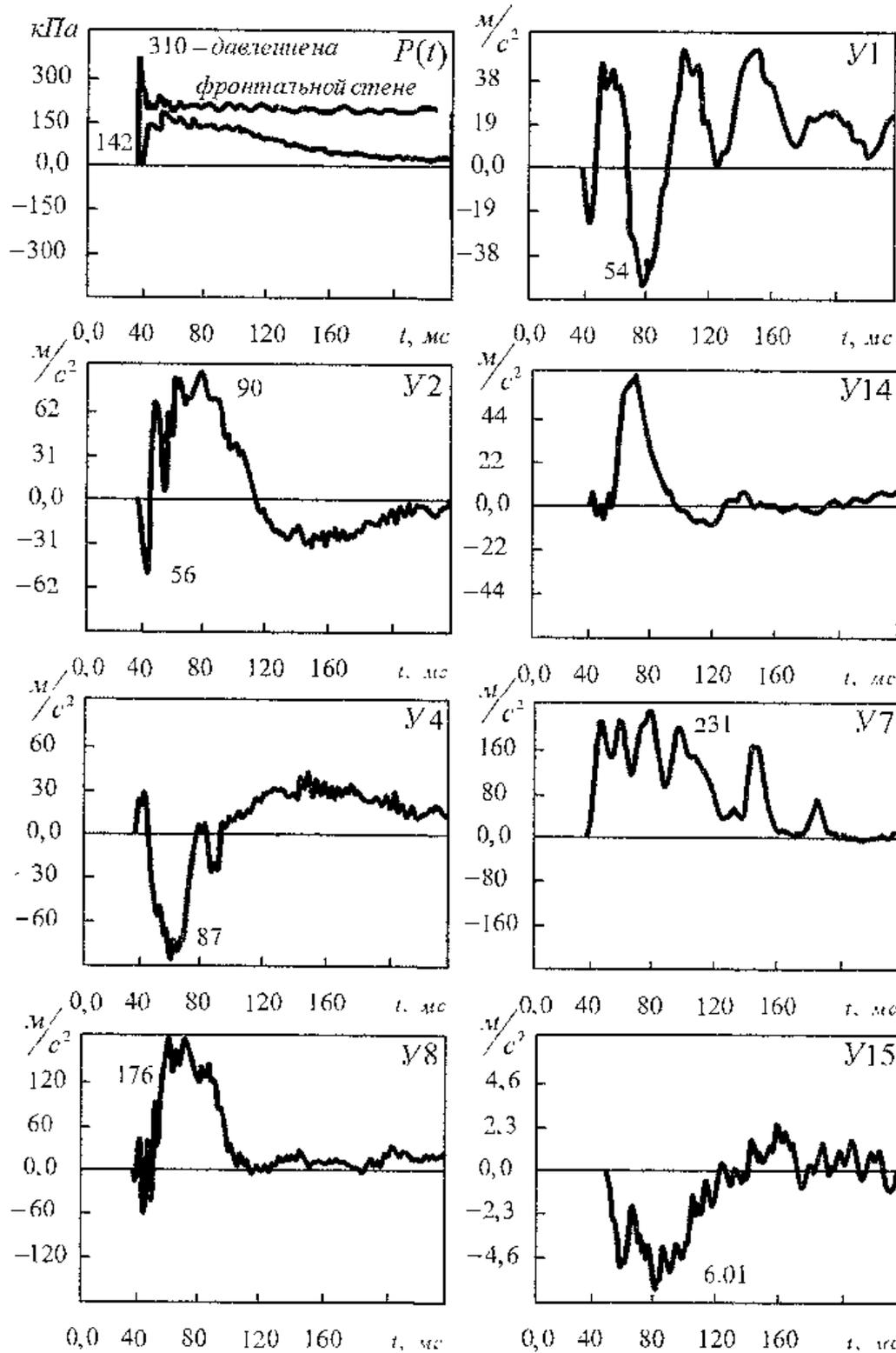


Рис. 1.54. Акселерограммы конструкций модели при действии разрушающей нагрузки от ВУВ с давлением на фронте  $\Delta P_\phi = 142$  кПа

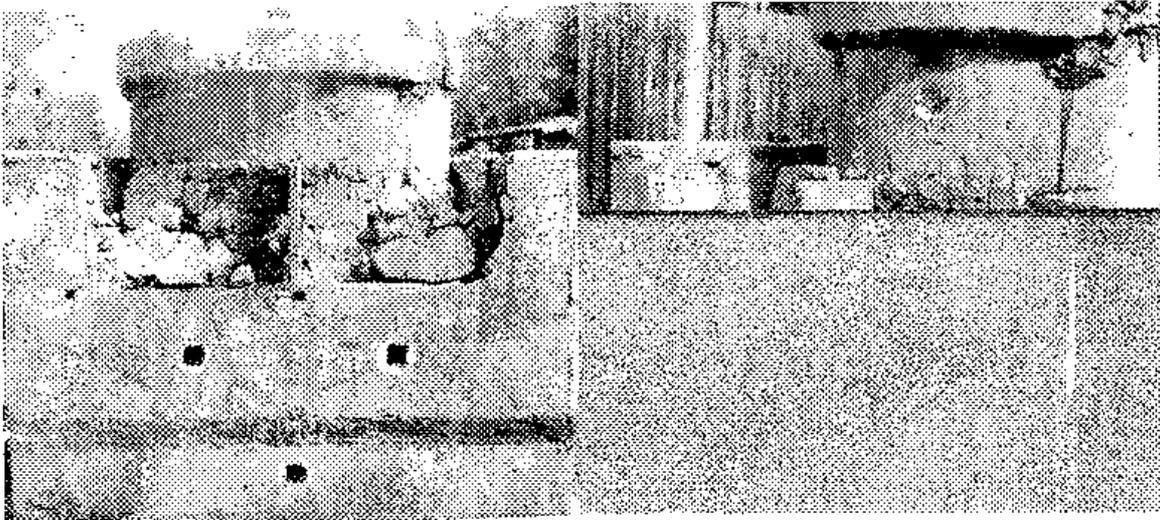


Рис. 1.55. Разрушение фронтальной стены обстройки,  $\Delta P_{\phi}=142$  кПа

Действие волны вызвало разрушение фронтальной стены обстройки первой модели и необратимые деформации других конструкций модели. В частности, появление трещины по месту сопряжения фундаментного блока с опорной плитой и трещины на внешних стенах обстройки. Оболочка повреждений не получила. Разрушения второй модели включали появление трещины по месту сопряжения фундаментного блока с опорной плитой. Появились трещины на внешних стенах обстройки и наклонные трещины на боковых поверхностях цилиндрической части оболочки. Наклонные и нормальные трещины появились в межэтажных плитах и в вертикальных подкрепляющих стенах. Общий вид разрушений первой модели показан на рис. 1.55.

#### **1.3.2.3. Деформации модели при последовательном действии воздушной ударной волны от двух взрывов**

Исследования упругих железобетонных моделей на действие двух последовательно действующих взрывных нагрузок показали, что в зависимости от задержки последующей ударной волны и в результате ее действия изменялись фор-

мы колебаний и амплитудные значения смещений и перегрузок. Результаты сопоставлены с опытными данными при однократном нагружении. Показано, что после действия нагрузки от первого взрыва конструкция находилась в состоянии движения, и к моменту прихода фронта следующей волны направление этого движения могло совпадать с направлением ударной волны или быть ему противоположным. Совпадение направлений движущейся конструкции и действующей нагрузки приводило к значительным увеличениям амплитуд перемещений. При движении конструкции навстречу действующей нагрузке значительно возрастали ускорения, причем в большей степени для более податливых ее элементов — внешних стен обстройки. Впрочем, в каждом конкретном случае резонансы конструктивных элементов или модели в целом определялись соотношением их динамических свойств с параметрами нагрузки, включая скорость движения и градиент давления на фронте ВУВ.

Перенося полученные результаты на условия реального взрыва, заметим, что и в этом случае на сооружение действует две группы волн, включая сейсмозрывную и воздушную ударные волны. Причем, за некоторым исключением, сейсмозрывная волна всегда опережает воздушную, и это опережение определяется плотностью грунта, ориентацией и расстоянием от места взрыва (см. гл. 1.1). Таким образом, при наземном взрыве последовательность нагрузок включает возбуждение сооружения через основание сейсмозрывной волной и последующим действием ВУВ. Как и в случае, отмеченном выше, при действии сдвоенной ВУВ амплитуды смещений и перегрузок конструкций строительного объекта определяются сдвигом фазы его колебаний по отношению к действующей на данный момент нагрузке, включая сейсмозрывную волну [3, 12].

Для сравнения результатов испытаний, полученных при одиночном взрыве и при последовательном действии двух

взрывов, рассмотрим диаграммы нагрузок и соответствующих им акселерограмм и деформаций.

При действии однократной нагрузки давление на фронте волны составило  $\Delta P_\phi = 51$  кПа. Действие двосинной нагрузки представлено в виде последовательности опережающей волны с давлением на фронте  $\Delta P_{\phi_1} = 14$  кПа и последующей волны с давлением на фронте  $\Delta P_{\phi_2} = 51$  кПа, т.е.  $\Delta P_\phi = (\Delta P_1 = 14 \text{ кПа} + \Delta P_2 = 51 \text{ кПа})$ . Диаграммы нагрузок показаны на рис. 1.56.

Движение средней части фронтальной стены (У) при однократном нагружении началось с некоторой задержкой,

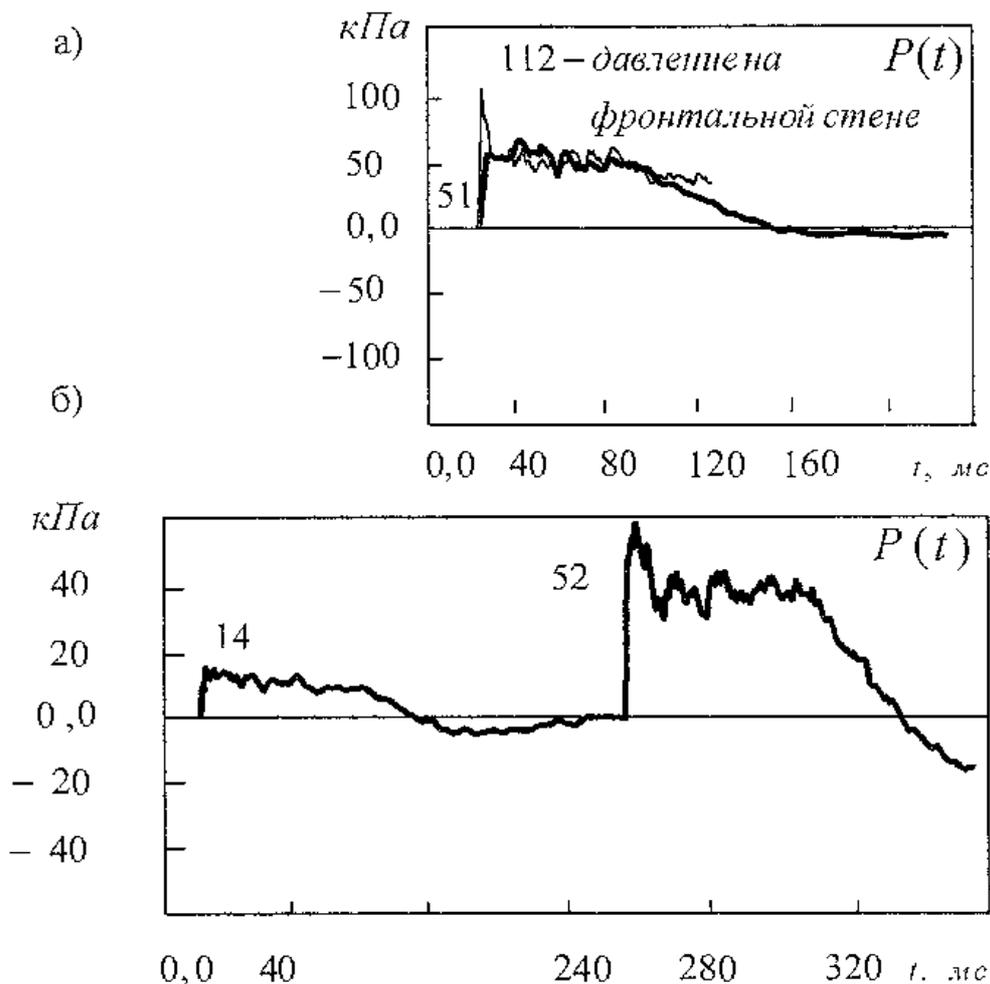


Рис. 1.56. Диаграммы  $P(t)$  при одиночном нагружении (а) и при последовательном действии двух взрывов (б)

соизмеримой с продолжительностью действия отраженной волны (рис. 1.57 а). Наибольшие ускорения возникли в первой фазе колебаний и достигли  $55 \text{ м/с}^2$ . При двойном нагружении действие упрещающей нагрузки вызвало движение конструкций модели, и к приходу фронта последующей волны средняя часть фронтальной стены обстройки находилась в противофазе по отношению к нагрузке, что вызвало значительные перегрузки ( $117 \text{ м/с}^2$ ), в два с лишним раза большие, чем при однократной нагрузке (рис. 1.57 б).

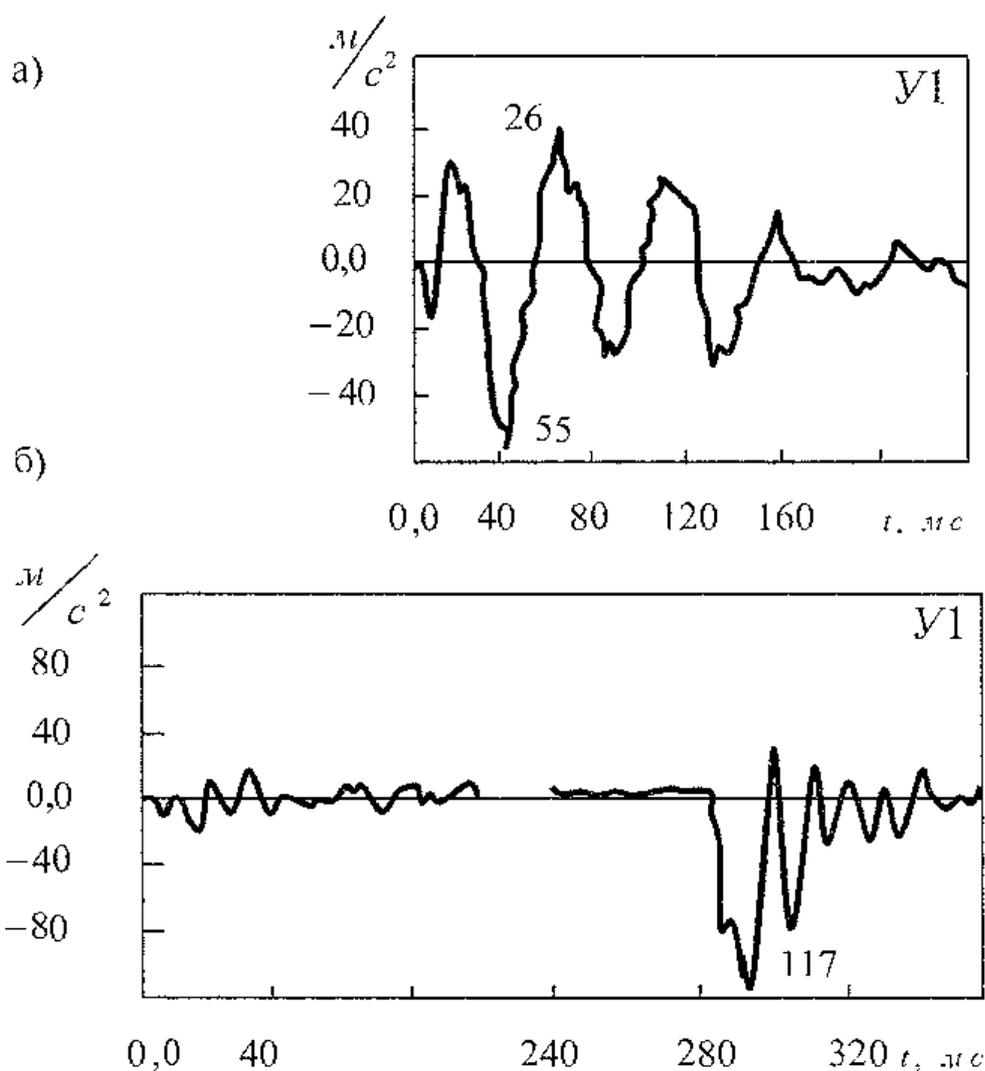


Рис. 1.57. Акселерограммы средней части фронтальной стены: а) при действии однократной нагрузки; б) при последовательном действии двух взрывов

Диаграммы ускорений внутренней ограждающей стены, которая расположена на первом этаже фронтальной части обстройки, показаны на рис. 1.58. Повторное воздействие пришлось на окончание второго полупериода колебания стены (У4) в противофазе к нагрузке, что вызвало значительные увеличения перегрузок. Причем на колебания собственно стены наложился низкочастотный формы движения обстройки.

Наибольшие ускорения во всех опытах на однократные нагрузки возникали в конструкции верхнего обреза фронт-

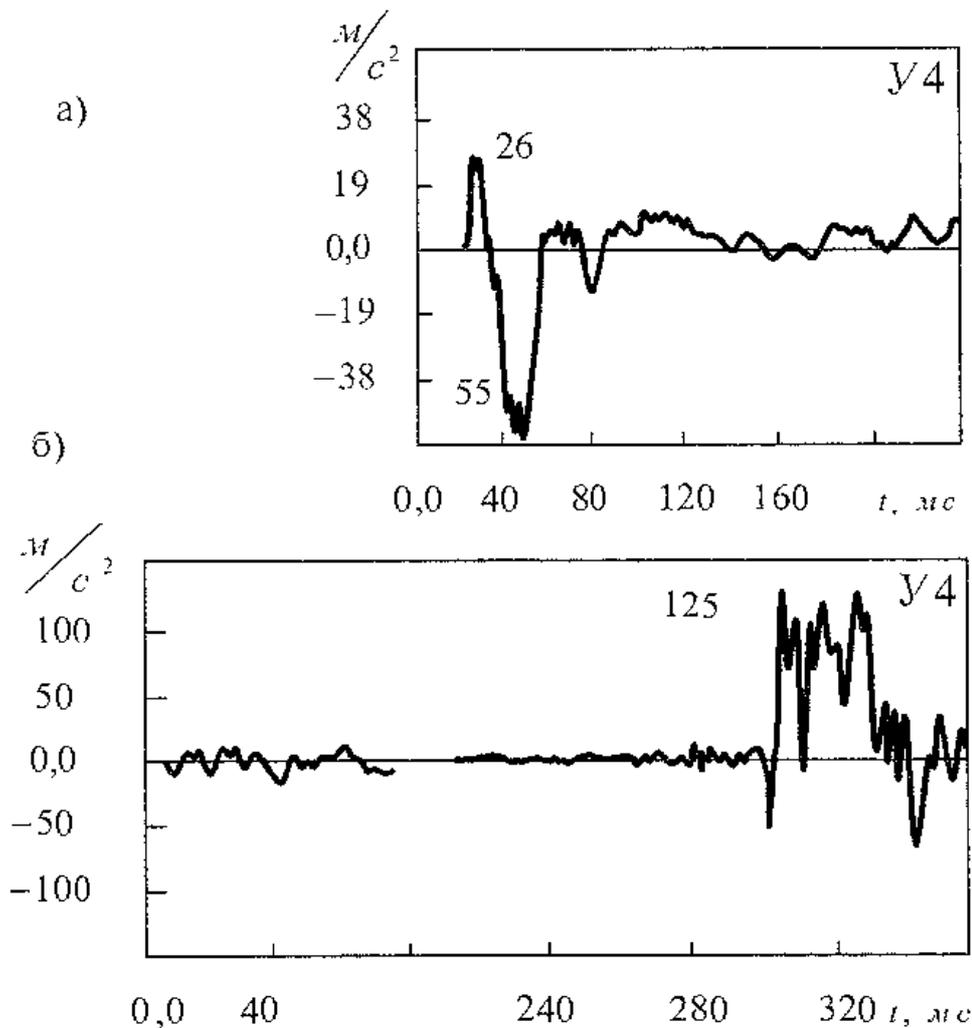


Рис. 1.58. Акселерограммы внутренней стены обстройки: а) при действии однократной нагрузки; б) при последовательном действии двух взрывов

тальной стены обстройки (У8) (см. также п. 1.58). Акселерограммы при однократном и двойном воздействиях показаны на рис. 1.59.

На момент соприкосновения повторной нагрузки с поверхностью стены конструкция заканчивала движение во втором полупериоде, из-за чего перемещения от действия повторной нагрузки имели большие значения, а возникшие перегрузки увеличились не так значительно, как для ограждающих конструкций на рис. 1.57, 1.58.

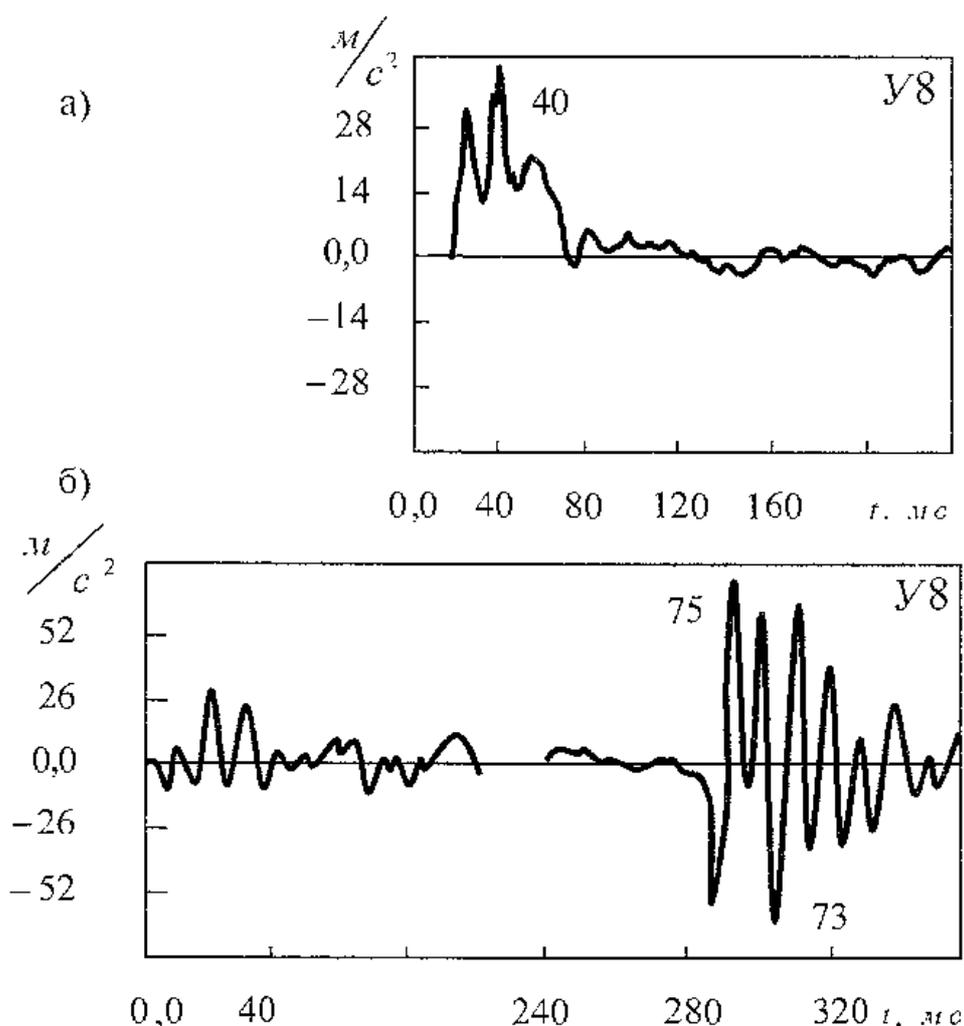


Рис. 1.59. Акселерограммы верхнего обреза фронтальной стены обстройки: а) при действии однократной нагрузки; б) при последовательном действии двух нагрузок двух взрывов

### 1.3.3. Динамика модели, заглубленной в грунт

Задачи по определению прочности и деформаций пространственных железобетонных конструкций, помещенных в деформируемую среду, при действии динамических нагрузок имеют некоторые особенности. Влияние стесняющей среды может быть определено расчетом. В связи с этим возникает необходимость формулировки граничных условий, уточняющих расчетную схему. Ниже рассматриваются результаты испытаний двух моделей реакторного отделения, заглубленных в песчаный грунт, на действие воздушной ударной волны.

#### 1.3.3.1. Динамика упругой модели, заглубленной в песчаную среду

Схема расстановки приборов, используемая при наземных испытаниях, была дополнена установкой преобразователей скоростей на подошву опорной плиты. Это позволило определить параметры движения опорной плиты, взаимодействующей с песчаным основанием (рис. 1.60).

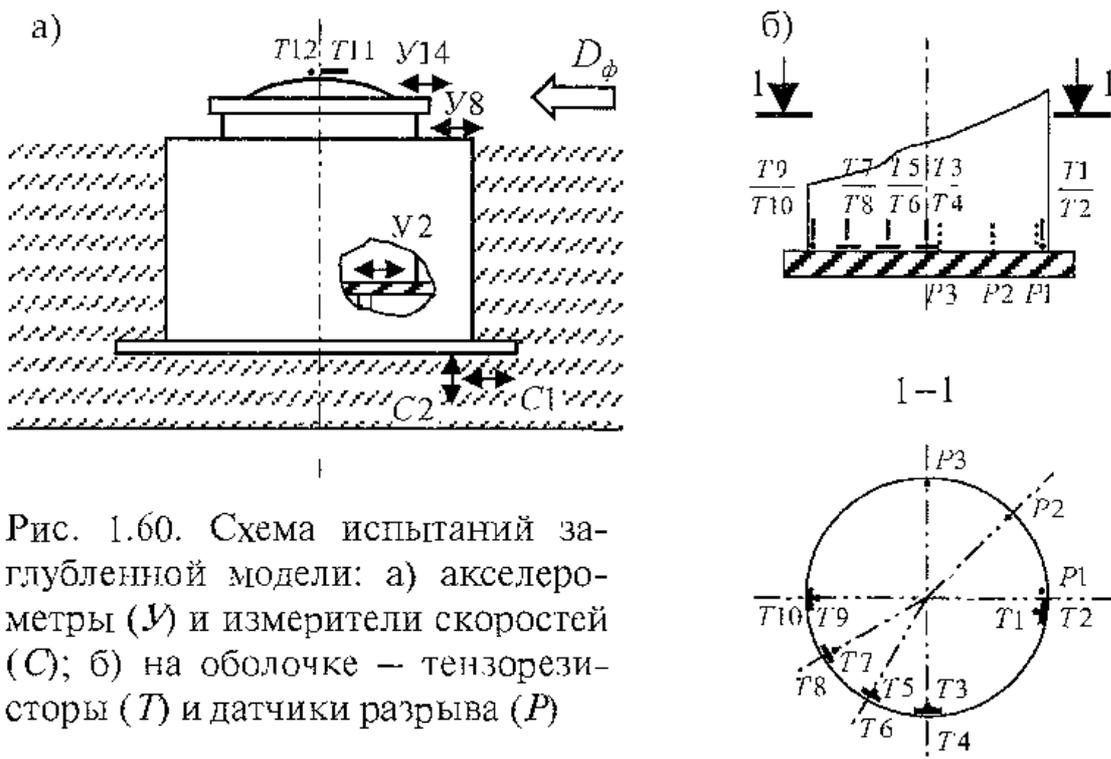


Рис. 1.60. Схема испытаний заглубленной модели: а) акселерометры ( $Y$ ) и измерители скоростей ( $C$ ); б) на оболочке — тензорезисторы ( $T$ ) и датчики разрыва ( $P$ )

Для регистрации кинематических параметров были проведены измерения ускорений ( $У$ ) и скоростей ( $С$ ). Относительные деформации измерялись в основании цилиндрической оболочки ( $T$ ). Для регистрации возможной трещины по месту сопряжения цилиндрической оболочки с опорной плитой были расположены датчики разрыва ( $P$ ).

При подготовке к испытаниям модели устанавливались на песчаное основание в приемке, после чего проводилась их засыпка с послойным уплотнением песка. Готовые к испытаниям модели на две трети высоты были заглублены в песчаный грунт. Деформации конструкций при  $\Delta P_{\phi} = 55$  кПа происходили в пределах упругой работы материала. На рис. 1.61–1.64 показаны диаграммы нагрузок и ускорений, скоростей перемещения фундаментальной плиты, относительных деформаций бетонной поверхности и соответствующие им акселерограммы.

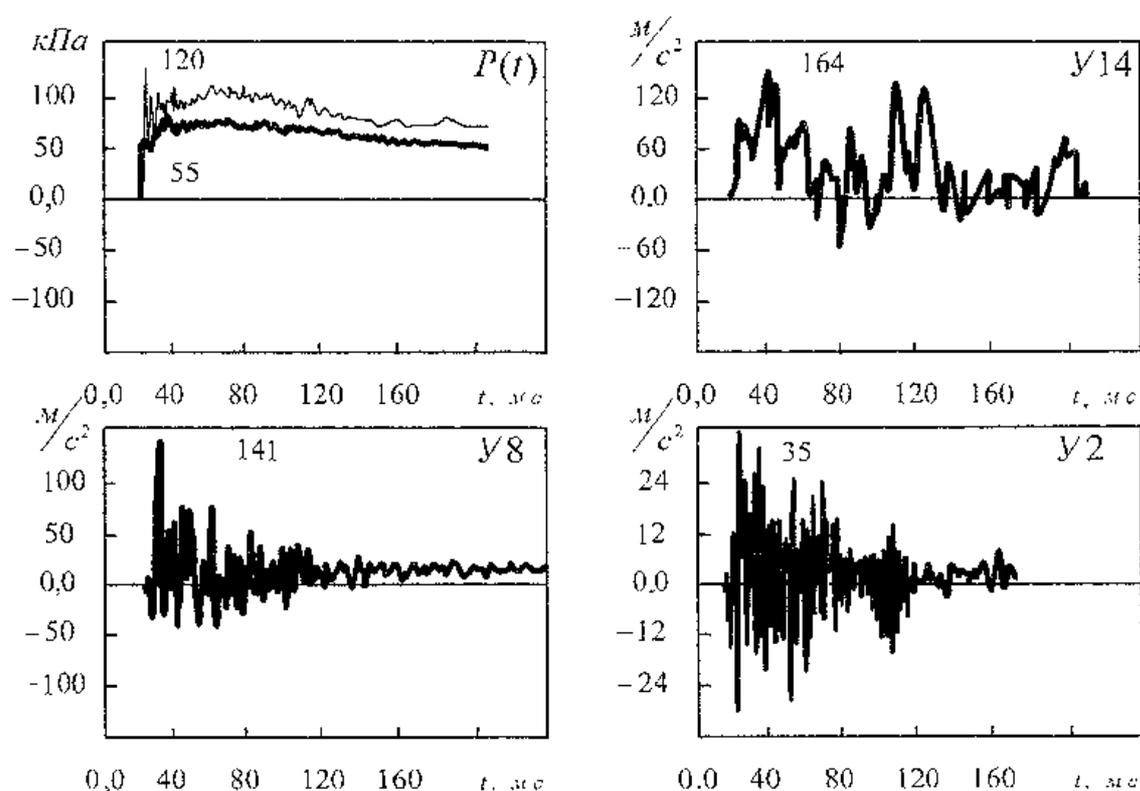


Рис. 1.61. Диаграммы нагрузки и ускорений при  $\Delta P_{\phi} = 55$  кПа

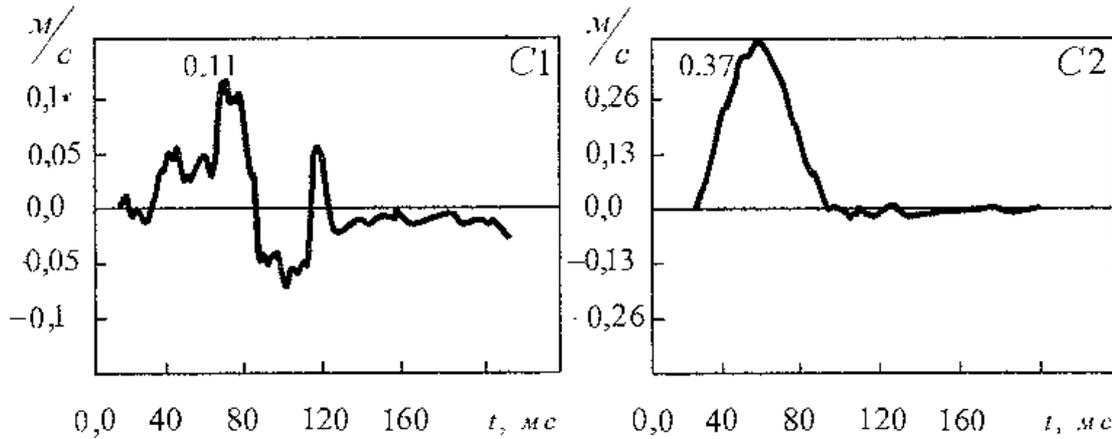


Рис. 1.62. Диаграммы скорости перемещения фундаментной плиты

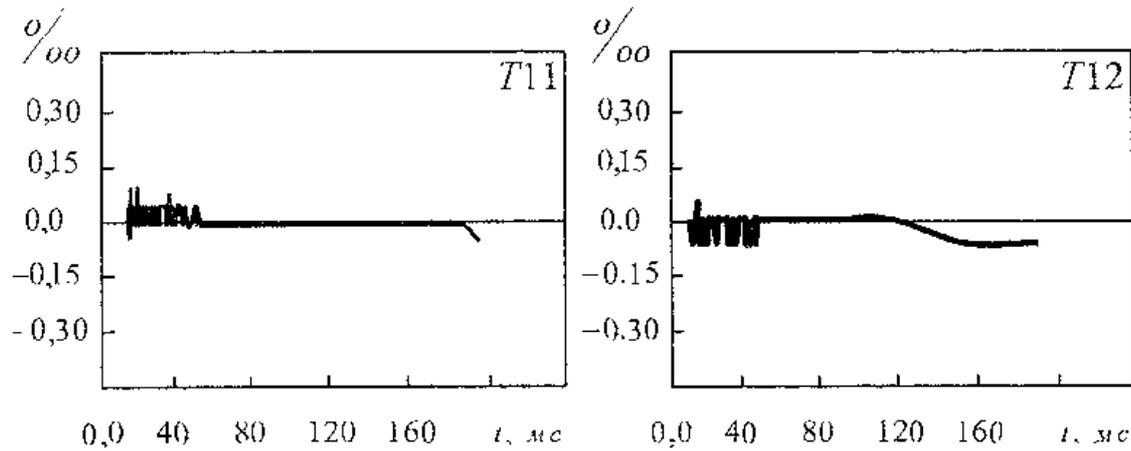


Рис. 1.63. Диаграммы относительных деформаций бетонной поверхности в зенитной точке купола при  $\Delta P_{\phi} = 55$  кПа

### 1.3.3.2. Уруго-пластические деформации и разрушение модели, заглубленной в песчаную среду

Рассмотрим результаты экспериментов, в которых конструкции моделей получили необратимые деформации и разрушения. Разрушение первой модели проведено при  $\Delta P_{\phi} = 220$  кПа. Давление в отраженной волне достигло 760 кПа, продолжительность отраженной волны составила 7 мс. Продолжительность фазы сжатия  $\tau_{\text{сж}} = 320$  мс, фазы разряжения —  $\tau_{\text{рз}} = 350$  мс. Разрушение второй модели про-

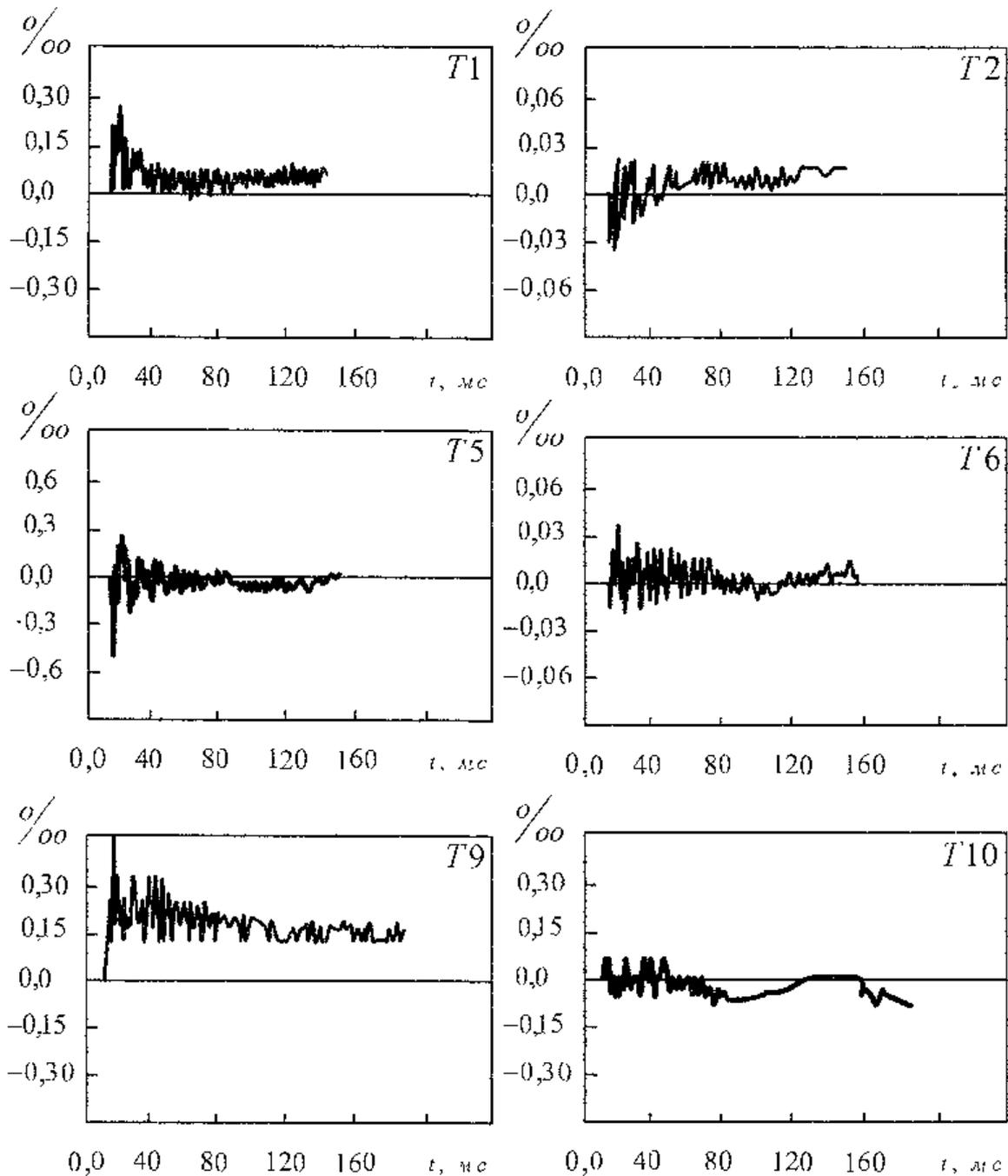


Рис. 1.64. Диаграммы относительных деформаций бетонной поверхности цилиндрической оболочки при  $\Delta P_{\phi} = 55$  кПа

ведено ударной волной с давлением на фронте  $\Delta P_{\phi} = 280$  кПа. Давление в отраженной волне  $\Delta P_{отр} = 790$  кПа, продолжительность отраженной волны  $t = 7$  мс. Продолжительность фазы сжатия  $\tau_{+} = 340$  мс, фазы разряжения —  $\tau_{-} = 350$  мс.

Диаграмма давления при испытании первой модели в проходящей ВУВ и отраженной волны на лобовой поверхности цилиндра показана на рис. 1.65. Движение конструкции обстройки началось с меньшей временной задержкой и с большим градиентом, чем у открытой модели. Песчаная среда препятствовала раскачиванию модели. Максимальные смещения произошли за первый период колебаний, в первой его фазе (У8). Колебания оболочки (У14), возбужденные кинематическим смещением ее основания (У2), начались со смещения оболочки в сторону набегающей волны. Сопоставление акселерограмм на рис. 1.65 и диаграмм скоростей на рис. 1.66 указывает на то, что движение модели в грунте началось без временной задержки. Передаваемое давление на грунт через опорную плиту было синхронно показаниям преобразователей скоростей. Верти-

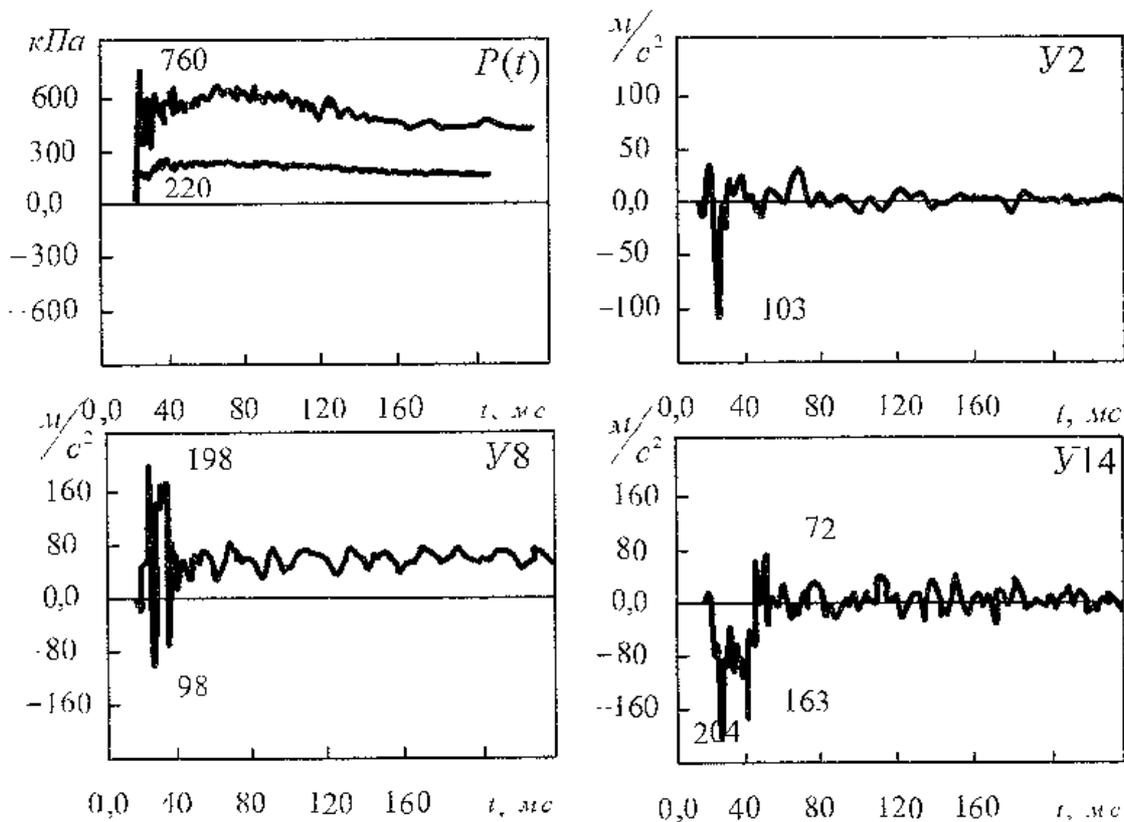


Рис. 1.65. Диаграммы нагрузки и ускорений при  $\Delta P_{\phi} = 280 \text{ кПа}$

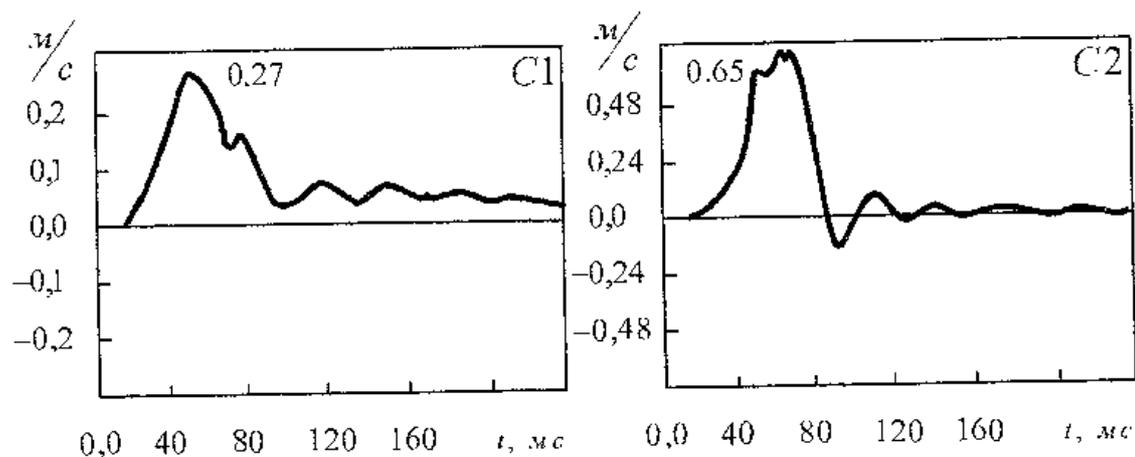


Рис. 1.66. Диаграммы скорости перемещения фундаментной плиты

кальные скорости и перемещения плиты были большими по сравнению с горизонтальными смещениями. Колебания имели быстрозатухающий характер. На рис. 1.66 показаны диаграммы скоростей в период активного деформирования конструкции в стадии квазистационарного обтекания. Заметим, что действие волны разряжения вызвало соизмеримые скорости смещений, хотя величины их были незначительными.

Относительные деформации основания оболочки представлены диаграммами на рис. 1.67. В процессе разрушения оболочки возникла кольцевая трещина по месту сопряжения цилиндра с опорной плитой. Предельные деформации тензорезисторов ( $T1$ ,  $T2$ ) над трещиной не превысили  $0,6\%$ .

Разрушение сжатой зоны цилиндрической оболочки произошло от сдвига в течение  $100$  мс — это время, соизмеримое с продолжительностью первого периода собственных колебаний. Последовательность разрушения кольцевого сечения вблизи заделки оболочки в опорную плиту определялась посредством датчиков разрыва ( $P$ ), установленных согласно схеме, показанной на рис. 1.60. Время

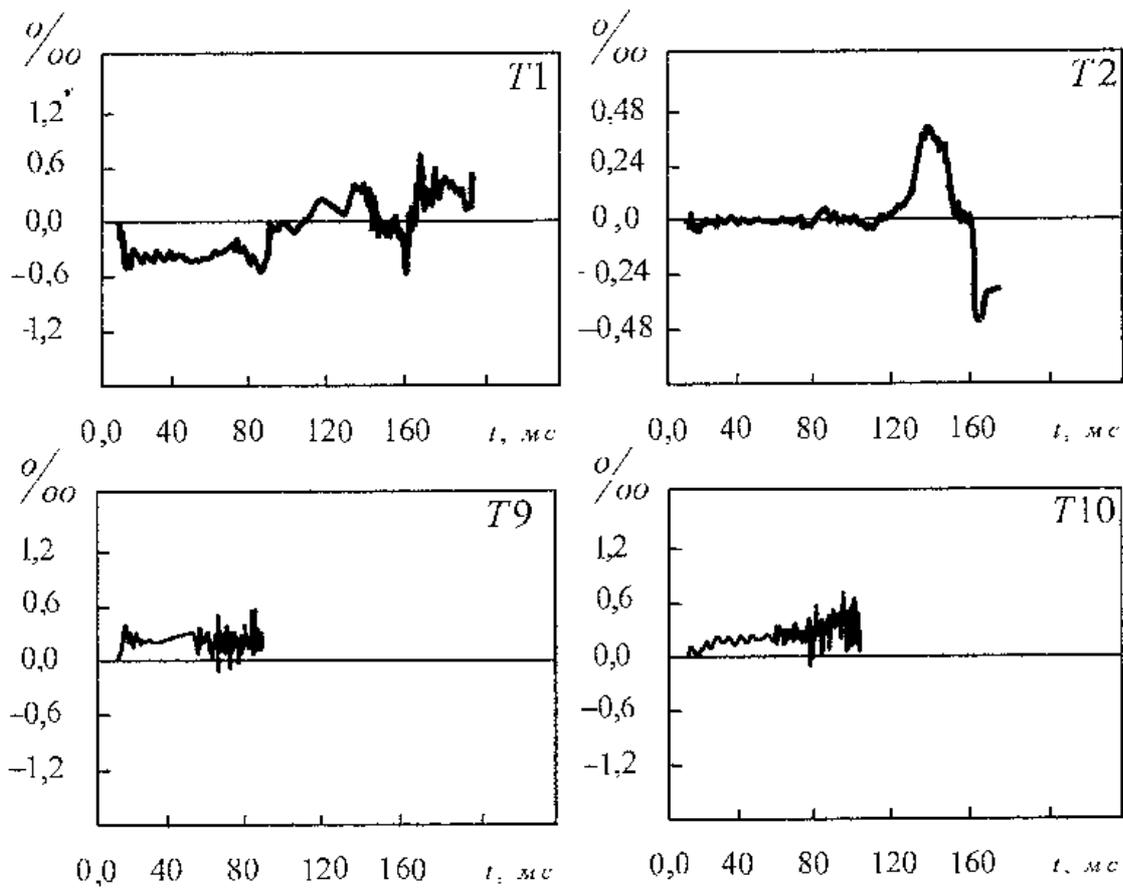


Рис. 1.67. Диаграммы относительных деформаций бетонной поверхности цилиндрической оболочки при  $\Delta P_{\phi} = 220$  кПа

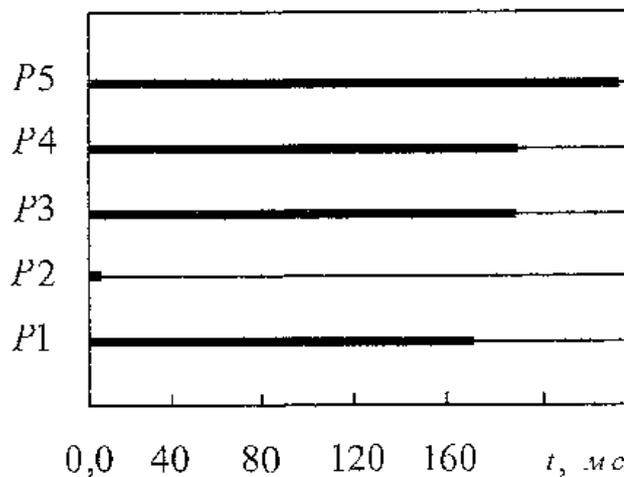


Рис. 1.68. Последовательность срабатывания датчиков разрыва

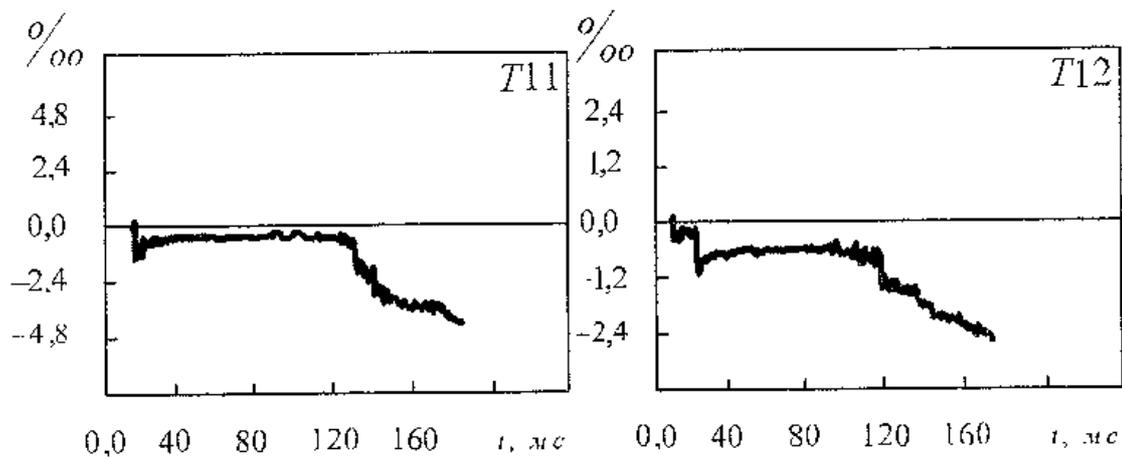


Рис. 1.69. Диаграммы относительных деформаций бетонной поверхности в зенитной точке купола при  $\Delta P_{\phi} = 55$  кПа

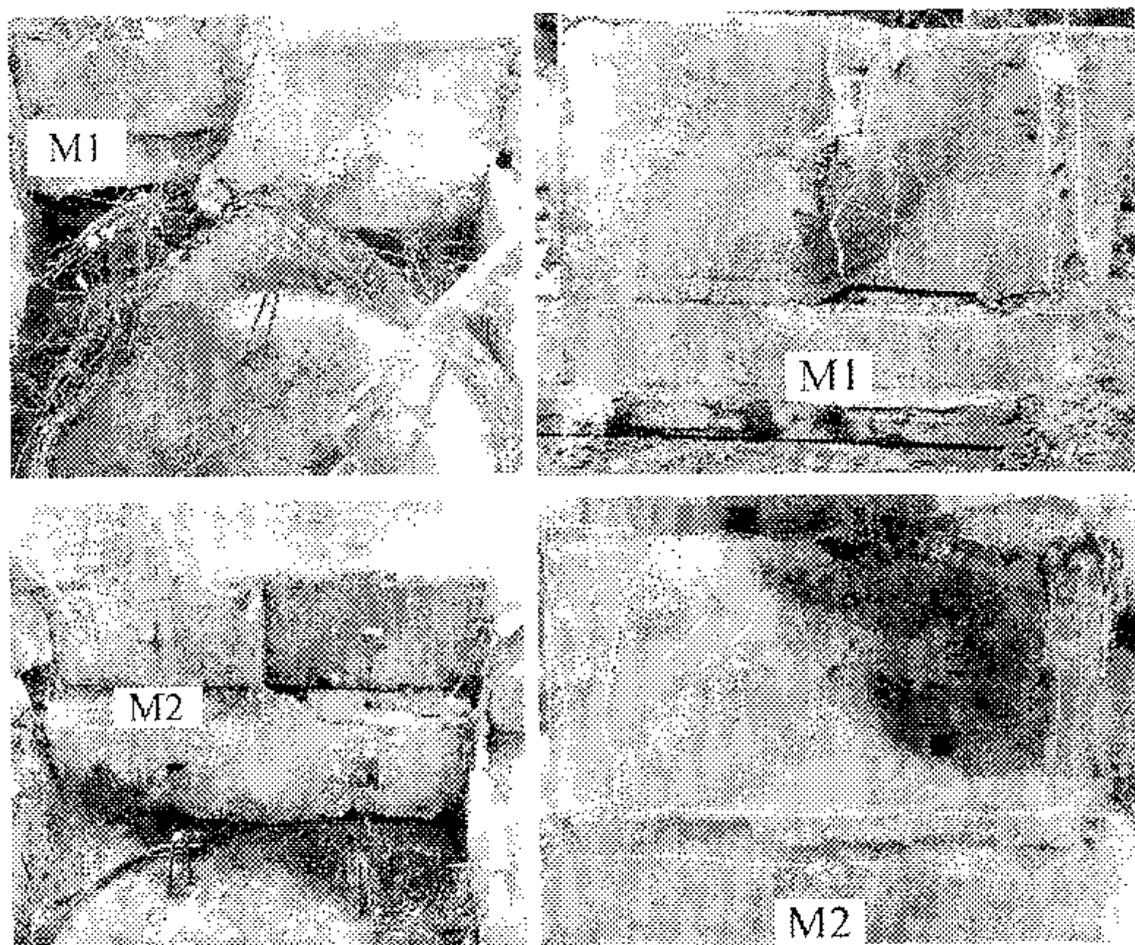


Рис. 1.70. Модели M1 и M2 после разрушения в песчаном грунте

разрыва датчиков сопоставлено на рис. 1.68, из которого видно, что полное разрушение оболочки произошло за 240 мс.

Купол, как и цилиндр оболочки, был полностью разрушен. На рис. 1.69 относительные деформации поверхности купола в зенитной его точке при разрушении достигли 4,2‰.

Разрушенные модели показаны на рис. 1.70.

## ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 1

1. *Аванесов М.П., Бондаренко В.М., Римшин В.И.* Теория силового сопротивления железобетона. / Под ред. В.М. Бондаренко / Алт. гос. техн. ун-т им. И.И. Ползунова. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 1996. – 169 с.
2. *Аварии и катастрофы.* Предупреждение и ликвидация последствий: Учебное пособие в трех книгах. Книга 1 / Под ред. К.Е. Кочеткова, В.А. Котляревского, А.В. Забегаева и др. – М.: Издательство АСВ, 1995. – 320 с.
3. *Боданский М.Л., Горшков Л.М., Морозов В.И., Расторгуев Б.С.* Расчет конструкций убежищ. – М.: Стройиздат, 1974. – 266 с.
4. *Брод Г.Л.* Действие ядерного взрыва // Механика. – М.: Мир, 1971. – С. 45.
5. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. – М.: Наука, 1976. – 416 с.
6. *Динамический расчет сооружений на специальные воздействия:* Справочник проектировщика. – М.: Стройиздат, 1981. – 215 с.
7. *Карпенко Н.И.* Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
8. *Копаница Д.Г.* Эквивалентные нагрузки от волн взрыва в расчете пространственных сооружений // Вестник ТГАСУ. – 2000. – №2. – С. 137–147.

9. *Котляревский В.А.* Исследование модели мейзинг-типа в динамических расчетах железобетонных конструкций // Динамика железобетонных конструкций и сооружений при интенсивных кратковременных воздействиях: Сб. науч. тр. / Моск. инж.-строит. ин-т. им. В.В. Куйбышева. – МИСИ, 1992. – С. 50–53.
10. *Котляревский В.А., Ганушкин В.И., Костин А.А. и др.* Убежища гражданской обороны: Конструкции и расчет. – М.: Стройиздат, 1989. – 606 с.
11. *Кумляк О.Г., Копаница Д.Г.* Собственные колебания реакторного отделения атомной электростанции в деформируемой среде // Сборник материалов международной научно-практической конференции «Строительные конструкции XXI века»: Часть I. «Строительные конструкции. Строительная механика и испытание сооружений» / Моск. гос. ун-т. – М., 2000. – С. 225–226.
12. *Негматуллаев С.Х., Золотарев А.И.* Системы активной сейсмозащиты зданий и сооружений и возможности их экспериментального исследования на полигоне «Ляур». – Душанбе: Дониш, 1986. – 80 с.
13. *Окамото Ш.* Сейсмостойкость инженерных сооружений: Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1980. – 342 с.
14. *Попов Н.Н.* Современное состояние и перспективы развития динамики железобетонных конструкций // Динамика железобетонных конструкций и сооружений при интенсивных кратковременных воздействиях: Сб. науч. тр. / Моск. инж.-строит. ин-т. им. В.В. Куйбышева – МИСИ, 1992. – С. 7–18.
15. *Попов Н.Н., Копаница Д.Г.* Работа замкнутой железобетонной оболочки вращения при внешнем воздействии воздушной ударной волны. – М., 1985. – Рукопись представлена МИСИ. Деп. в ВНИИИС, №20/1090, 11 с.
16. *Попов Н.Н., Кумляк О.Г., Плевков В.С.* Вопросы динамического расчета железобетонных конструкций. – Томск: Изд-во ТГУ, 1990. – 288 с.

17. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. — Изд. 9-е, перераб. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
18. *Сорокин Е.С.* Динамический расчет несущих конструкций зданий. — М.: Госстройиздат, 1956. — 340 с.
19. *Такэда М., Кавамура Т.* Бахукацу ни ёру тэккин конкурито кодзобуцу но хэнкэй, хакай но тэйрётэки ёсаку // Когё-кайку кёкайсю. — 1985. — Т. 46. — №4. — С. 182–194.
20. *Bruce I.R., Lindberg H.E., Abrahamson G.R.* Simulation of Strong Earthquake Motion with Contained Explosiv Line Source Arrays // Proc. Sec, U.S. National Conf. On Earthg. Eng., California. — 1979. — P. 1134–1143.

## ГЛАВА 2

# РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ БЕТОНА, АРМАТУРЫ И ЖЕЛЕЗОБЕТОНА С ТРЕЩИНАМИ

### Введение

Исследования пространственных железобетонных конструкций на действие нестационарных нагрузок, как правило, связаны с большим объемом экспериментальных работ и расчетов. Это, в свою очередь, приводит к необходимости составления адекватных расчетных схем, в которых с наибольшими приближениями отражается геометрия исследуемого объекта, картина нагрузок, а также моделируются физические свойства материалов.

Результаты, полученные при испытаниях железобетонных замкнутых оболочек вращения на действие внешней воздушной ударной волны (ВУВ) показали, что в процессе движения скорости деформаций сжатия достигали величин  $1,56 \text{ с}^{-1}$ , для растянутых волокон –  $0,74 \text{ с}^{-1}$ . При этом предельные деформации бетона сжатого сечения при разрушении конструкции достигли  $4,30\%$  [40]. Повышенная деформативность и прочность железобетона при скоростном нагружении объясняется запаздыванием неупругих деформаций, наибольшие значения которых не превышали предельных статических. Это подтверждают и исследования, проведенные при однократном динамическом действии нагрузки на неармированных бетонных призмах, где показано, что предельные деформации  $2,0\%$  возникли при скорости деформирования  $0,2 \text{ с}^{-1}$  [75, 79].

В современной практике расчета железобетонных конструкций широко используются диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$  бетона и арматуры, что позволяет учесть основные закономерности работы материалов и, как следствие, иметь представление о напряженно-деформированном состоянии сечений на всех стадиях работы конструкции. Одно из основных направлений развития современных методов расчетов железобетонных конструкций основано на использовании диаграмм деформирования  $\sigma$ – $\varepsilon$  бетона и арматуры. Методы динамического расчета железобетонных конструкций за пределом упругости в основном базируются на идеализированных схемах жесткопластического или упругопластического материала, а в случае высокопрочной арматуры – на моделях нелинейно деформируемых систем [37].

Совершенствование методов расчета железобетонных элементов на основе структурно-реологических моделей деформирования бетона за счет полного учета параметров и особенностей деформирования бетона позволяет получить достоверные решения и выявить резервы для эффективного использования материалов. При этом, несмотря на множество предлагаемых моделей бетона, описывающих процессы, происходящие на микроуровне, с учетом физико-химических процессов, не удастся построить единую модель, адекватно отражающую деформирование бетона на всех уровнях и при различных видах нагрузок, зависящих от времени [70].

Получившие в последнее время развитие методы расчета, основанные на использовании уравнений механики сплошной среды, допускают значительные упрощения, основанные на гипотезе о сплошности, являющейся не столько физической, сколько математической, поскольку она позволяет представлять деформации непрерывными функциями координат. В связи с непрерывностью деформаций непрерывными становятся и перемещения. Физические соотношения для железобетона как нелинейного ани-

зотропного тела с приобретаемой в процессе деформирования анизотропией, а также заимствованные из теории упругости дифференциальные уравнения равновесия, геометрические уравнения и граничные условия составляют полную систему определяющих уравнений механики железобетона, которые затем преобразуются в разрешающие уравнения [27]. Невозможность построения единой математической модели, отражающей все особенности деформирования железобетона, приводит к необходимости отыскания частных решений, развивающих и совершенствующих теорию сопротивления железобетона [8], что, в свою очередь, приводит к необходимости проведения исследований, уточняющих напряженно-деформированные состояния бетона и арматуры, представленные графическими зависимостями в виде диаграмм  $\sigma$ – $\varepsilon$  [28, 44, 47].

## 2.1. Арматурная сталь

Проблема расчета железобетонных конструкций с учетом образования трещин в бетоне и развития значительных пластических деформаций в арматуре актуальна и связана с решением ряда задач. В частности, с задачей сопротивления арматурного стержня в трещине продольным, поперечным силам и изгибу.

Диаграмма деформирования для сталей, чувствительных к режиму испытаний в зоне площадки текучести, может быть представлена в виде «условной» или «истинной». В первом случае напряжения на всех стадиях растяжения до разрыва стали определяют исходя из первоначальной площади поперечного сечения, во втором — выявляют «истинные» напряжения исходя из действительной площади поперечного сечения образца, изменяющейся в течение деформирования. Поскольку для арматурной стали в период ее работы в составе железобетонного элемента предельные деформации редко превышают 2‰, для расчета более

удобно использовать «условную» диаграмму растяжения. При решении специальных задач, когда необходимо выяснить полную несущую способность железобетонной конструкции, допускаются предельные деформации арматуры и даже ее разрыв. В этом случае используют «истинную» диаграмму с уточнениями, необходимыми для данной задачи.

Для практических расчетов диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$  арматурных сталей аппроксимируются криволинейными линиями и прямолинейными отрезками.

Различают диаграммы деформирования арматурной стали с физической площадкой текучести (стержневая – классов А-I, А-II, А-III) и без физической площадки текучести (класс А-IIIв, А-IV и выше и проволочная арматура).

Существует много вариантов для выражения зависимости между деформациями и напряжениями арматуры. Описать диаграмму одним уравнением в пределах от  $\sigma=0$  до  $\sigma=\sigma_u$  достаточно сложно в силу различных закономерностей между напряжениями и деформациями в стадии упругой, упругопластической и пластической работы арматуры. Поэтому для практических расчетов полные деформации арматуры представляют в виде суммы упругой и неупругой деформаций  $\varepsilon_s = \varepsilon_{se} + \varepsilon_{s,pl}$ .

С.А. Мадатян [45] зависимость между напряжениями и деформациями высокопрочной стержневой арматуры предложил в виде (рис. 2.1 а):

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E_s} + m \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_{02}} - \eta \right)^3, \quad (2.1)$$

$$\eta \sigma_{02} < \sigma \leq p \sigma_{02};$$

$$\eta = 1 - 2,7 \frac{\sigma_{02} - \sigma_{05}}{\sigma_{02}} \approx \frac{\sigma_{el}}{\sigma_{02}};$$

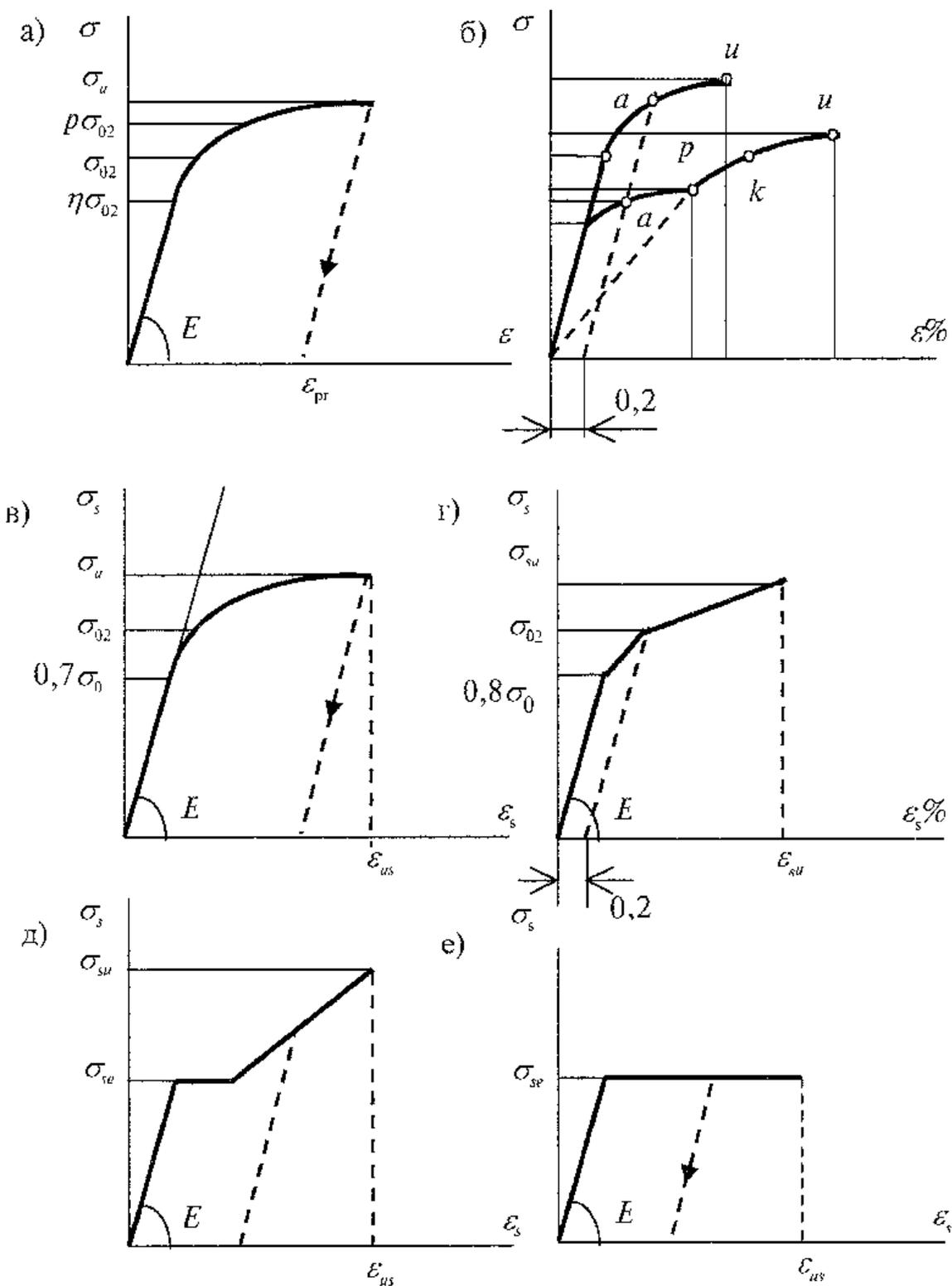


Рис. 2.1. Диаграммы  $\sigma_s - \epsilon_s$  при растяжении арматурной стали

$$\rho = 1,38 - 0,38\eta \approx \frac{\sigma_{05}}{\sigma_{02}};$$

$$m = \frac{0,002}{(1 - \eta)^3}; \rho\sigma_{02} - \sigma_u - \text{линейный участок,}$$

где  $m$  и  $\eta$  – коэффициенты, зависящие от марки арматурной стали и величины ее предварительного напряжения.

В практике расчета широко используется диаграмма растяжения арматуры с условным пределом текучести, в которой, по предложению Ю.П. Гуци [19, 20], зависимость  $\sigma$ – $\varepsilon$  представлена тремя участками. Если  $\sigma_s < 0,8\sigma_{02}$ , то напряжения и деформации определяются законом Гука. На участке  $0,8\sigma_{02} \leq \sigma_s \leq \sigma_{02}$  неупругие деформации арматуры описываются выражением:

$$\varepsilon_{p\ell} = \frac{0,35 + A\Delta\sigma_s}{175 - B\Delta\sigma_s}, \quad (2.2)$$

если  $\sigma_{02} \leq \sigma_s \leq \sigma_u$ :

$$\varepsilon_{p\ell} = 0,01 \frac{\sigma_s - 0,8\sigma_{02}}{\sigma_{02}},$$

здесь  $A$  и  $B$  – коэффициенты, зависящие от класса и марки арматурной стали;  $\Delta\sigma_s$  – превышение действующим напряжением условного предела текучести арматуры, отнесенное к величине последнего ( $\Delta\sigma_s = (\sigma_s - \sigma_{02})/\sigma_{02}$ ).

По предложению Н.И. Карпенко [28], зависимость между деформациями и напряжениями (рис. 2.1 б) определяется формулами:

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s \nu_s};$$

$$d\varepsilon_s = \frac{d\sigma_s}{E_s \nu_s^k}; \quad (2.3)$$

где  $\nu_s$  — коэффициент изменения секущего модуля;  $\nu_s^k$  — коэффициент изменения касательного модуля.

В международных рекомендациях диаграмма деформирования арматуры представлена в виде двух участков (рис. 2.1 в). На первом участке диаграммы — от нулевых напряжений до точки с координатой  $0,7\sigma_{02}$  — соблюдается закон Гука. На втором участке диаграмма дана в виде кривой линии:

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + 0,822 \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_{02}} - 0,7 \right)^5; \quad (2.4)$$

$$0,7\sigma_{02} \leq \sigma_s < \sigma_u.$$

В практических расчетах широко используются способы, в которых криволинейные участки диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$  заменяются прямыми отрезками. Если кривая заменяется двумя линейными отрезками, то первый отрезок строится от уровня предельного упругого напряжения  $\sigma_{se}$ , равного  $0,8\sigma_{02}$ , до условного предела текучести  $\sigma_{02}$ , а второй отрезок — от условного напряжения (рис. 2.1 г) или напряжения, равного некоторой величине  $\sigma_c$ , принятого по требованиям эксплуатации в пределах  $\sigma_{02} \leq \sigma_c \leq \sigma_u$ . Диаграмму деформаций стали с физическим пределом текучести, как правило, заменяют диаграммой, состоящей из трех прямых (рис. 2.1 д). Для расчета изгибаемых и внецентренно сжатых железобетонных элементов часто используется диаграмма Прандтля (рис. 2.1 е).

Полученные в режиме статических нагрузок диаграммы растяжения арматуры  $\sigma$ – $\varepsilon$  не всегда пригодны в расчетах на действие динамических нагрузок. Исследования механиче-

ских характеристик сталей при повышенных скоростях деформаций были начаты в конце XIX – начале XX вв. и нашли приложения в промышленности и в военном деле. Динамическая диаграмма  $\sigma$ – $\varepsilon$  обладает определенной чувствительностью к режиму испытаний [37, 38, 61, 77, 82]. Это особенно характерно для широко распространенных в строительстве средне- и малоуглеродистых сталей. Многочисленными исследованиями установлено, что при скоростном нагружении образцов из малоуглеродистой стали материал работает упруго до некоторого предела напряжений, называемого верхним динамическим пределом текучести. После чего напряжения резко снижаются и стабилизируются на некотором уровне, называемым нижним пределом текучести.

Верхний предел текучести проявляется при определенных условиях, связанных с чистотой обработки поверхности образца и центрированием растягивающего усилия. Поэтому в расчет, как правило, вводится нижний динамический предел текучести.

Скорость деформирования в меньшей степени влияет на прочностные свойства углеродистых и упрочненных сталей. Сравнение результатов экспериментов показывает, что для образцов из стали 35ГС, упрочненных вытяжкой, предел текучести, при скорости деформирования  $\dot{\varepsilon} = 0,1 \text{ с}^{-1}$  повысился на 10,5%, а у стали 35ГС без упрочнения – на 23%. При этом разница пределов текучести вытянутых и невытянутых образцов при статических испытаниях составила 151,0 МПа при динамических ( $\dot{\varepsilon} = 0,1 \text{ с}^{-1}$ ) – 104,8 МПа, что свидетельствует о достаточной эффективности механического упрочнения арматуры при ее работе в условиях повышенных скоростей деформирования.

Известные методы расчета, учитывающие динамические характеристики стали, обладающей свойством запаздывающей текучести, а также чувствительной в области площадок текучести к режиму испытаний, основаны на ре-

зультатах экспериментальных исследований [29, 37, 61, 77, 82]. Развитые на основе теории дислокаций начала динамического расчета, учитывающие эффект запаздывания [29, 37, 61], получили широкое распространение в практике расчета.

Предположение Коттрела о том, что механизм релаксации напряжений в металле определяется процессом «отрыва» дислокаций от облака примесных атомов, легло в основу механической модели среды с запаздывающей текучестью, предложенной Ю.Н. Работновым [63]. Согласно этой модели, время запаздывания текучести отождествляется со временем блокировки дислокации «облаком» примесных атомов и определяется из функционального равенства:

$$1 = \frac{1}{t_0^0} \int_0^{t_0} \varphi(\sigma_1, T) dt, \quad (2.5)$$

где  $t_0^0$  — нормирующая постоянная;  $t_0$  — время запаздывания;  $\varphi(\sigma_1, T)$  — функция напряжения и температуры, определяемая физикой явления. Выражение (2.5) широко используется для решения динамических задач. Квазистатическое деформирование стали рассмотрено Ю.Н. Работновым и Ю.В. Суворовой на основе представлений о наследственном поведении материала [62].

Время запаздывания текучести определялось из интегрального равенства (2.5), а закон деформирования задавался в виде:

$$\frac{\sigma_1}{E} = \alpha \varepsilon_1^p = \dot{\varepsilon}_1 t. \quad (2.6)$$

Дж. Кэмпбеллом проведены экспериментальные исследования коротких стержней из низкоуглеродистой стали (цилиндрические образцы диаметром 9,5 мм и длиной 12,7 мм) на сжатие при различных скоростях деформиро-

вания. Получены зависимости напряжений  $\sigma$ , от значения постоянных деформаций  $\varepsilon$ , при постоянной скорости деформаций. Значения скоростей деформаций изменялись в пределах от  $0,17 \cdot 10^{-3}$  до  $20 \text{ с}^{-1}$ . При более высоких скоростях деформации нарушается квазистатичность и становятся определяющими волновые эффекты. Значение скорости, равное  $0,17 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$  характерно для статической деформации образца. Результаты экспериментов показаны на рис. 2.2 [29].

Схема экспериментальной диаграммы  $\sigma$ — $\varepsilon$ , построенная на основании опытов Дж. Кемпбелла, показана на рис. 2.3.

Нормальные напряжения  $\sigma$ , МПа

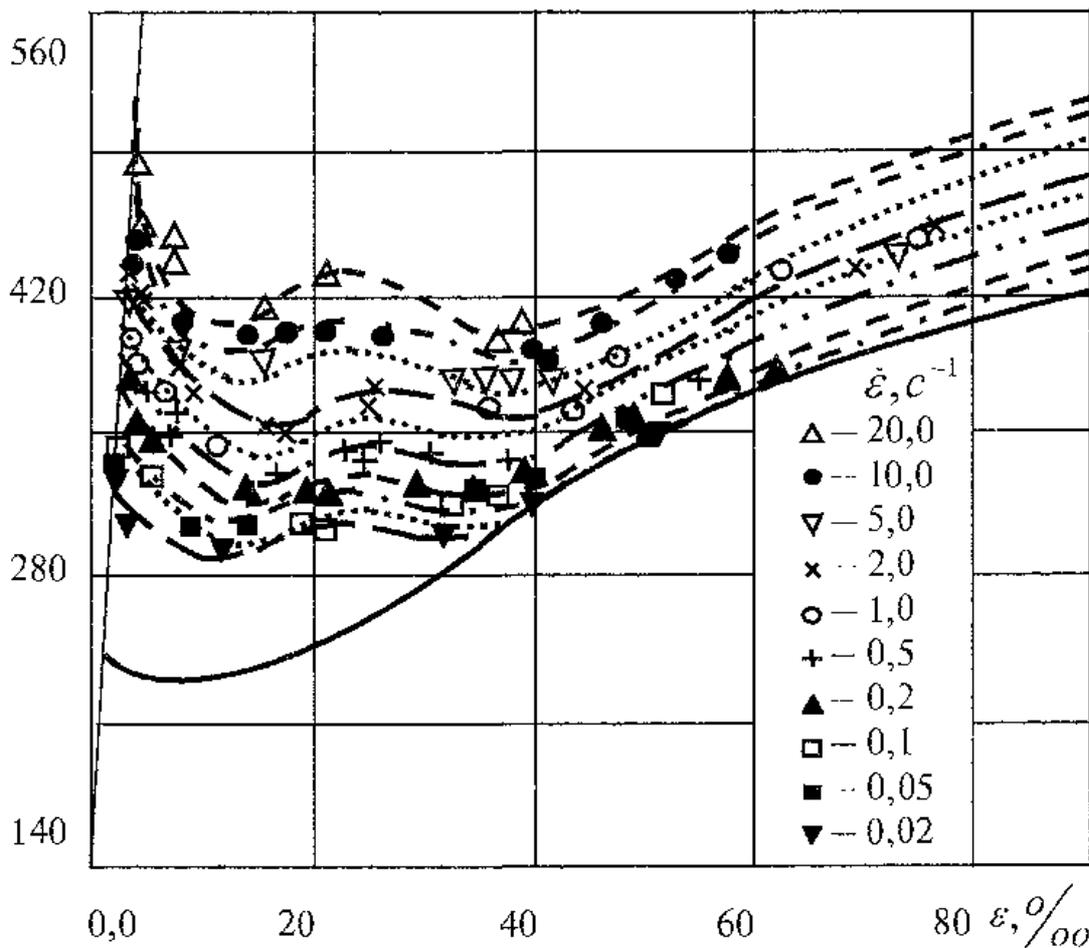


Рис. 2.2. Диаграммы деформирования малоуглеродистых сталей  $\sigma$ — $\varepsilon$  в режиме  $\dot{\varepsilon} = const$ : результаты экспериментов [29]

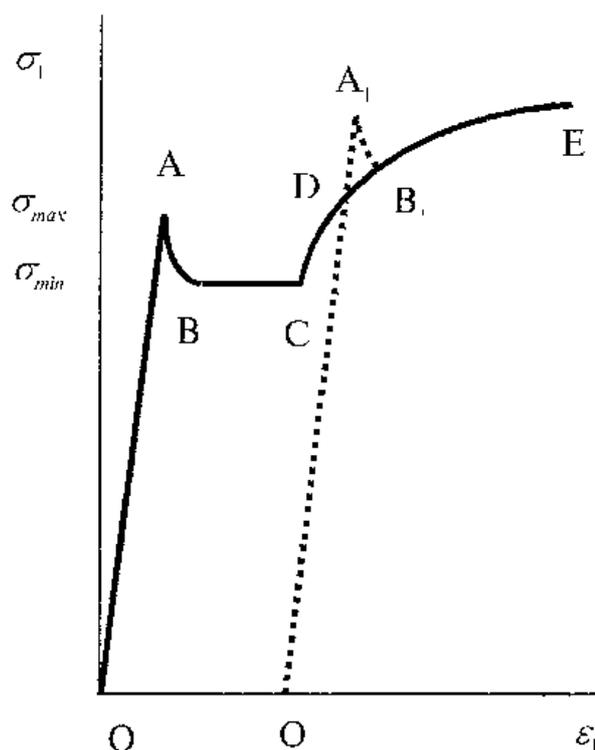


Рис. 2.3. Схема экспериментальной диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$  в режиме  $\varepsilon=const$  [46]

В процессе упругой деформации (участок OA) напряжения достигают верхнего предела. На этом этапе по данным микроструктурного анализа происходит накопление дефектов. На участке АВ происходит резкая релаксация напряжений до нижнего предела текучести. Этот участок (BC) характеризуется двумя механизмами — размножением и запиранием дислокаций. Как верхний, так и нижний пределы текучести зависят от скорости деформаций.

На участке CD происходит упрочнение стали, связанное с запиранием подвижных дислокаций, вследствие их чрезвычайно большой плотности ( $n \approx 10^{11} \text{ см}^{-2}$ ). На этой стадии могут преобладать и другие дислокационные механизмы упрочнения, связанные с образованием и ростом ячеистой структуры материала. Экспериментально показано, что если на участке CE разгрузить образец и выдержать его после разгрузки в течении некоторого времени, то при после-

дующем нагружении  $O_1DA_1B_1E_1$  появится повторный пик текучести  $A_1B_1$ .

Следуя [37], рассмотрим зависимость  $\sigma-\varepsilon$  (рис. 2.4), определяющую механические свойства арматурной стали в условиях динамического нагружения при нулевых начальных напряжениях, описываемую следующими соотношениями.

В упругой стадии (на линии  $O2$ , рис. 2.4), при условии  $A < t_0$ :

$$A = \int_0^t \left( \frac{\sigma(\xi)}{\sigma_-} \right)^\alpha d\xi, \quad (2.7)$$

где  $\sigma_-$  – статический предел текучести при  $t=+23^\circ\text{C}$ , сталь рассматривается как линейно-упругий материал, подчиняющийся закону Гука:

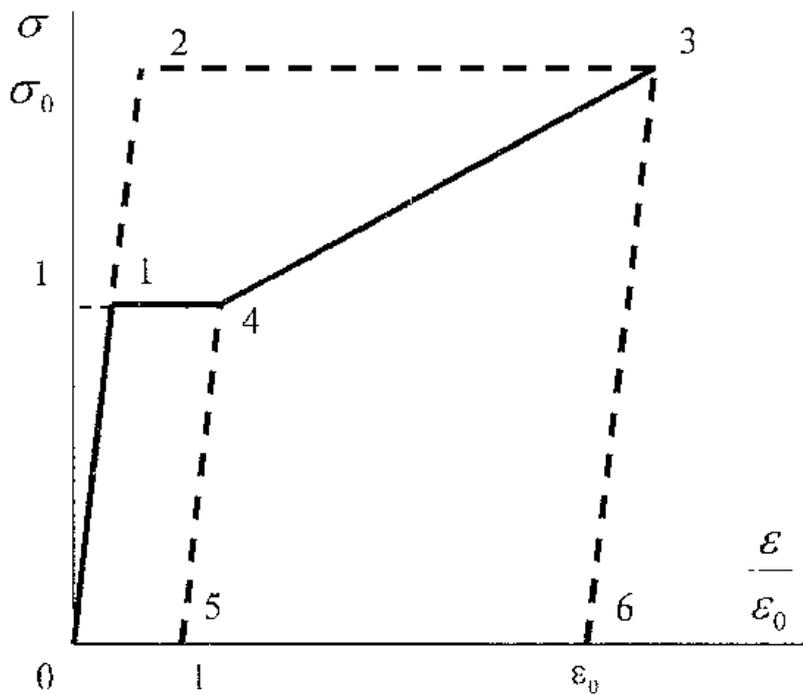


Рис. 2.4. Расчетная диаграмма деформирования  $\sigma-\varepsilon$  стали при динамическом нагружении [37]

$$\sigma = E\varepsilon^*.$$

В упругопластической стадии (область 1234) принимается закон деформирования [35]:

$$\frac{\sigma}{\sigma_-} = \begin{cases} \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{**}}{\beta\dot{\varepsilon}_*}\right)^\beta, & \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{**}}{\dot{\varepsilon}_*} \geq \beta\right) \\ 1, & \left(0 \leq \frac{\dot{\varepsilon}^{**}}{\dot{\varepsilon}_*} \leq \beta\right) \end{cases} \quad (2.8)$$

Закон динамического упрочнения (линия 43) принимается в виде:

$$\dot{\varepsilon}_* = \frac{\sigma_-}{\dot{\varepsilon}_0}, \quad \beta = \frac{1}{\alpha + 1},$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_-} = \nu \left(\frac{\varepsilon^{***}}{\varepsilon_0} - 1\right) + 1, \quad \left(1 \leq \frac{\varepsilon^{***}}{\varepsilon_0} \leq \varepsilon_0\right), \quad (2.9)$$

$\dot{\varepsilon}^{**}$  — постоянная скорость деформирования;  $\varepsilon^{***}$  — протяженность динамической площадки текучести, возникающей при скоростном деформировании.

Упругопластическая стадия, возникающая в момент  $\tau$ :

$$A(\tau) = t_0, \quad \sigma(\tau) \geq \sigma_-,$$

фиксируется условиями, ограничивающими область 1234:

$$A > t_0, \quad \sigma > \sigma_-, \quad B < B^*, \quad (2.10)$$

где  $B$  и  $B^*$  соответствуют деформациям, определяемым, согласно (2.6), (2.7), по формулам:

$$B = \varepsilon^{**} = \beta \varepsilon_* \int_{\tau} \left( \frac{\sigma(\xi)}{\sigma_-} \right)^{\alpha+1} d\xi, \quad (2.11)$$

$$B^* = \varepsilon^{***} = \frac{\varepsilon_0}{\nu} \left( \frac{\sigma}{\sigma_-} + \nu - 1 \right),$$

здесь  $\nu$  – безразмерный модуль динамического упрочнения стали.

Выражение (2.9) известно как критерий Дж. Кемпбелла, устанавливающий значение динамического предела текучести  $\sigma(\tau)$ , превышающего статический. Результаты исследований, принятые Дж. Кемпбеллом в качестве обоснования критерия, приведены на рис. 2.2. Стадия упрочнения возникает в момент:

$$B(\theta) = B^*(\theta). \quad (2.12)$$

Активная деформация (на линии 43) определяется условиями

$$B > B^*, \sigma > \sigma_-, \sigma > 0. \quad (2.13)$$

Разгрузка ( $\sigma < 0$ ) с уровня  $\sigma$  (линия 14) в области 0145 ( $A > t_0, \sigma < \sigma_-, B < \varepsilon_0$ ) и с линии упрочнения 43 в области 5436 ( $B > B^*, \sigma > \varepsilon_0$ ), а также повторное нагружение в этих областях дается соотношениями закона Гука:

$$\sigma = E \varepsilon^* \quad (2.14)$$

и

$$\varepsilon^{**} = \varepsilon^{***} = 0. \quad (2.15)$$

Упругопластическая деформация определяется по формулам:

$$\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon^{**}, \quad (2.16)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon^{***}. \quad (2.17)$$

Закон упрочнения (2.8) ограничен предельно допустимой деформацией  $\varepsilon^*$ ,  $\varepsilon_0$ . Предполагается, что появление неоднородности деформации, характеризуемой началом образования шейки, находится вне пределов возможных значений  $\varepsilon^*$ ,  $\varepsilon_0$ . Это условие, наряду с использованием закона деформирования (2.7), описывающего безразлично деформирующийся материал, устанавливает невозможность перехода в область неустойчивого деформирования.

Выделение неупругих деформаций материала способствует более детальному анализу необратимых деформаций, позволяет в более простой форме учесть скорость нагружения, а также обозначить области активного скольжения как части объема тела, в которых происходят неупругие процессы, и величины которых зависят от скорости деформирования. В качестве вязко-упругой модели может быть принята двухэлементная модель Максвелла или Фойгта или схема с большим количеством элементов.

В.А. Кузьменко [38] предложил двойственную модель твердого деформируемого тела, учитывающую хрупкие и пластические свойства материала. В обоих элементах двойственной модели могут возникать всевозможные виды элементарных деформаций: растяжение, сжатие и сдвиг. В силу специфики элементов двойственной модели возможны различия в характере напряженного состояния каждого из элементов, что позволяет непротиворечиво отобразить тенденции формоизменения нагружаемого твердого тела.

Диаграмма деформирования при скорости  $\sigma_1$  принята в виде ряда:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} + \sum_1^n b_n \sigma_1^{2n+1}. \quad (2.18)$$

При этом работа деформирования выражена как:

$$A_p = \frac{\sigma_1^2}{2E} + \sum_1^n \frac{(2n+1)b_n}{2(n+1)} \sigma_1^{2n+1}. \quad (2.19)$$

После преобразований, учитывая, что:

$$\varepsilon_1 = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial A_p}{\partial \sigma_1} \cdot \frac{1}{\sigma_1} d\sigma_1, \quad (2.20)$$

приближенное значение относительных деформаций принято:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \frac{(h-1)(\alpha h^{1/\alpha} - \alpha - \ln h)}{\alpha(h^{1/\alpha} - 1)(h-1 - \ln h)} \sum_1^n b_n \sigma_1^{2n+1}. \quad (2.21)$$

Основываясь на диаграмме, полученной экспериментально, были проведены расчеты при заданной скорости нагружения  $\sigma_1$ .

Результаты расчета сопоставлены с результатами опытов, проведенных А. Надаи [51]. Для различных скоростей нагружения растянутого стального образца, чувствительного к режиму испытаний, по формуле (2.21) построены диаграммы, показанные на рис. 2.5. За исходную принята кривая, обозначенная цифрой 1. Она использована для аппроксимации выражения (2.18), и на ее основе рассчитаны коэффициенты  $b_n$  в (2.21). Аппроксимация (2.18) проводилась двучленными выражениями типа:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + k\sigma_1^{2n+1}, \quad (2.22)$$

поэтому в таком же виде получились по выражению (2.21) окончательные расчетные соотношения для кривых, показанных на рис. 2.5. Значения всех коэффициентов даны в табл. 2.1. Хорошее совпадение расчета с экспериментом (точки на кривых) показало, что рассмотренная схема деформирования удовлетворительно отражает влияние скорости нагружения.

Прочность и деформативность низкоуглеродистой стали при сдвиге зависят от многих факторов, основными из ко-

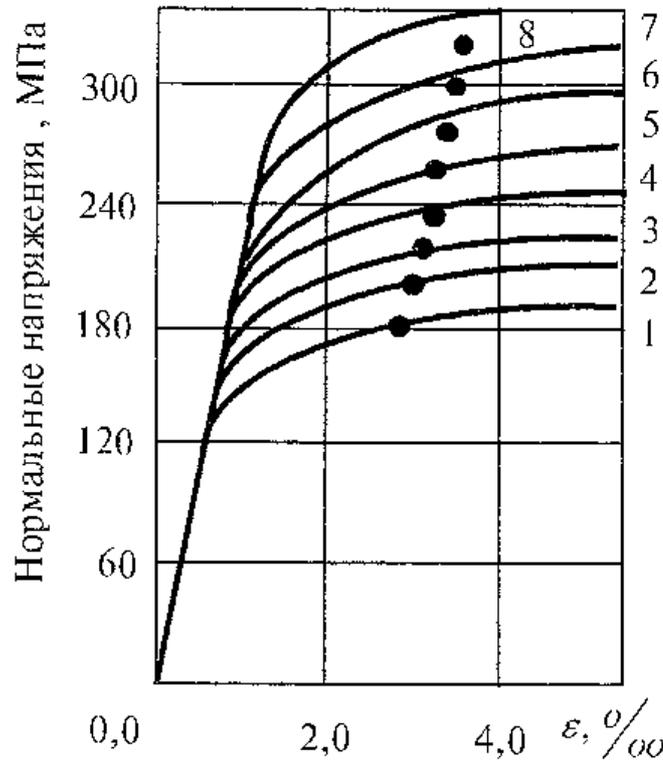


Рис. 2.5. Влияние скорости нагружения на диаграмму деформирования стали: расчет – кривые [38]; опыт – точки [51]

Таблица 2.1. Значения коэффициентов для формулы 2.21

Мягкая сталь, $E=2,18 \cdot 10^5$ МПа, $n=13$ , $h=1,5$		
кривая	$\dot{\sigma}_1$ , МПа/с	$k \cdot 10^{22}$
1	21,5	961,0
2	70,0	296,0
3	21,17	93,5
4	700,0	26,8
5	2150,0	8,44
6	6866,7	2,57
7	21500,0	0,810
8	65833,3	0,253

торых являются физико-химические свойства, форма исследуемого образца, условия крепления и скорость его нагружения или деформирования.

В ряде работ программы испытаний низкоуглеродистых сталей реализуются с трубчатыми тонкостенными образцами. Образцы подвергаются кручению с постоянной скоростью деформирования. При испытаниях тонкостенных труб на кручение исключаются эффекты поперечной инерции, что значительно снижает погрешности, присутствующие при испытании стержней. На рис. 2.6 изображены диаграммы «напряжение сдвига ( $\tau$ ) – угол сдвига ( $\gamma$ )». Кривая 1 получена в процессе статической деформации при скорости закручивания  $\dot{\gamma} = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ; кривые 2 построены по результатам экспериментов, в которых скорость закручивания на разных стадиях упрочнения менялась скачком до значения  $\dot{\gamma} = 10^3 \text{ с}^{-1}$  [46]. Трансформации диаграмм деформирования в зависимости от истории нагружения образца свидетельствуют о снижении чувствительности стали к скорости деформации после предварительной статической деформации.

В практических расчетах железобетонных конструкций на кратковременные динамические нагрузки обычно исхо-

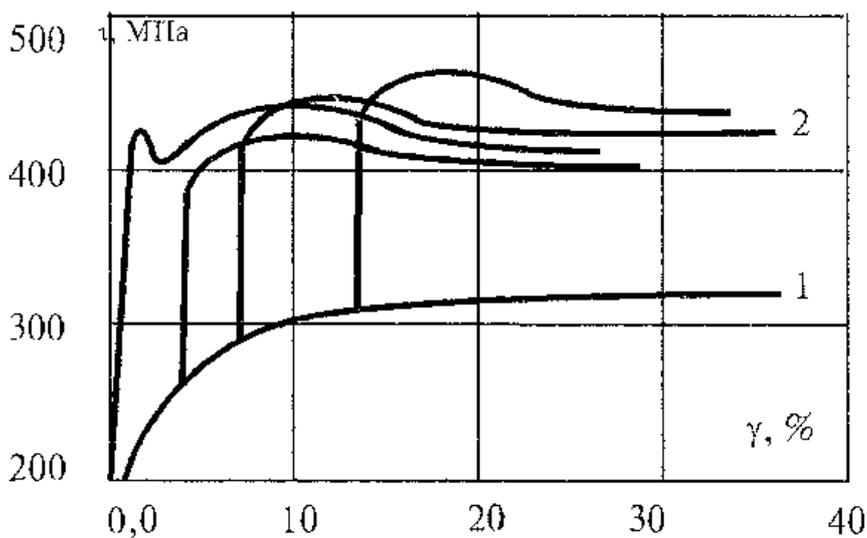


Рис. 2.6. Диаграммы  $\tau$ – $\gamma$ , касательные напряжения – угол сдвига: 1– $\dot{\gamma} = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ; 2– $\dot{\gamma} = 10^3 \text{ с}^{-1}$  [46]

дят из допущения, что общий характер диаграмм деформирования стали при медленном и быстром нагружении в основном сохраняется [36].

Предел текучести находят умножением статического предела текучести на коэффициент упрочнения арматуры, определенный в зависимости от скорости деформирования и класса арматуры (рис. 2.7). Скорость деформирования конструкции под действием нагрузки изменяется во времени. Для использования эмпирических зависимостей, полученных при постоянных скоростях деформирования, учитывают малое влияние на характеристики сталей закона изменения  $\varepsilon_s(t)$  и значения скорости деформирования. При этом скорость деформирования арматурного стержня принимают как среднюю за период ее упругой работы:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{R_{s,d}}{E_s \tau}, \quad (2.23)$$

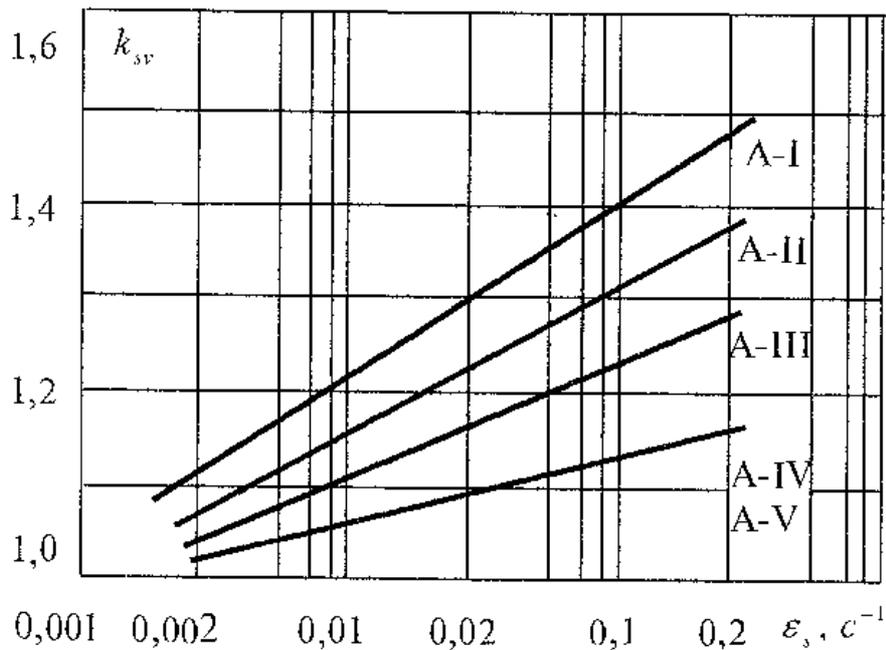


Рис. 2.7. Зависимость коэффициента упрочнения арматурной стали от скорости деформации и класса арматуры [60]

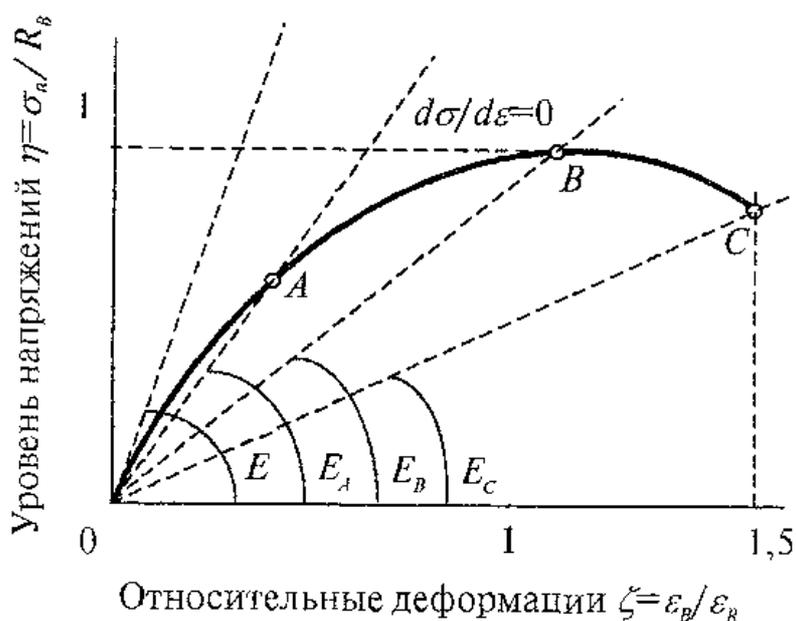
здесь  $R_{s,d} = K_{v,s} R_s$  — динамический предел текучести стали при растяжении;  $K_{v,s}$  — коэффициент динамического упрочнения;  $R_s$  — статический предел текучести стали;  $\tau$  — время упругого деформирования, определяемое из решения дифференциального уравнения. По формуле (2.23) вычисляют скорость деформирования и по графику (рис. 2.5) определяют коэффициент динамичности  $K_{v,s}$ .

## 2.2. Бетон

Физическая модель бетона при кратковременном действии нагрузки характеризуется быстронарастающими деформациями ползучести и представляется нелинейными зависимостями  $\sigma$ — $\varepsilon$  между напряжениями и деформациями. Диаграммы  $\sigma$ — $\varepsilon$ , полученные при одноосном сжатии—растяжении непосредственно используются в расчетах железобетонных конструкций.

Опыты показали, что деформации бетона при одноосном сжатии, изгибе и всестороннем сжатии существенно отличаются друг от друга. При этом характер нарастания деформаций под влиянием нагрузки зависит от способа ее приложения и продолжительности ее действия, от температурно-влажностного состояния среды, от формы и размера образца и ряда других факторов.

На диаграмме  $\sigma$ — $\varepsilon$  бетона принято выделять три основных стадии работы: 1 — упрочнение (кривая  $OA$  на рис. 2.8), 2 — разупрочнение (кривая  $AB$  на рис. 2.8), 3 — разрушение (кривая  $BC$  на рис. 2.8). Сначала действующая нагрузка не нарушает сплошности испытываемого образца. Структура бетона уплотняется, что соответствует упругим деформациям и деформациям линейной ползучести. С увеличением нагрузки, при некотором напряжении в бетоне, равном  $R_{кр}^p$ , возникают микроскопические трещины отрыва и нарушается сплошность образца. При увеличении напряжений до уровня  $R_{кр}^v$  происходит развитие микротрещин, что

Рис. 2.8. Общий вид диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$  бетона [39]

приводит к разупрочнению бетона. В этой стадии кривизна диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$  бетона возрастает как следствие появления пластических деформаций. При напряжениях, больших  $R_{срс}^v$ , в бетоне развиваются пластические деформации, связанные с образованием поверхностей разрыва и разрушением образца.

Обычно выделяют два режима испытаний: при постоянной скорости деформаций образца и при постоянной скорости напряжений. За эталонную принимают экспериментальную диаграмму деформирования бетона  $\sigma$ – $\varepsilon$  при постоянной скорости деформирования  $d\varepsilon/dt = const$ . Увеличение нагрузки наблюдается до некоторой величины, после чего на кривой  $\sigma$ – $\varepsilon$  нарастание деформаций сопровождается падением напряжений, что отражается ниспадающей ветвью на диаграмме.

По результатам многочисленных опытов предложено достаточное количество аналитических выражений, отражающих напряженно-деформированное состояние сжатого или растянутого бетона [27, 28, 47, 52]. Известны предложения В.Н. Байкова, В.М. Бондаренко, А.А. Гвоздева,

К.З. Галустова, Н.Ф. Давыдова, Н.И. Карпенко, Г. Краутаммера, Г.В. Леонтьева, В.С. Мартемьянова, Г.В. Марчукайтиса, В.М. Митасова, В.Г. Назаренко, А.В. Яшина и других. Как правило, предлагаемые диаграммы составлены из нескольких отрезков, в пределах которых характер деформирования материала не меняется. Аппроксимирующие или интерполирующие функции являются монотонно изменяющимися, непрерывными, выпуклыми с одним экстремумом или линейными.

По предложению В.Н. Байкова, С.В. Горбатова, З.А. Дмитриева, диаграмма сжатия бетона выражена многочленом [4, 5]:

$$\sigma = R \left[ A \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_R} + B \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_R} \right)^2 + \dots + E \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_R} \right)^n \right], \quad (2.24)$$

где  $n$  — степень многочлена в зависимости от необходимой точности решения принимается  $n = 2, 3, 4, 5$ ;  $A, B, \dots, E$  — расчетные коэффициенты, подбираются для более точного описания экспериментальной диаграммы сжатия;  $R$  — деформации бетона при достижении в нем призменной прочности.

Основываясь на энергетическом подходе, В.М. Бондаренко [7] предложил феноменологическую диаграмму  $\sigma$ — $\varepsilon$  в виде:

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma_i(t)}{E_m^o(t)} \left[ 1 + \eta_m \left( \frac{\sigma}{R_b} \right)^{m_m} \right] + \varepsilon_p(t, t_0), \quad (2.25)$$

где 
$$\varepsilon_p(t, t_0) = \int_{t_0}^t \left[ 1 + \eta_p \left( \frac{\sigma}{R_b} \right)^{m_p} \right] \sigma(\tau) \frac{c^*}{\tau} dt; \quad \eta_m = \frac{37,5}{R_b};$$

$m_m = 5,7 - 0,05 \cdot R_b; \quad c^*(t, t_0)$  — мера ползучести;  $\eta_p = \frac{45}{R_b};$

$m_p = 5,0 - 0,07 \cdot R_b$ ;  $m, p$  — для мгновенных и запаздывающих деформаций.

Развивая эту тему, были сделаны обобщения по сопротивлению железобетона и даны прогнозы временного развития и аналитического учета несовершенства силового сопротивления бетонных и железобетонных конструкций для обеспечения их надежности и долговечности [1].

Следуя Н.И. Карпенко, рассмотрим диаграмму деформирования бетона при растяжении (рис. 2.9 а) и сжатии (рис. 2.9 б) [27]. На рис. 2.9 изображена полная диаграмма деформирования бетона, на которой цифрой I обозначены восходящие ветви (до вершин  $h$  с напряжениями  $\sigma_b = \hat{\sigma}_b$  — при сжатии, и  $\sigma_b = \hat{\sigma}_{br}$  — при растяжении). Цифрой II обозначены нисходящие ветви.

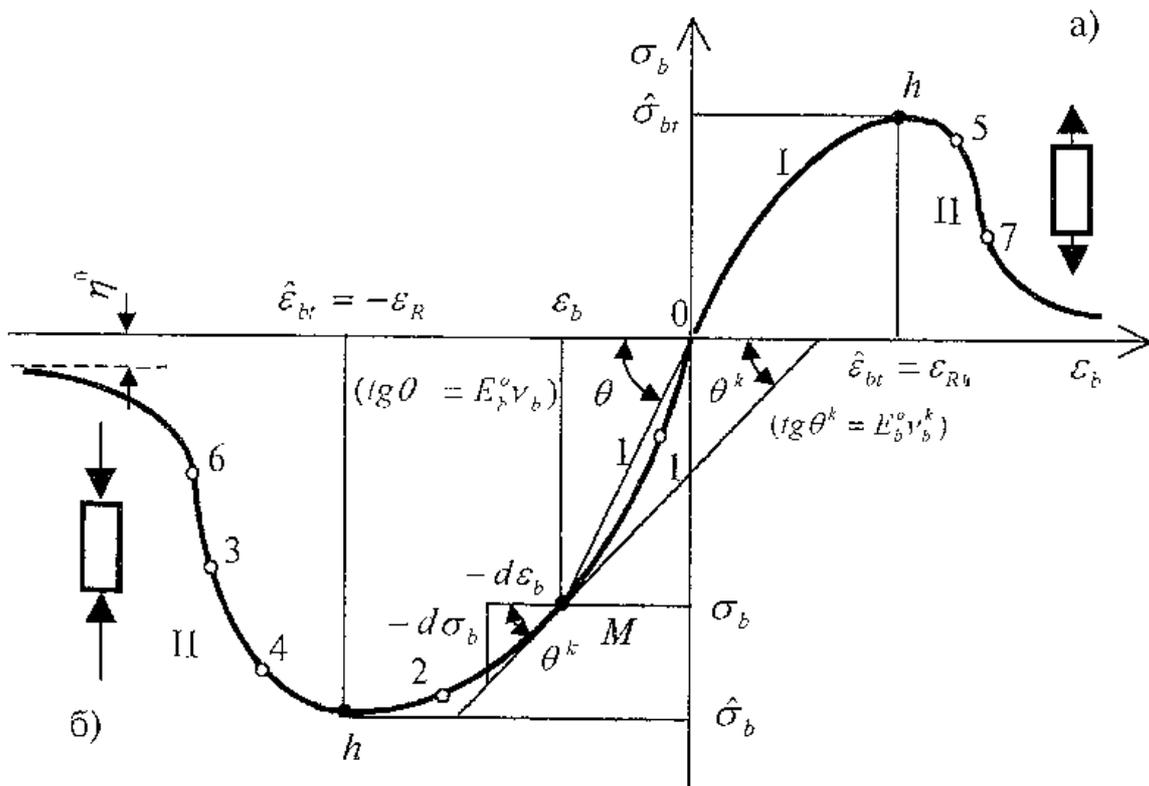


Рис. 2.9. Диаграмма деформирования бетона  $\sigma$ — $\epsilon$ : а) при растяжении; б) при сжатии [27]

Характер искривления диаграмм определяется развитием псевдопластических деформаций с образованием и развитием микротрещин, в основном трещин отрыва. С ростом деформаций происходит неустойчивое развитие микротрещин, их ветвление и объединение в макротрещины, движение которых приводит к разрушению образца, что соответствует ниспадающей ветви на диаграмме деформирования.

На диаграмме деформирования бетона (рис. 2.9) обозначены характерные точки, соответствующие основным этапам развития деформаций исследуемого образца. Точки 1 и 2, согласно О.Я. Бергу, являются нижней и верхней параметрическими точками соответственно. На уровне нижней параметрической точки возникают новые трещины, что соответствует отклонению диаграммы от начальной прямой линии. Верхняя параметрическая точка расположена вблизи вершины диаграммы на восходящей ветви. На этом уровне происходит неустойчивое развитие внутренних трещин. Возникновение магистральной трещины происходит на уровне точки 3. Считается, что после точки 3 ниспадающая ветвь диаграммы описывает деформации отдельных частей раздробленного бетона. Уровень напряжений в этой точке находится в пределах  $(0,5-0,7) \bar{\sigma}_b$ .

Существуют предложения ограничивать уровень напряжений, вводимых в расчет по ниспадающей ветви, величиной  $0,8 \bar{\sigma}_b$ , что соответствует точке 4 на диаграмме. При растяжении существенную роль в процессе возникновения и развития трещин в бетоне играют несовершенства или дефекты, возникшие при изготовлении или твердении бетона. Считается, что возникновение магистральной трещины происходит на уровне точки 5, при ширине раскрытия  $0,025-0,035$  мм. После образования трещины происходит падение напряжений (по линии 5-7), которые опреде-

ляются взаимодействием остаточных связей зацепления берегов трещины в виде бетонных мостиков.

Точку 5 считают точкой трещинообразования. С образованием трещины арматура железобетонной конструкции начинает работать по другой схеме, что приводит к необходимости формулировки новых физических соотношений. На диаграмме сжатия сжимающие напряжения и деформации укорочения принимаются отрицательными. При центральном сжатии диаграмма деформирования бетона описывается уравнением:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b^0 \nu_b}, \quad (2.26)$$

здесь  $\varepsilon_b, \sigma_b, E_b^0$  — относительные деформации, напряжения и начальный модуль упругости соответственно;  $\nu_b$  — коэффициент изменения секущего модуля.

Диаграмма растяжения описывается аналогичной зависимостью:

$$\varepsilon_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{E_b^0 \nu_{bt}}. \quad (2.27)$$

Соотношения между деформациями и напряжениями на диаграмме бетона определяются касательными и секущими модулями.

За касательный модуль упругости принимают величину, выражаемую тангенсом угла наклона касательной к кривой деформаций  $\operatorname{tg}\theta^k = \frac{d\sigma_b}{d\varepsilon_b}$  и зависящую от величины напря-

жений  $\sigma$ . Касательный модуль определен прямой, проходящей через точку  $M$  под углом  $\theta^k$  к оси абсцисс  $\varepsilon_b$ . Зависимость модуля упругости от уровня напряжений показана на рис. 2.10.

Определение касательного модуля упругости затруднено

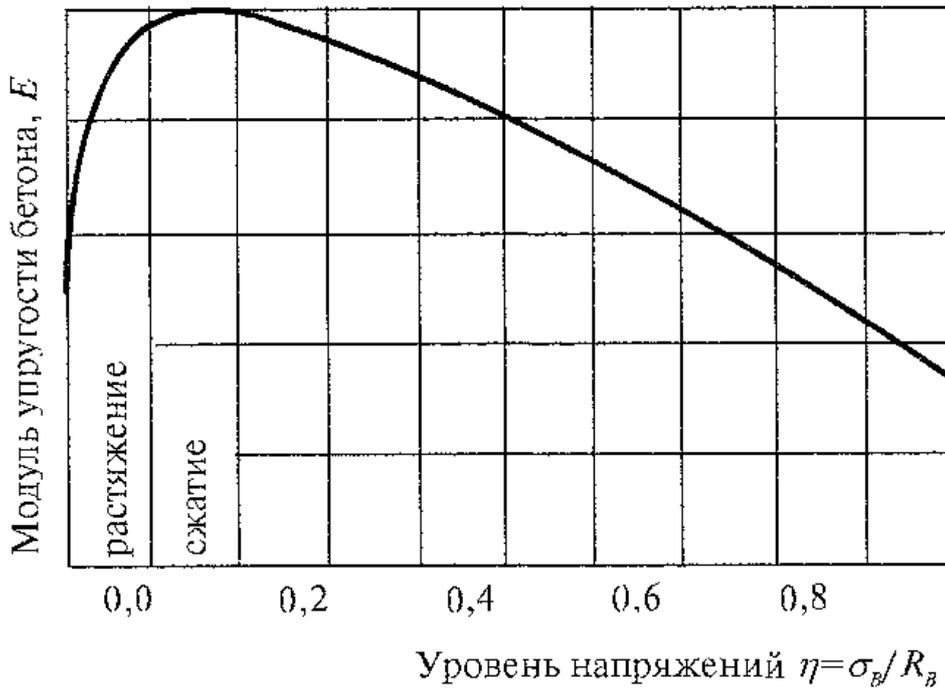


Рис. 2.10. Диаграмма модуля упругости бетона [67]

тем, что аналитические зависимости  $\sigma$ — $\varepsilon$  условны, и модуль упругости зависит от целого ряда других факторов, с трудом поддающихся учету. Поэтому в расчетах обычно пользуются приближенным средним модулем упругости  $E_b$ , который выражается тангенсом угла между осью абсцисс и секущей, соединяющей начало координат с точкой на кривой (прямая  $OM$  под углом  $\theta$  на рис. 2.9), соответствующей определенному значению  $\sigma_b$ , т.е.  $E_b = \operatorname{tg}\theta = \sigma_b / \varepsilon_b$ . Касательный модуль можно представить в виде  $E_b^0 v_b^k$ , аналогично секущий модуль —  $E_b^o v_b$ . Здесь  $E_b^o$  — начальный модуль упругости;  $v_b$ ,  $v_b^k$  — некоторые безразмерные функции.

Так называемый начальный модуль упругости  $E_b^o$  (истинный модуль упругости) определяется  $\operatorname{tg}\theta^k$ . В этом случае касательная к кривой в точке, где  $\sigma_b = 0$ , по существу представляет собой диаграмму деформаций при мгновенной скорости нагружения, когда бетон работает как упругий материал.

Экспериментальные исследования показывают, что с изменением напряженного состояния бетонного образца меняются соотношения продольных и поперечных деформаций. Так, например, при сжатии коэффициент поперечных деформаций возрастает от некоторого начального уровня  $\mu_b^0 = 0,15-0,2$  до значений, превышающих 0,5. Есть предложения по определению величин поперечных деформаций бетона, суть которых отражена на рис. 2.11 и 2.12. Изучение вопроса о соотношениях деформаций бетона при сложном напряженном состоянии находится в развитии.

Как правило, в практических расчетах железобетонных конструкций коэффициент поперечных деформаций принимается как постоянная величина, в зависимости от вида напряженного состояния. Использование коэффициентов поперечных деформаций в форме аналитических зависимостей требует дополнительных исследований и экспери-

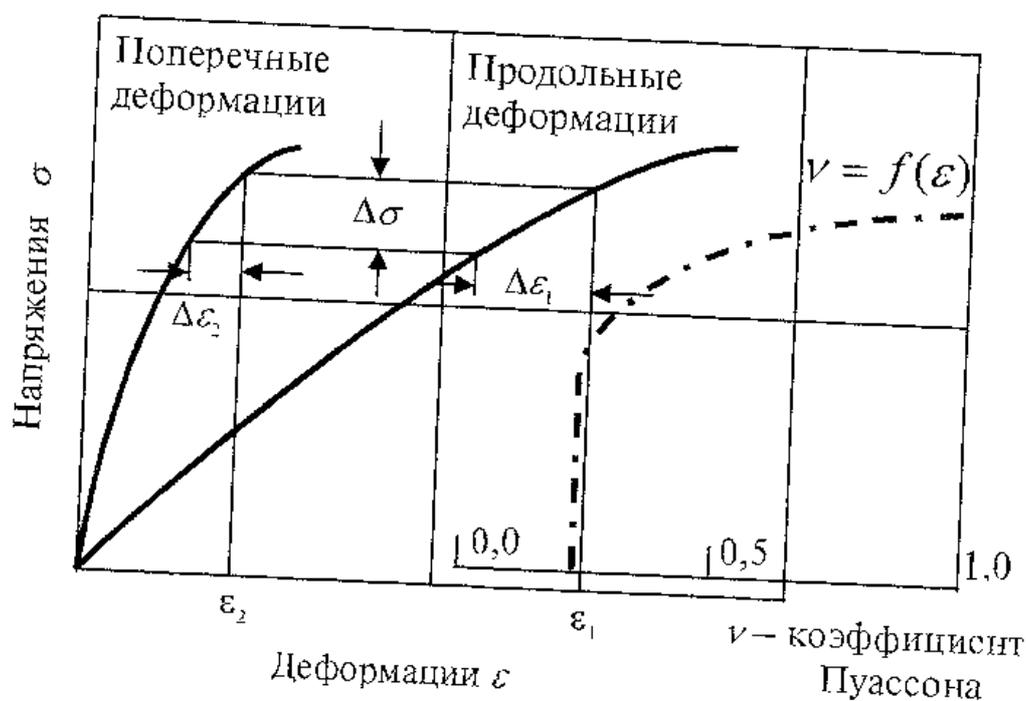


Рис. 2.11. Вычисление коэффициента  $\nu$  по приращениям поперечных  $\epsilon_2$  и продольных  $\epsilon_1$  деформаций [6]

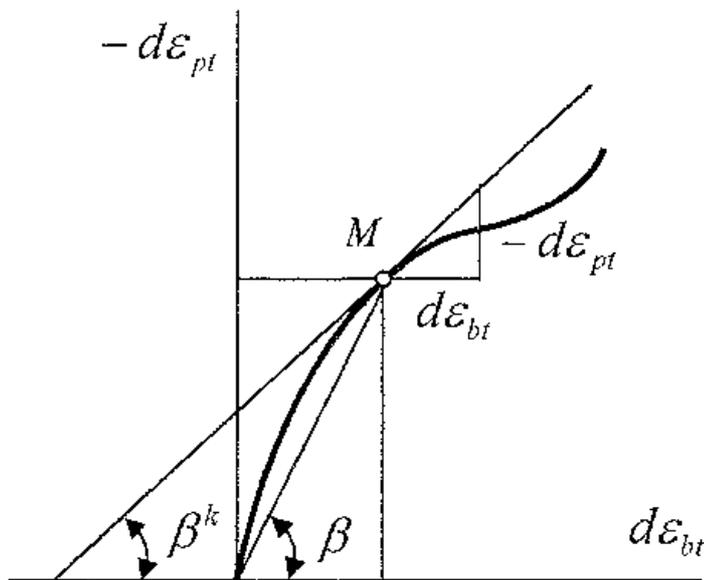


Рис. 2.12. Общий вид диаграммы  $\varepsilon_{bt} - (-\varepsilon_{pt})$  продольно-поперечных деформаций бетона [26]

мгнательных подтверждений. Особенно при расчетах железобетонных конструкций на действие динамических нагрузок. Изменение свойств бетона при скоростном нагружении отражается на диаграмме деформирования. При увеличении скорости деформирования начальный модуль упругости несколько повышается. Зависимость  $\sigma - \varepsilon$  изменяется, приближаясь на начальном участке к прямой линии, что объясняется запаздыванием неупругих деформаций, которые проявляются лишь при усилиях, близких к статическим.

### 2.3. Бетон при высокоскоростном нагружении

Динамическая прочность бетона зависит от свойств используемых материалов, особенностей структуры бетона, содержания влаги и др. (рис. 2.13, 2.14, [3]). При значительных скоростях деформаций (до  $\dot{\varepsilon} = 0,2 \text{ с}^{-1}$ ) неармированный бетон разрушается хрупко с деформациями 2‰.

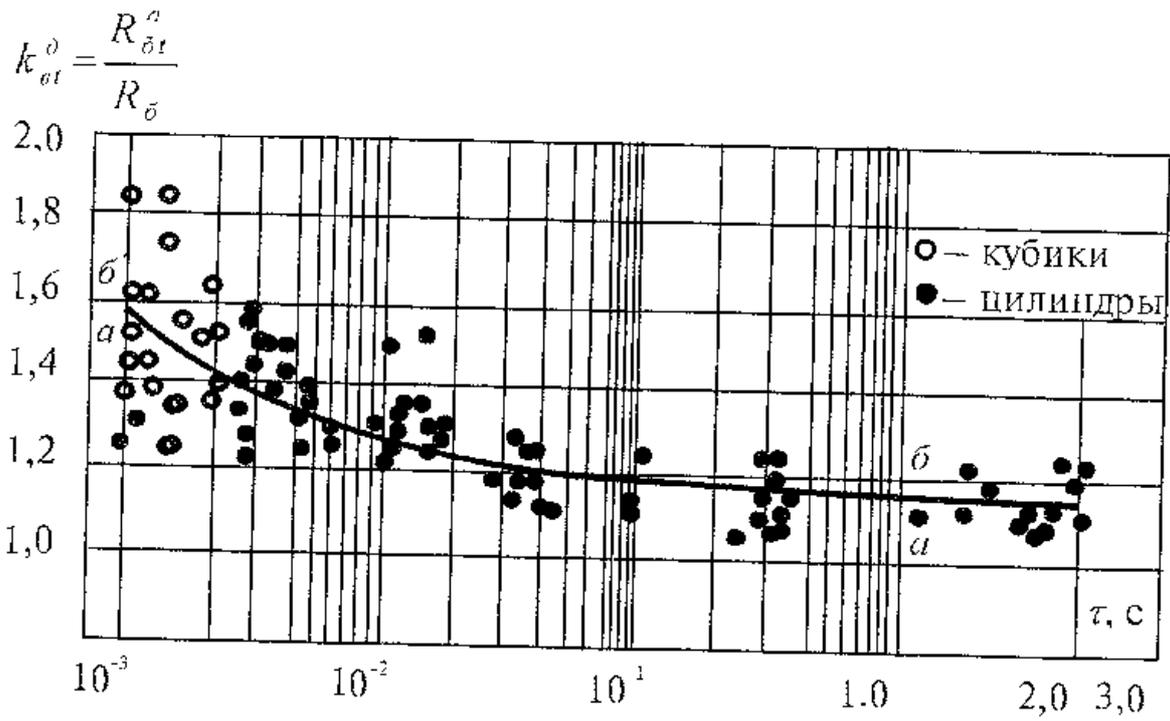


Рис. 2.13. Зависимость прочности бетона от времени сжатия [3]

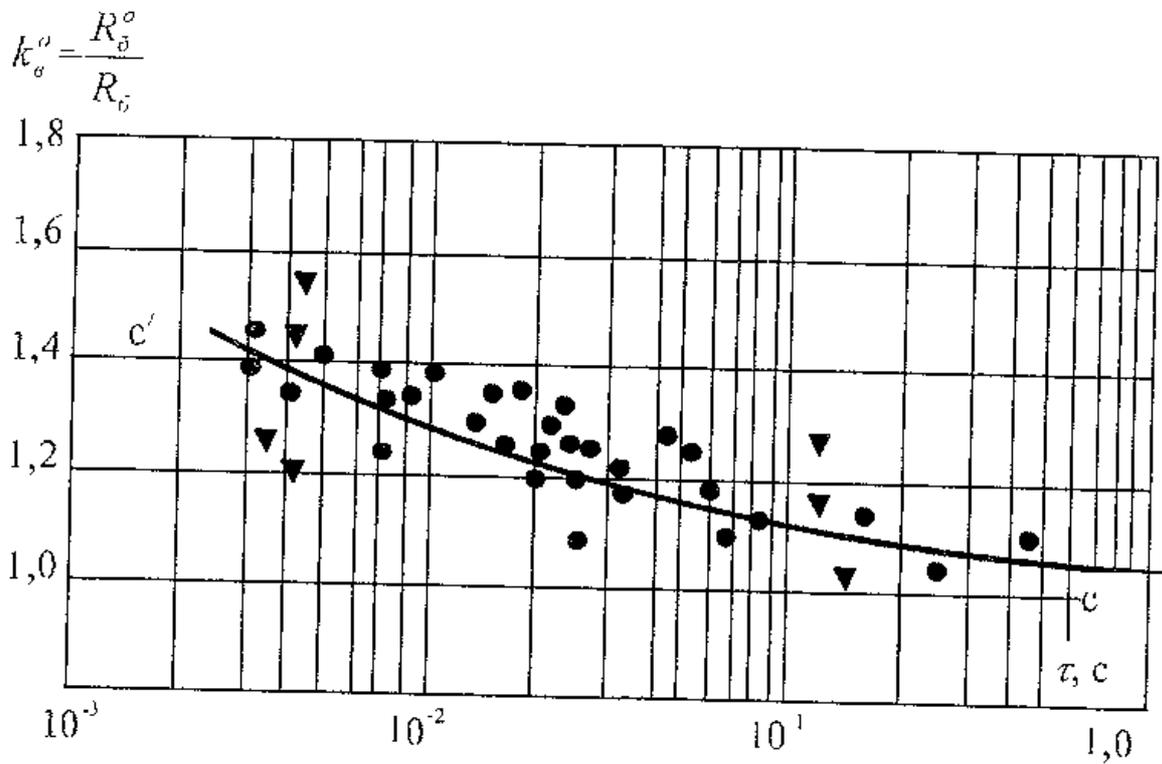


Рис. 2.14. Зависимость прочности бетона от времени растяжения [3]

Существуют предложения аналитической оценки предельных деформаций бетона при одноосном динамическом нагружении [68].

Результаты, полученные при испытаниях призм и кубиков на действие осевой динамической нагрузки, подтверждаются и для случаев объемных нагружений. На рис. 2.15 показаны результаты исследований бетонных образцов на динамическую нагрузку, полученные для различных скоростей сжатия и при различных значениях бокового давления. Показано, что с увеличением величины бокового обжатия призм происходит увеличение октаэдрических напряжений в 1,5–2 раза. При этом разупрочнение бетона зависит от скорости деформирования и происходит с меньшими неупругими деформациями.

Физическая модель бетона может быть представлена в виде двухфазовой среды, состоящей из твердой и жидкогазовой фаз. Напряжения и деформации твердой фазы, так называемого скелета бетона, связаны законом Гука. Считается, что скелет бетона воспринимает статическую нагрузку, в то время как напряжения жидкогазовой фазы зависят от скорости деформирования и изменяются по закону идеально вязкой жидкости. С увеличением скорости нагружения сопротивление жидкогазовой среды возрастает, чем и объясняется повышенное сопротивление бетона при динамическом нагружении.

Максвелл (Maxwell J.G.) [85] показал, что некоторые материалы, обладающие вязкоупругими свойствами, можно характеризовать модулем упругости на сдвиг и вязкостью. Он ввел понятие периода релаксации, который определил как отношение вязкости и модуля упругости на сдвиг. Максвеллом предложена зависимость, определяющая напряжение трения, пропорциональное скорости деформации  $\dot{\varepsilon}$ :

$$\sigma = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}. \quad (2.28)$$

Запишем выражение, определяющее связь между

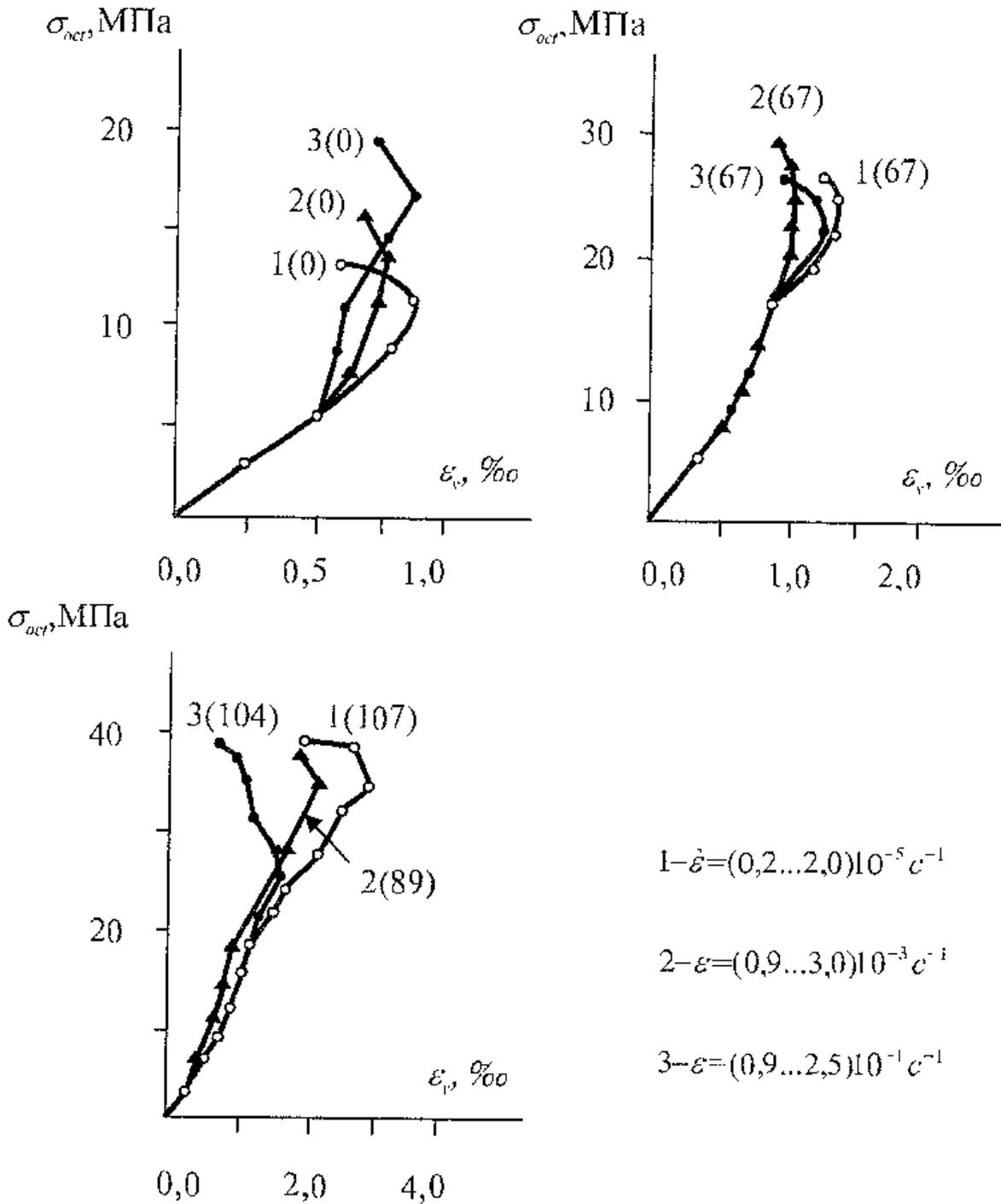


Рис. 2.15. Диаграммы октаэдрических напряжений и объемных деформаций « $\sigma_{oct} - \varepsilon_v$ » для бетона при высокоскоростном сжатии [69]. Цифры в скобках – боковое давление, атм

напряжением  $\sigma$  и его первой производной  $\dot{\sigma}$  с деформацией  $\varepsilon$  и скоростью деформирования  $\dot{\varepsilon}$ :

$$a_1\sigma + a_2\dot{\sigma} = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}. \quad (2.29)$$

В уравнении (2.29) из четырех постоянных —  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $G$ ,  $\eta$  — только три являются независимыми, а четвертая определяется из решения уравнения (2.28). Отношение  $\frac{\eta}{G}$  называется периодом запаздывания и имеет размерность времени. Период запаздывания  $\frac{\eta}{G}$ , определяющий время затухания деформаций, тем меньше, чем меньше вязкость  $\eta$ , характеризующая внутреннее трение, и чем больше жесткость, определяемая модулем  $G$ .

Бетон при динамическом нагружении может быть представлен в виде упруго-вязко-хрупкой структурной модели [23, 23], позволяющей учесть изменения структуры, вызванные пересечением пор и капилляров развивающимися трещинами. Предложенная модель получила подтверждение в расчетной практике [25], и ее модификации пригодны для определения длительной прочности бетона, а также при расчете на динамические нагрузки [70].

Для описания поведения бетона при динамическом нагружении модель бетона представлена как капиллярно-пористый материал, состоящий из твердой фазы — кристаллического сростка, образующего структуру, подчиняющуюся законам упругого тела, и жидко-газовой фазы, находящейся в порах структуры и деформирующейся как максвеллова жидкость (рис. 2.16).

Деформация структуры вызывает передислокацию жидко-газовой фазы в порах и капиллярах структуры и нарушает внутреннее равновесие между фазами рассматриваемого тела. Чем больше скорость деформации структуры, тем больше будет сопротивление жидко-газовой фазы, а следовательно, и общее сопротивление системы. В свою очередь, скорость перемещения системы будет зависеть от обобщенной вязкости бетона, слагающейся из вязкости ге-

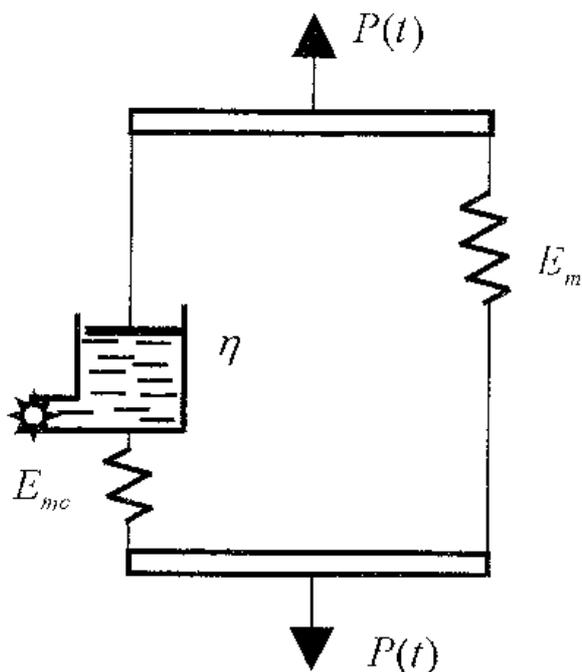


Рис. 2.16. Реологическая модель бетона при динамическом нагружении [70]

левой составляющей и вязкости воды. Последние зависят от распределения объема пор по их радиусам.

Закон деформирования для расчетной модели описывается системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{mc} &= \sigma_1 \\
 \sigma &= \sigma_{mc} + \sigma_m \\
 \varepsilon &= \varepsilon_0 = \varepsilon_m + \varepsilon_{mc} \\
 \sigma_s &= \eta_1 \cdot \dot{\varepsilon}_s \\
 \sigma_m &= E_m \cdot \varepsilon_m \\
 \sigma_{mc} &= E_{mc} \cdot \varepsilon_{mc}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

После преобразований имеем:

$$\frac{\eta_1 (E_m + E_{mc})}{E_{mc}} \dot{\varepsilon} + E_m \varepsilon = \sigma + \frac{\eta_1}{E_{mc}} \dot{\sigma}. \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) может быть записано в виде:

$$a\varepsilon + v\varepsilon = \sigma + \frac{v}{\beta} \dot{\sigma}. \quad (2.32)$$

В (2.32) в соответствии с рис. 2.16:

$$a = E_m; \quad \frac{v_1}{\beta_1} = \frac{\eta_1}{E_{mc}}; \quad v_1 = \frac{\eta_1(E_m + E_{mc})}{E_{mc}} = \frac{\eta_1 \beta}{E_{mc}}, \quad (2.33)$$

где  $E_m$  – жесткость элемента без трещин;  $E_{mc}$  и  $\eta_1$  – соответственно параметр матрицы с трещинами и параметр вязкости упруго-вязкого элемента;  $\sigma$  и  $\varepsilon$  – соответственно напряжения и деформации всей системы.

С целью получения достаточно простых по своей структуре расчетных зависимостей, определяющих прочность бетона при динамических нагрузках, Г.А. Генисвым [14] предложена модель деформирования и разрушения бетона во времени. Рассмотрена динамическая прочность бетона, находящегося в условиях трехосного напряженного состояния, характеризующегося величиной интенсивности напряжений  $T$ ; деформированное состояние бетона характеризуется величиной интенсивности деформаций  $\Gamma$  и ее производной во времени  $\dot{\Gamma}$ . Модель состоит из параллельно соединенных элементов  $A$  и  $B$ , первый из которых описывается деформационной теорией пластичности бетона [13], константы которой – предельные значения интенсивности касательных напряжений  $T_s$ , интенсивности деформаций сдвига  $\Gamma_s$  и величина начального модуля сдвига  $G_0$  (при  $T \rightarrow 0$ ) – определяются из стандартных испытаний, соответствующих заданному виду сложного напряженного состояния:

$$T_A = T(\Gamma) = 2T_s \left[ 1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s} \right] \frac{\Gamma}{\Gamma_s}, \quad (2.34)$$

где  $\Gamma_s = 2T_s / G_0$ .

Вязкий элемент  $B$  характеризуется параметром  $K$  — модулем вязкого сопротивления:

$$T_B = K \frac{d\Gamma}{dt}. \quad (2.35)$$

Зависимость между динамическим пределом прочности  $T = T_\partial$  и предельно допустимым временем этого воздействия  $t = t_\partial = \xi_\partial / \omega$  устанавливается из решения уравнения Риккати. Используя деформационный критерий предельного состояния ( $\Gamma = \Gamma_s$ ), определяется зависимость относительно  $\xi = \xi_\partial$ :

$$\xi_\partial = \frac{2 \operatorname{arccctg} \sqrt{\varphi_\partial - 1}}{\sqrt{\varphi_\partial - 1}} = \Phi(\varphi_\partial), \quad (2.36)$$

где  $\varphi_\partial = T_\partial / T_s$ .

В формуле (2.36) связь между  $\varphi_\partial$  и  $t_\partial$  определяется параметром  $\omega$ , величина которого определяется путем одноосных динамических испытаний бетона. Для тяжелого бетона среднее значение параметра  $\omega = \pi \cdot 10^2 \approx 314 \text{ с}^{-1}$ . Результаты расчетов показаны на рис. 2.17, где приведена зависимость динамической прочности тяжелого бетона от времени действия нагрузки.

При  $t_\partial = 0,02 \text{ с}$  коэффициент динамического упрочнения бетона равен  $\varphi_\partial = T_\partial / T_s = 1,4$ . Зависимость коэффициента динамического упрочнения  $\varphi_\partial$  от средней скорости деформирования  $\Gamma'_{\text{сп}} = \Gamma_s / t_\partial$  в интервале времени  $0 - t_\partial$ :

$$\Gamma'_{\text{сп}} = \frac{\omega \Gamma_s}{\Phi(\varphi_\partial)}. \quad (2.37)$$

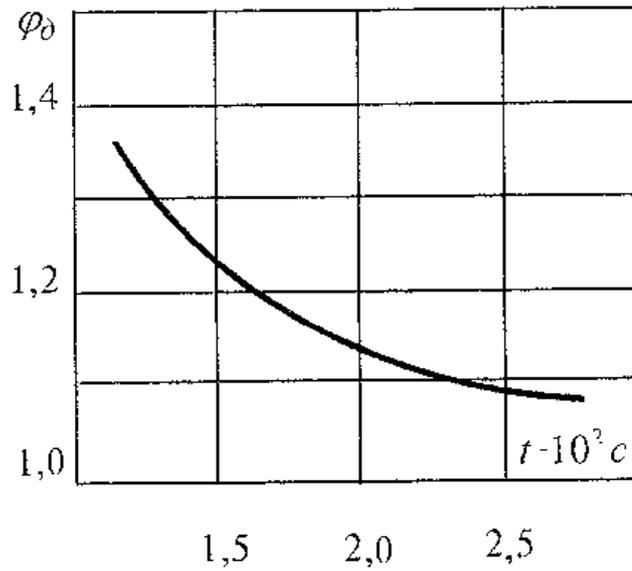


Рис. 2.17. Зависимость коэффициента динамического упрочнения от времени действия нагрузки [14]

На рис. 2.18 показана зависимость динамического предела прочности от средней скорости деформирования.

Сплошной линией показана зависимость (2.37) для случая одноосного сжимающего динамического нагружения

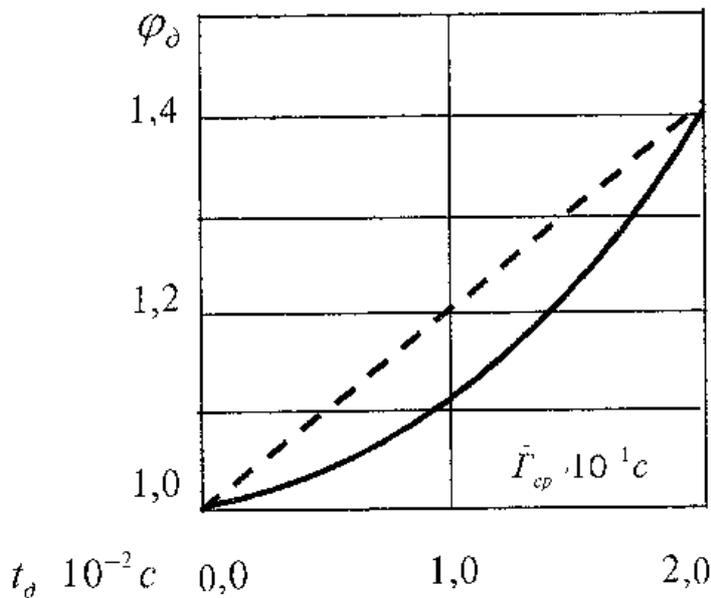


Рис. 2.18. Зависимость коэффициента динамического упрочнения от средней скорости деформаций [14]

при  $\omega = \pi \cdot 10^2 \approx 314 \text{ с}^{-1}$  и  $\Gamma_s = 2 \cdot 10^{-3}$ . Пунктиром показана ее линейная аппроксимация в диапазоне  $\Gamma_{cr} = 0 \dots 2 \cdot 10^{-1}$ :

$$\varphi_{\partial} = 1 + 2\Gamma_{cr}. \quad (2.38)$$

Достаточно хорошая сходимость результатов расчета с экспериментом дает основание для практического применения предложенных зависимостей в динамических расчетах железобетонных конструкций.

## 2.4. Бетон при высокоскоростном растяжении

Современное развитие теории железобетона посвящено механизму сопротивления бетона в стадии разрушения. При этом разрушение бетона и железобетона рассматривается не как мгновенное событие, а как процесс зарождения, появления и развития трещин, а также трещиноподобных дефектов. Для описания этого процесса при статическом нагружении предложены различные теории, основанные на феноменологическом подходе, а также статистические и структурные теории, базирующиеся на глубоком анализе физической сути поведения материала под нагрузкой. Большое значение в этом вопросе принадлежит работам Ю.М. Баженова, В.М. Бондаренко, П.И. Васильева, Г.А. Гениева, Е.А. Гузеева, А.В. Забегаева, Ю.В. Зайцева, П.И. Карпенко, А.П. Пака, В.В. Панасюка, К.П. Пашенко, Е.Н. Пересыпкина, К.А. Пирадова, Б.С. Расторгуева, А.Г. Тамразяна, Л.П. Трапезникова и др.

Считается, что в таком хрупком гетерогенном материале, как бетон, разрушение распространяется с формированием достаточно большой зоны с микротрещинами, в которой растягивающие напряжения с возникновением и развитием микротрещин постепенно снижаются до нуля.

Исследования физико-механических свойств бетона при высокоскоростном нагружении находятся в стадии

развития и крайне недостаточны. Анализ имеющегося экспериментального материала показывает, что при скоростном деформировании, вследствие высокого градиента напряжений, трещина развивается по кратчайшему пути, даже если этот путь связан с преодолением более высокого сопротивления. При этом энергия разрушения ( $A$ ) увеличивается с ростом скорости нагружения. С изменением скорости роста напряжения  $\dot{\sigma}$  ( $\text{Н}/\text{мм}^2\text{мс}$ ) от  $10^{-4}$  до  $10^3$  относительная величина энергии разрушения  $\left(\frac{A}{A_c}\right)$  возрастает в 2–4 раза и более [91].  $A_c$  – энергия разрушения при статической скорости роста напряжения  $\dot{\sigma}=10^{-4}$  ( $\text{Н}/\text{мм}^2\text{мс}$ ). Причем, чем больше содержание заполнителя в смеси, тем больше величина энергии разрушения. На рис. 2.19  $P_a$  – коэффициент, характеризующий содержание заполнителя в единице объема.

Прочность и деформативность бетона при растяжении

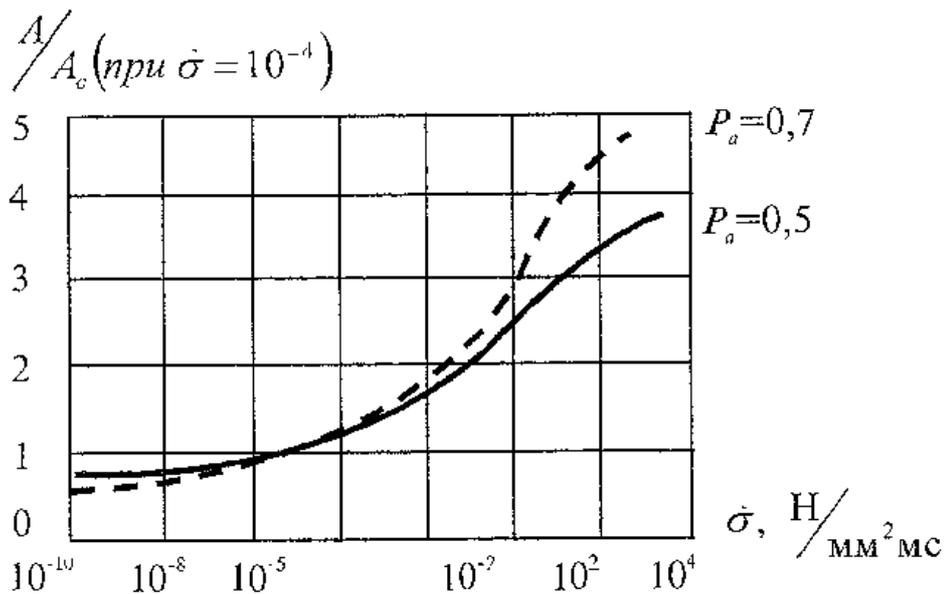


Рис. 2.19. Влияние скорости роста напряжения на энергию разрушения [91]

связана с процессом его сопротивления под нагрузкой и энергией, поглощенной в результате разрушения. Количество поглощенной энергии соответствует площади, ограниченной диаграммой  $\sigma$ — $\varepsilon$  бетона при растяжении. Экспериментальные исследования бетона на растяжение при скоростном нагружении показали, что прочность на растяжение может возрастать в 2–5 раз, а предельные деформации, соответствующие максимальному напряжению, выше, чем при статическом нагружении в 1,5–2 раза [91]. Диаграмма  $\sigma$ — $\varepsilon$  бетона при динамическом растяжении выражает линейную зависимость между деформациями и напряжениями, что характеризует отсутствие неупругих деформаций (рис. 2.20, [91]).

Анализируя исследования бетона и железобетона при растяжении, К.М. Мянковский показал, что первопричиной возникновения трещин являются усадочные деформации, возникшие в процессе твердения бетона.

По К.М. Мянковскому [50] с точки зрения происхожде-

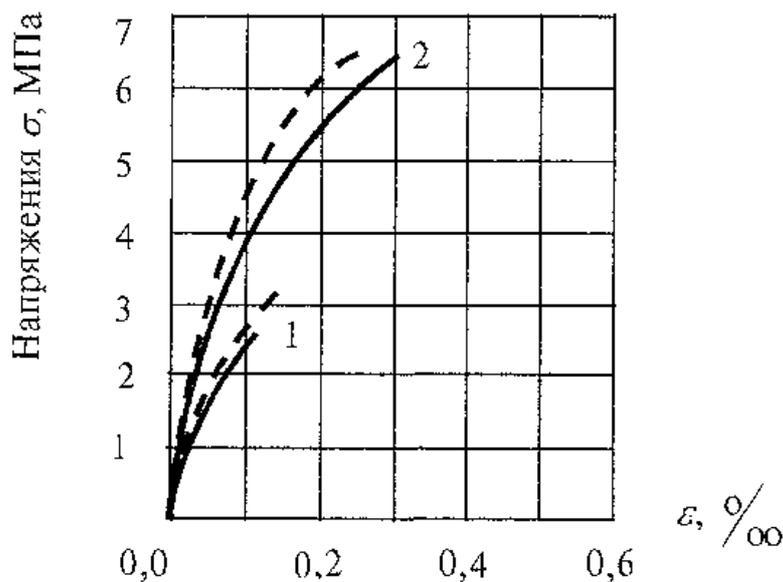


Рис. 2.20. Диаграммы  $\sigma$ — $\varepsilon$  бетона при скоростном нагружении: —————  $P_a = 0,5$ ; — — — — —  $P_a = 0,7$ ; 1 — статика; 2 — динамика [91]

ния трещины, возникшие при растяжении железобетонного элемента, могут быть подразделены на трещины первого и высших порядков. Трещины первого порядка начинаются у наружных поверхностей и распространяются внутрь, к месту расположения арматуры, которая благодаря первичным связям сцепления препятствует свободе деформаций окружающего стержень слоя бетона. Первичные связи сцепления определены главным образом контактными напряжениями, возникшими от усадки бетона, адгезии и микронапряжений. Вторичными названы связи от сил трения и механических свойств (риффы) арматурной стали.

Проникновение вершины трещины первого порядка к поверхности стержня возможно только при условии ослабления в области будущей трещины первичных связей сцепления. Когда такое ослабление имеет место, арматура оказывается смещенной относительно края трещины, а сама трещина выражается разностью между удлинением стержня и прилегающего к нему слоя.

Трещины высших порядков зарождаются между трещинами низшего порядка по мере возрастания растягивающих усилий. Приведенная систематизация подтверждена экспериментально в работах А. Бихара (A. Bichara), С.Б. Бромса (С.В. Broms), В. Николаи (V. Nicolau), А. Лероя (A. Le Roy) и др. [50].

В период образования трещин высших порядков связи сцепления между бетоном и арматурой приобретают вторичный характер и являются следствием главным образом трения и воздействия арматуры (периодического профиля).

Появление первой трещины вызывает перераспределение внутренних усилий в растянутом элементе. Нагрузки в сечении, проходящем через первую трещину, всецело воспринимаются арматурой, а по мере удаления от трещины за счет вторичных связей сцепления усилие растяжения перераспределяется на бетон. Вторая трещина первого по-

рядка возникает в сечении, в котором участие бетона в передаче растягивающего напряжения максимально.

На рис. 2.21 приведены диаграммы касательных напряжений, возникающих на поверхности арматурного стержня, вытягиваемого из бетона.

Результаты получены путем тензометрических измерений [76]. Как видно из рассмотрения диаграмм, в трещине значения касательных напряжений равны нулю. С увеличением растягивающей силы диаграммы трансформируются со смещением максимальных касательных напряжений на расстояние  $10-15 d$  ( $d$  — диаметр арматурного стержня) от плоскости трещины.

С расширением трещины нарушаются связи сцепления арматуры с бетоном. При нарушении связей сцепления происходит отслоение бетона от арматуры в окрестности трещины, что подтверждается экспериментально получен-

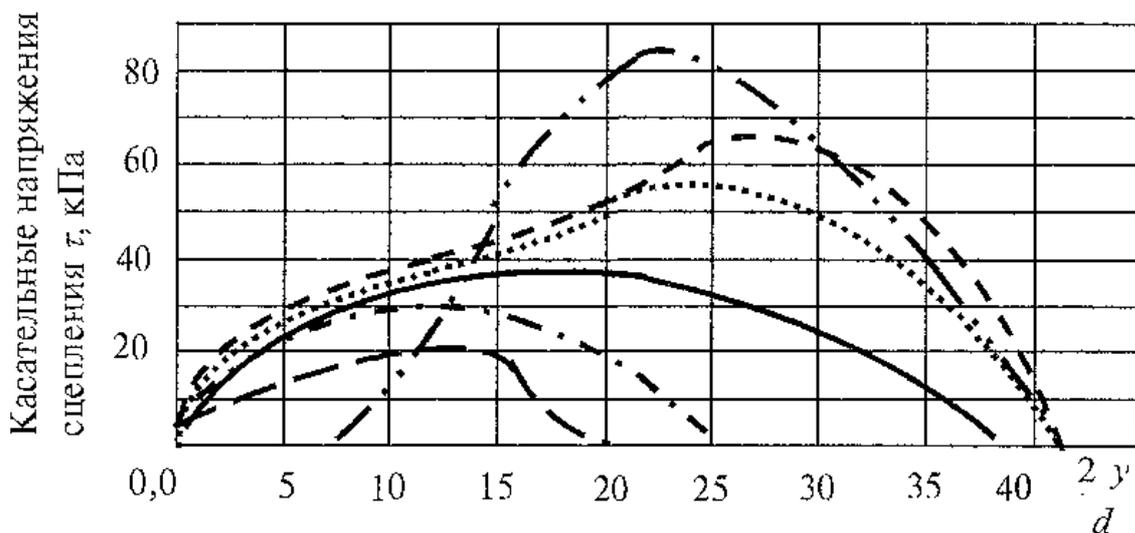


Рис. 2.21. Распределение касательных напряжений сцепления на поверхности стального стержня при выдергивании из бетона [140];  $d$  — диаметр арматурного стержня;  $y$  — координата на продольной оси стержня;

— — —  $P=6$  кН; — · — · —  $P=10$  кН; — — —  $P=20$  кН;  
 ······  $P=30$  кН; — — — —  $P=40$  кН; — — — —  $P=50$  кН

ной А. Лероем (A. Le Roy), Л. Жергели и П. Жергели (L. Gergely, P. Gergely) схемой, показанной на рис. 2.22 [50].

Наращение локальных разрушений бетона выражается в усилении процесса образования микротрещин. Одновременно с этим, по мере разрушения бетона, величина воспринимаемого бетоном усилия уменьшается, и арматура, замещая разорванные связи сцепления, перенимает на себя действующую нагрузку.

Процесс разрушения бетона не является непрерывным во времени и характеризуется некоторой степенью динамичности. Разрыв отдельных связей происходит со значительными скоростями. Арматура через механизм первичных связей сцепления оказывает тормозящее действие на скорости этих деформаций.

Как правило, разрушение бетона при растяжении происходит по границе с заполнителем или по цементному камню. Заметим, что наибольшей прочностью, сравнительно с другими новообразованиями в цементном камне, обладают кристаллы гидратированных метасиликатов кальция CSH. Учитывая, что кристаллы CSH имеют во-

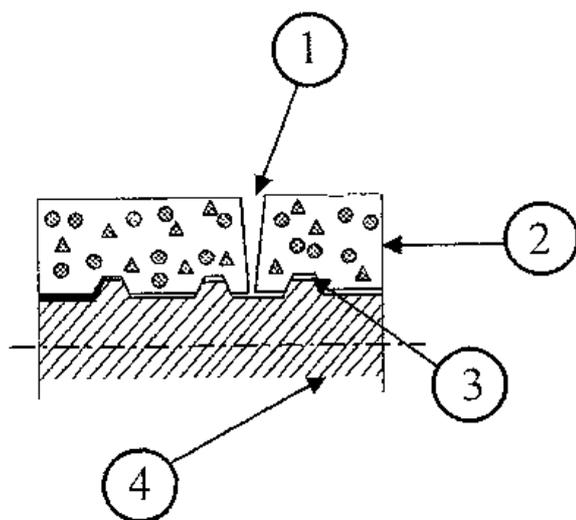


Рис. 2.22. Схема ослабления первичных связей сцепления при появлении трещины первого порядка [50]: 1 — трещина первого порядка; 2 — бетон; 3 — отслоение; 4 — стержень

локнистую форму и преобладают в цементном камне, их совокупность можно представить в виде пространственной скелетной модели, каждый линейный элемент которой представляет собой волокно CSH, определяющее в основном прочность цементного камня при растяжении или прочность связи между заполнителем и цементным камнем. Полагаем, что волокна имеют одинаковую прочность и деформативность и что разрушение каждого элемента происходит в результате разрыва его связей сцепления с зерном до исчерпания несущей способности самого элемента и до достижения им предела упругой деформации. Учитывая разнонаправленность и неодинаковую длину волокон, можно представить, что сначала разорвутся наиболее короткие связи, параллельные растягивающей силе.

Эксперименты [50] показали, что процесс разрушения сопровождается эмиссией акустической энергии, наблюдаемой в форме акустических импульсов (рис. 2.23, 2.24). С увеличением нагрузки все более прочные связи разрушаются и энергия внутренних импульсов возрастает. С развитием трещины разрушается все большее количество связей, и в предельном состоянии внутренние импульсы (от разрыва связей) становятся более заметными, способствуя разрушению более прочных связей. При этом будут разорваны группы связей по оси прочности, расположенные ближе к группам связей, разорванных при данной величине внешних нагрузок. Это значит, что при нагрузке  $P_i$  будут разорваны не только связи, прочность которых равна  $R_i$ , но и связи с  $R_j$ .

На рис. 2.23 показаны глубинные эффекты, порожденные группой связей с пределом прочности  $R_i$ , которые вызвали разрушение группы связей с пределом прочности  $R_j$ , расположенных по оси прочности в наиболее близком соседстве к связям группы  $R_i$ . Не исключено, что эффекты, вызвавшие разрушение связей  $R_j$ , могли быть следствием разрушения групп связей  $R_k$  и  $R_l$ . Разрыв более прочных



Рис. 2.23. Динамика процесса разрушения в растянутом бетонном элементе при статическом нагружении [50]

групп связей без увеличения нагрузки невозможен. Например, для разрушения групп связей  $R_m$  должна быть приложена нагрузка  $P_m$ .

В условиях статического эксперимента глубинные импульсы, возникающие при разрыве групп связей, разделены заметными интервалами времени. При значительных скоростях нагружения градиенты вынужденных деформаций могут совпадать с периодом действия импульсов (рис. 2.24). При большой скорости деформаций, приближающейся к скорости релаксации (кривая 2), импульс от разрыва группы связей  $R_j$  суммируется с более ранним импульсом, вызванным разрывом связей группы  $R_i$ . В результате уже на уровне деформаций  $\epsilon_{Ri}$  происходит разрыв связей группы  $R_k$ .

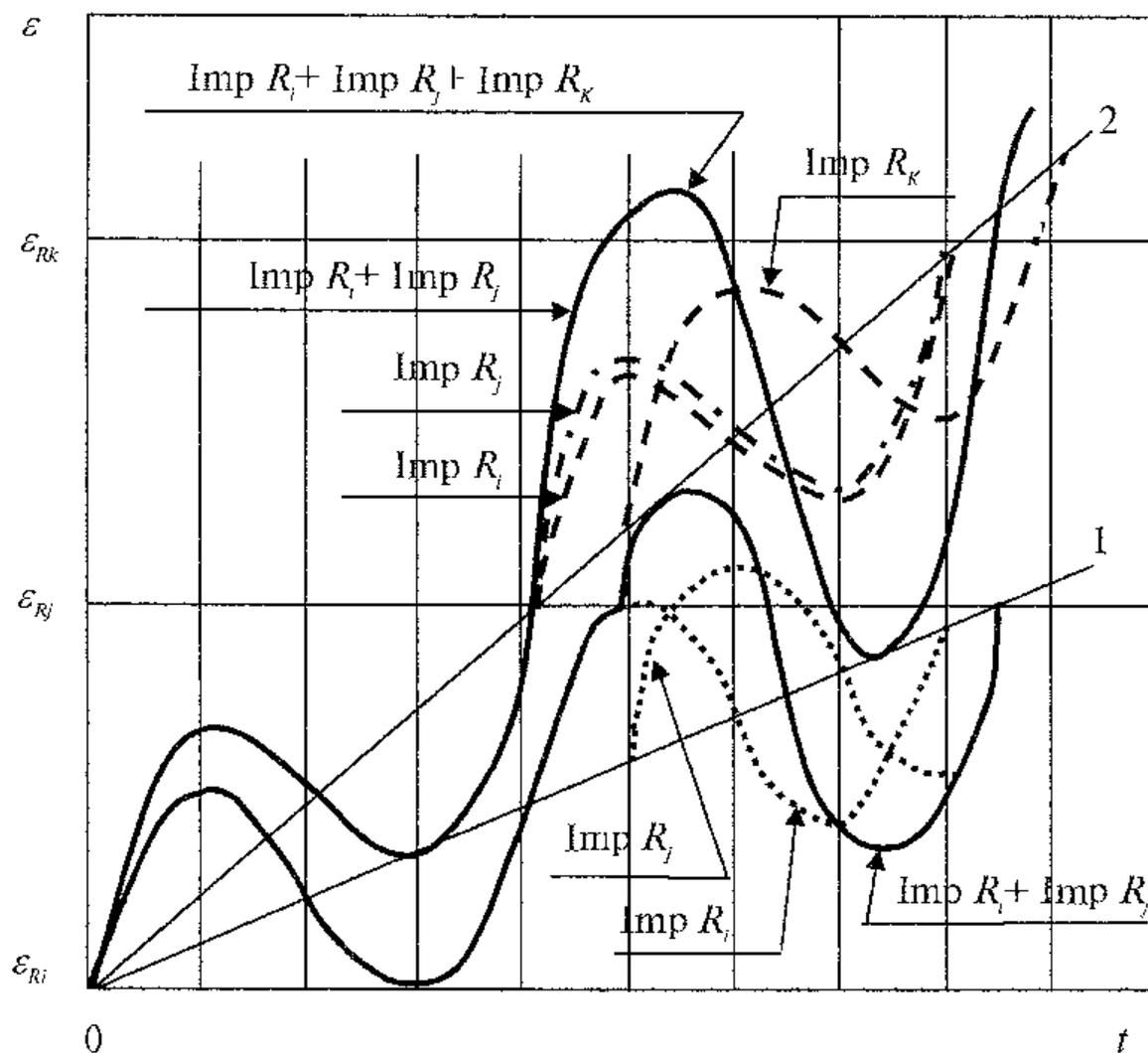


Рис. 2.24. Динамика процесса разрушения в растянутом бетонном элементе при высокоскоростном нагружении [50]

Таким образом, разрушение наступит раньше, чем при статическом нагружении (кривая 1), где очередные импульсы не совпадают по фазе. Возрастание амплитуды колебаний при разрывах очередных групп связей позволяет допустить, что начало лавинного протекания процесса разрушения наступит раньше в том случае, когда скорость вынужденных колебаний будет равна скорости релаксации. По результатам опытов В. Николаи (V. Nicolau), скорость релаксации  $\frac{d\varepsilon}{dt} = (8-10) \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ . Механизм разрушения ар-

мированного бетона имеет свою особенность, заключающуюся в том, что скорость местных деформаций бетона в окрестности арматуры практически одинакова и близка по скорости деформациям, возникшим от действия внешней нагрузки. В процессе появления трещины на участке ниспадающей ветви диаграммы  $\sigma_{bt}-\varepsilon_{bt}$  арматура принимает на себя всю нагрузку от разрушенных растяжением бетонных связей.

## 2.5. Деформации арматуры в нормальной трещине

Арматурный стержень после превышения в бетоне предела прочности на растяжение воспринимает дополнительные нагрузки и деформации растяжения. В предельном равновесии падение напряжений в растянутом бетоне должно быть уравновешено ростом нагрузки, воспринимаемой арматурой, т.е.:

$$d\sigma_{nb}(1-\mu) + \mu E_s d\varepsilon = 0. \quad (2.39)$$

Отсюда, приращение деформаций в арматуре  $\bar{\varepsilon}_s$  или дополнительное усилие в арматурном стержне  $\bar{N}_s$ , могут быть определены по формулам:

$$\bar{\varepsilon}_s = -\frac{1-\mu}{\mu E_s} \int_A \phi(\sigma_{nb}) d\sigma_{nb}, \quad (2.40)$$

$$\bar{N}_s = -\frac{1-\mu}{\mu} \cdot A_s \int_A \phi(\sigma_{nb}) d\sigma_{nb},$$

где  $\phi(\sigma_{nb})$  – функция распределения напряжений в бетоне по сечению.

Определение величины деформации арматуры может быть выполнено после образования трещины, когда деформация бетона в окружении трещины, вызванная эф-

фектом Пуассона, исчезает. Вся нагрузка, действующая в сечении с трещиной, воспринимается только арматурой. При этом помимо напряжений растяжения в арматурном стержне возникают напряжения от поперечной силы и изгиба. Часть усилий воспринимается остаточными связями в бетоне по берегам трещины.

Считается, что основными в арматуре являются осевые напряжения. В трещине они достигают максимальных величин. Интенсивность затухания напряжений в арматуре определяется силами сцепления арматуры с бетоном, то есть степенью участия бетона в восприятии действующих сил. Опыты показывают, что в процессе разрушения деформации арматуры достигают значительных величин и могут быть определены лишь косвенным образом, так как непосредственные измерения весьма затруднительны. Задачу количественной оценки напряженного состояния в зоне пластических деформаций или разрушения арматуры можно разрешить по данным об остаточных деформациях, выявленных путем непосредственных измерений.

Рассмотрим результаты экспериментов, проведенных для изучения остаточных напряжений в арматуре разрушенной железобетонной конструкции [34]. Эксперименты проведены в два этапа.

Сначала исследовались стержни (Ст35ГС), диаметром 10 мм, испытанные на разрывной машине со скоростью  $4 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>. Диаграмма  $\sigma$ – $\varepsilon$ , построенная в процессе испытаний, показана на рис. 2.25. Для уточнения величин деформаций после появления шейки проводились измерения поперечного сечения образца.

На втором этапе проведены испытания высокой железобетонной балки, конструкция которой обеспечивала появление трещин, разделяющих балку на три блока. Балка устанавливалась на две опоры. Статическая нагрузка прикладывалась к верхней грани сверху вниз.

На рис. 2.26 показана схема испытаний железобетонной

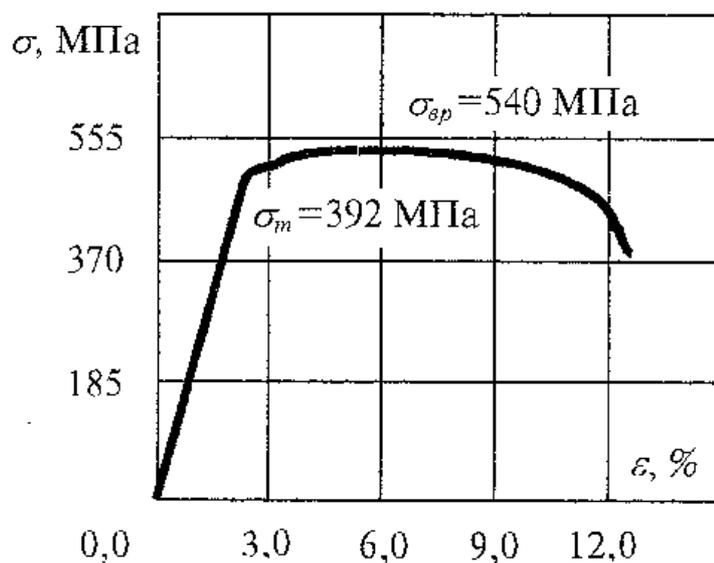
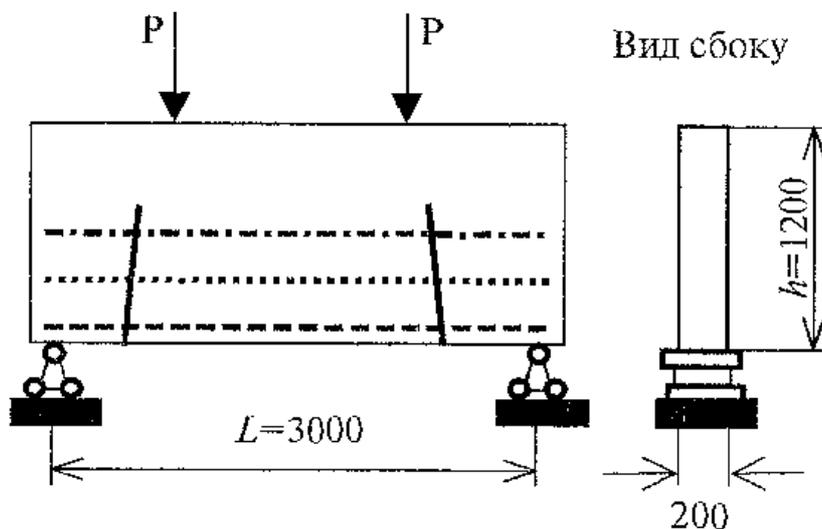
Рис. 2.25. Диаграмма растяжения исследуемого стержня,  $\sigma - \varepsilon$ 

Рис 2.26. Схема испытаний железобетонной балки-стенки. Пунктиром показаны исследуемые арматурные стержни

балки-стенки, армированной стержнями арматуры класса А-III диаметром 16 мм. Исследуемые стержни распределены в теле балки по высоте, вследствие чего от действующей нагрузки в них возникали различные по величине усилия.

На последнем этапе эксперимента нижний стержень

был разорван, в выпележающих стержнях возникли локальные пластические деформации различной интенсивности. После разрушения балки-стенки стержни были извлечены из бетона.

Исследования структуры материала и определение остаточных деформаций в исследуемых стержнях проведены методами металлофизики. Из стержней были вырезаны пластины (фольги). Разрезка проведена электроискровым способом в керосиновой среде. Расстояние между разрезами принято кратным диаметру стержня (рис. 2.27).

Изучение структуры стали осуществлялось методами просвечивающей электронной микроскопии (тонкие фольги) и рентгеноструктурного анализа.

Тонкие фольги (объекты исследования метода электронной микроскопии) готовились следующим образом. Отрезанные (согласно схеме, рис. 2.27) на электроискровом станке металлические пластинки толщиной  $\sim 0,25$  мм утонялись электролитически в пересыщенном растворе хромового ангидрида и ортофосфорной кислоты до толщины  $\sim 0,17$  мкм и просматривались в электронном микроскопе ЭМ-125 при ускоряющем напряжении 125 кВ. Рабочее увеличение в колонне электронного микроскопа составляло 4000–40000 крат.

Окончательное увеличение достигалось с помощью фо-

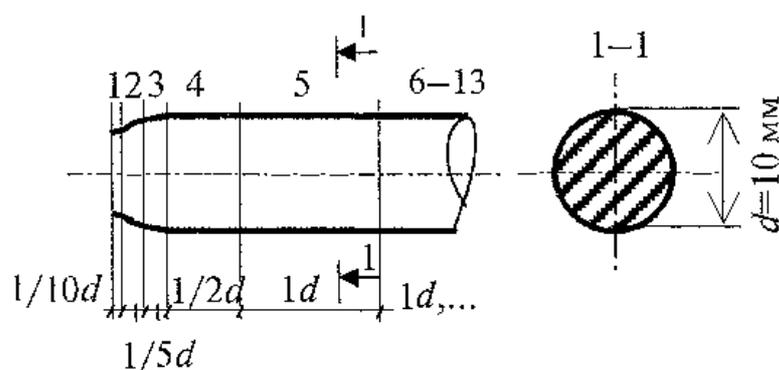


Рис. 2.27. Схема разрезки стержня, разрушенного растяжением

тонсчати. Для идентификации фаз, присутствующих в материале, применялся дифракционный анализ с использованием темнопольной методики [72]. Электронно-микроскопические изображения исследуемого материала были использованы для классификации структуры по морфологическим признакам для определения размеров, объемной доли и мест локализации вторичных фаз; скалярной  $\langle \rho \rangle$  и избыточной  $\rho_{\pm}$  плотности дислокаций; амплитуды кривизны-кручения  $\alpha$  кристаллической решетки материала. Для определения объемной доли дислокационной субструктуры (ДСС) был использован планиметрический метод, основанный на измерении доли площади фольги  $P_d$ , занятой определенным типом ДСС. Согласно этому методу, измерялись площади изображений каждого из типов ДСС на плоскости наблюдения. Затем величины таких площадей суммировались. Полученная сумма делилась на величину площади изучаемого участка плоскости наблюдения.

Скалярная плотность дислокаций измерялась методом секущих с поправкой на невидимость дислокаций. В качестве испытательной линии использовалась прямоугольная сетка. Избыточная плотность дислокаций  $\rho_{\pm} = \rho_+ - \rho_-$  ( $\rho_+$  и  $\rho_-$  — плотность соответственно положительно и отрицательно заряженных дислокаций) измерялась локально по градиенту разориентировки [31, 32]. Размеры частиц карбидной фазы определяли по микрофотографиям, полученным с фольги, путем их непосредственного замера. У частиц карбидов, имеющих сферическую форму, измерялся диаметр  $d$ , у пластинчатых частиц — длина  $l$  и диаметр  $d$ . Определение размеров зерен проводилось методами металлографии по микрошлифам. Анизотропные по форме зерна измерялись в двух взаимно перпендикулярных направлениях, размеры остальных зерен определялись с помощью метода случайных секущих [66].

Рентгеноструктурные исследования проведены на дифрактометре ДРОН-3М в фильтрованном  $Cu_{K\alpha}$ -излу-

чении. Измерялись размеры областей когерентного рассеяния ( $D_{HKL}$ ) и микронапряжения второго рода ( $\sigma_{II}$ ). Оценки размеров  $D_{HKL}$  и величины  $\sigma_{II}$  проведены методом аппроксимаций по формулам [71]:

$$\begin{aligned} D_{HKL} &= K\lambda / \beta \cos \Theta_{HKL}; \\ \sigma_{II} &= E\beta / 4 \operatorname{tg} \Theta_{HKL}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

здесь  $D_{HKL}$  — область когерентного рассеяния;  $K$  — коэффициент, зависящий от способа определения физического уширения максимума,  $K=0,8$  — при измерении на полувысоте,  $K=1$  — по интегральной полуширине;  $\lambda$  — длина волны используемого рентгеновского излучения;  $\beta$  — физическое уширение интерференционного рентгеновского максимума;  $\Theta_{HKL}$  — Брэгговский угол соответствующего максимума;  $E$  — модуль Юнга;  $\operatorname{tg} \Theta$ , определяли по наклону кривой, построенной в координатах  $\beta \cos \Theta_{HKL}$  от  $4 \sin \Theta_{HKL}$ .

В случае совместного влияния блоков и микронапряжений на ширину линий проводилось их разделение по следующей методике [71]. Были построены зависимости  $\beta \cos \Theta_{HKL}$  от  $4 \sin \Theta_{HKL}$  для большого числа рефлексов. По тангенсу угла наклона определялось отношение  $\Delta d/d$ . Величины микронапряжений второго рода определялись по формуле [71]:

$$\sigma = E \frac{\Delta d}{d}. \quad (2.42)$$

Остаточные напряжения характеризуются однородным сжатием или однородным растяжением (деформацией в упругой области) решетки. Эти напряжения известны в металлофизике как напряжения первого рода —  $\sigma_I$ . Обычно различают два вида остаточных напряжений в металлических сплавах. Эти виды напряжений различаются объемами, в которых они уравниваются.

Напряжения I рода ( $\sigma_I$ ), которые иногда называют зо-

нальными, или макронапряжениями, уравниваются в макроскопических объемах или в объеме всего образца. Под микронапряжениями II рода ( $\sigma_{II}$ ) понимают напряжения, которые уравниваются в объемах отдельных кристаллов или блоков мозаики. Эти микронапряжения связаны с неоднородной упругой деформацией и, следовательно, с закономерным неоднородным изменением межплоскостных расстояний. Такое изменение межплоскостных расстояний ( $d$ ) приводит к уширению Брэгговских рефлексов рентгенограммы. Величину микронапряжений оценивают по величине относительной микродеформации —  $\Delta d/d$  [71].

Известно, что области когерентного рассеяния (ОКР) — это когерентно дифрагирующие области кристаллической решетки. Они образуются бездефектной решеткой и могут содержать определенную равновесную концентрацию точечных дефектов. Величина ОКР служит косвенной характеристикой степени деформации решетки и соответствующего микронапряжения.

Электронно-микроскопический анализ показал, что структура стали в недеформированном состоянии представляет собой смесь ферритных и перлитных зерен вытянутой формы, средние поперечные и продольные размеры которых равны 3,2 и 5 мкм соответственно. Дислокационная субструктура ферритных зерен и прослоек феррита в перлитных колониях характеризуется хаотическим расположением дислокаций. Внутри зерен перлита и феррита наблюдались изгибные контуры, свидетельствующие о наличии в образцах упругих полей напряжений. Амплитуда дальнедействующих полей напряжений связана с линейными характеристиками изгибных контуров зависимостью [30]:

$$\sigma_d = \frac{\Theta h^2 E}{8l^2(1-\nu^2)}, \quad (2.43)$$

где  $\Theta$  – угол изгиба участка фольги;  $l$  – длина участка, на котором кристалл изогнут на угол  $\Theta$ ;  $h$  – толщина фольги;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu=0,3$  – коэффициент Пуассона.

Увеличение степени деформаций (приближение к зоне разрушения образца) приводит к следующему:

- 1) растет скалярная плотность дислокаций;
- 2) повышается величина упругих полей напряжений и изменяется их распределение в материале.

Об этом можно судить по изменению формы и поперечных размеров изгибных контуров. В исходном состоянии изгибные контуры имеют диффузный вид и простираются через все зерно от границы до границы. С ростом степени деформации очертания контуров становятся более резкими, форма – более сложной. В зоне разрыва в материале наблюдаются контуры, расположенные внутри зерен и замыкающиеся на себя. Результаты измерений сведены в табл. 2.2, где номера фольги соответствуют номерам разрезов на рис. 2.27. В таблице 2.2:

$$\sigma_{\text{пласт}} = \alpha m G b \langle \rho \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad (2.44)$$

$\alpha m$  – ориентационный множитель 0,5;  $G$  – модуль сдвига 8400 кгс/см<sup>2</sup>;  $b$  – вектор Бюргерса скользящей дислокации, равный  $2,5 \cdot 10^{-7}$  мм.

Таблица 2.2

№ фольги	$\langle \rho \rangle \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$		$\rho_z \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$		$\sigma_{\text{упр}}, \text{ МПа}$		$\sigma_{\text{пласт}}, \text{ МПа}$	
	Феррит	Перлит	Феррит	Перлит	Феррит	Перлит	Феррит	Перлит
2	7,2	9,1	8,0	9,3	6,0	7,0	2,8	3,1
3	5,2	9,8	7,5	10,0	4,0	7,6	2,7	3,2
5	5,5	8,8	7,4	8,2	3,2	6,8	2,7	2,9
7	2,6	3,9	6,2	7,0	1,8	2,5	2,5	2,6
9	2,5	2,6	5,0	5,2	2,2	2,4	2,2	2,2
13	2,0	2,0	4,0	4,0	2,0	1,8	2,0	2,0

$$\sigma_{ур} = k \rho_{\pm} \frac{1}{l}, \quad (2.45)$$

где  $l$  – ширина изгибного контура;  $k$  – коэффициент материала;  $\langle \rho \rangle$  – скалярная плотность дислокаций;  $\langle \rho_{\pm} \rangle$  – избыточная плотность дислокаций.

Рентгеноструктурные исследования показали, что величина  $\sigma_{II}$  по длине образца изменяется неравномерно, достигая максимального значения в месте разрыва [33].

По результатам измерений построены диаграммы, на которых основные изменения микронапряжений  $\sigma_{II}$  происходят на длине, равной одному диаметру стержня (рис. 2.28). Причем уровень остаточных напряжений на расстоянии  $1/10d$  от места разрыва в четыре раза превысил уровень остаточных напряжений на расстоянии одного диаметра. Напряжения  $\sigma_{II}$  стабилизировались на расстоянии  $3-7d$  от места разрыва.

Анализ далекодействующих полей напряжений показал, что величина их в перлитных зернах несколько выше, чем в

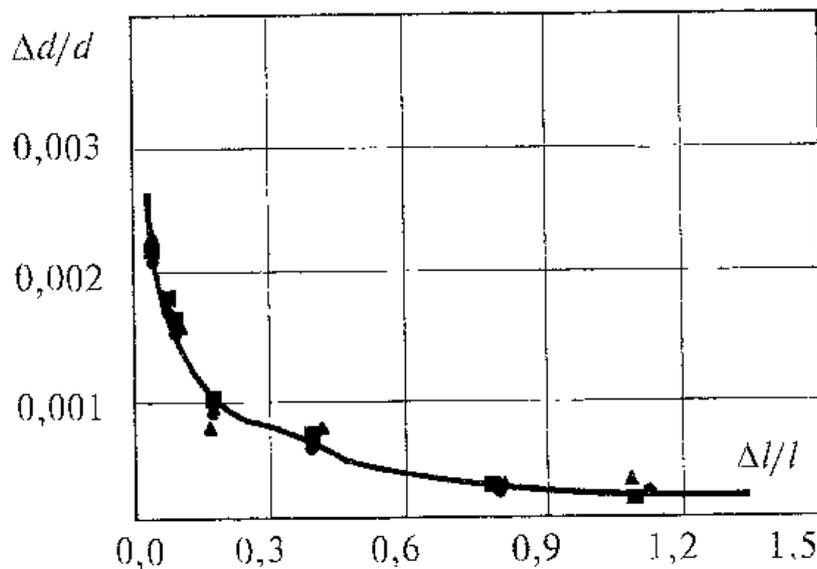


Рис. 2.28. Диаграмма осевых остаточных деформаций для стержня диаметром 10 мм [34]

ферритных. Характер распределения далекодействующих полей напряжений по длине совпал с распределением  $\sigma_{II}$ .

Диаграммы микродеформаций  $\varepsilon'' = \Delta d/d$  для стержней, извлеченных из балки-стенки, показаны на рис. 2.29. Сопоставления величин напряжений и закона их распределения по длине стержня показали, что с увеличением интенсивности растяжения диаграммы деформаций трансформируются. Так, при нагрузках, вызывающих пластические деформации до образования шейки, характер распределения может быть представлен кривой второго порядка. При нагрузках, вызвавших появление шейки или разрушение стержня, диаграмма распределения деформаций от места разрыва стержня может быть представлена кривыми более высоких порядков.

Одним из вопросов при анализе результатов экспериментов был вопрос о влиянии стесняющей бетонной среды на характер распределения и величину деформаций в арматуре. Сопоставление результатов, полученных для стерж-

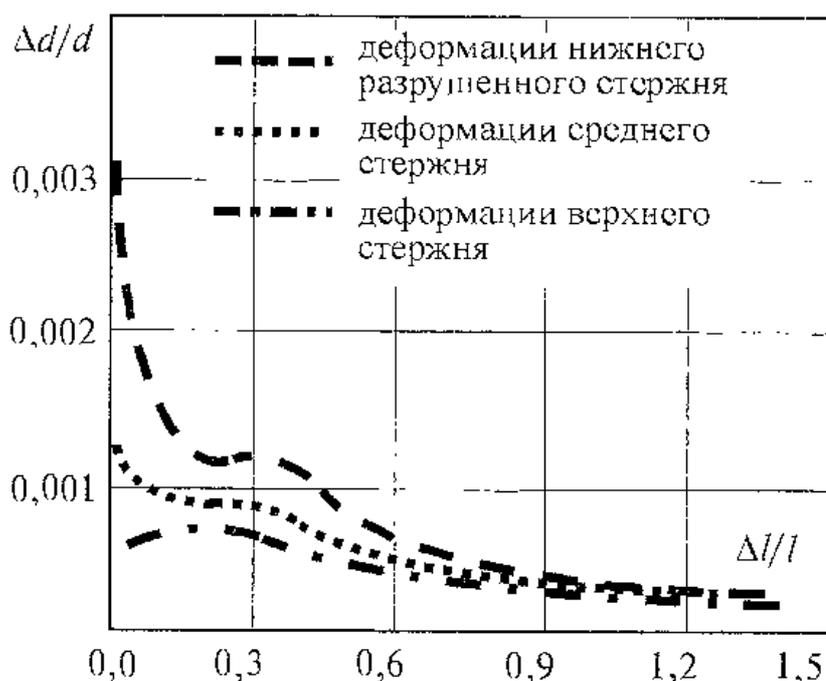


Рис. 2.29. Диаграмма осевых относительных деформаций [34]

ней, испытанных на разрывной машине, и стержней, извлеченных из бетона балки, показало отсутствие влияния бетона на относительные величины деформаций и на характер их распределения в зоне значительных пластических деформаций или разрушения.

## 2.6. Железобетонные конструкции

В обычных железобетонных конструкциях под действием статических или динамических нагрузок возникают напряженные состояния, определяемые решением уравнений равновесия с соблюдением начальных и граничных условий. Как правило, в теле железобетонной конструкции возникает сложное напряженное состояние, в соответствии с которым производят конструирование. Наличие продольной и поперечной арматуры оказывает существенное влияние на характер диаграмм деформирования бетона. Развитие вопроса о свойствах бетона в условиях стесненных деформаций при статическом и динамическом нагружении требует дополнительных исследований [69].

Эксперименты при динамическом сжатии, проведенные на призмах, показали, что армированный бетон работает пластичнее неармированного [83].

При анализе диаграмм деформирования было отмечено, что восходящая ветвь  $\sigma$ – $\varepsilon$  для неармированного бетона имеет больший градиент, в то время как для армированных образцов уже на ранней стадии нагружения наблюдается отклонение восходящей ветви от прямой линии. Более пластичная работа армированного бетона обусловлена наличием косвенной арматуры, сдерживающей его поперечные деформации. Деформации, при которых напряжения в бетоне достигают максимума, в значительной степени зависят от процента косвенного армирования призм и в меньшей степени – от скорости деформирования. По данным опытов, они изменяются от 1,7 до 3,5‰ [83, 84]. Во

всех опытах была получена нисходящая ветвь. Падение напряжений в бетоне на нисходящем участке практически не зависило от скорости деформирования, а определялось в большей степени процентом косвенного армирования. Чем выше процент поперечного армирования, тем более пологой была ниспадающая ветвь. Предельные деформации бетона в зависимости от процента армирования призм изменялись от 6 до 12‰ [75, 83].

В процессе исследований изучался вопрос о динамическом упрочнении бетона при сжатии и о влиянии процента армирования на характер изменения коэффициента динамического упрочнения. Результаты показаны на рис. 2.30, из которого видно, что процент поперечного армирования практически не оказывает влияния на закон упрочнения. В работе [58] приведены результаты экспериментальных исследований призм размером  $20 \times 20 \times 80$  см, армированных в

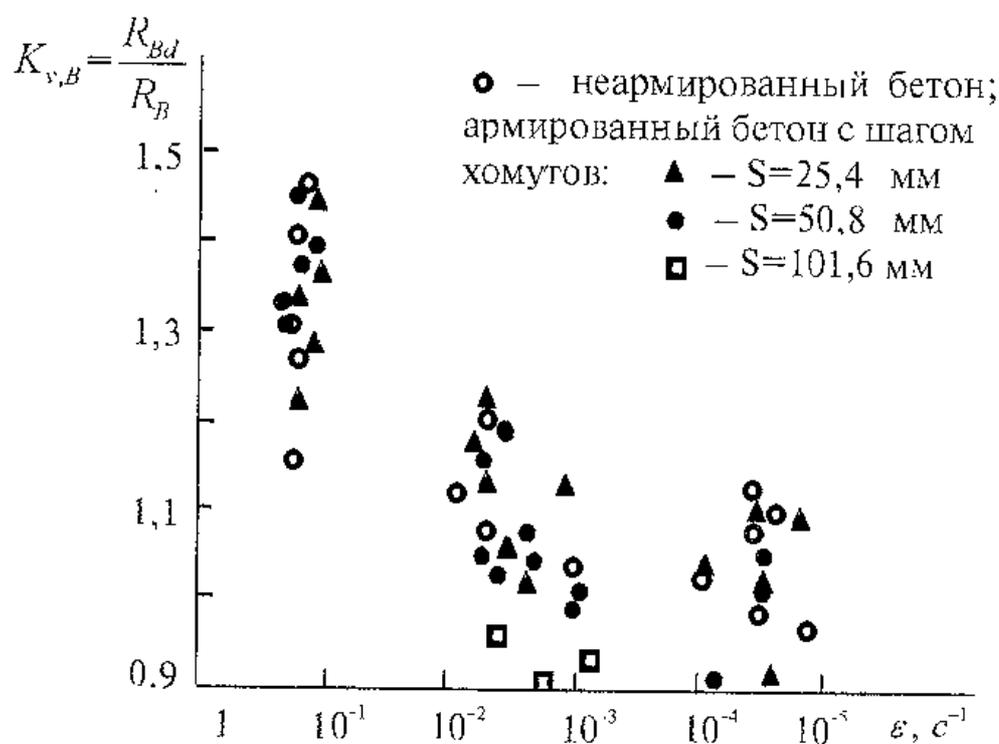


Рис. 2.30. Зависимость динамической прочности бетона от скорости деформирования [83]

продольном ( $m_x=0-3,3\%$ ) и поперечном ( $m_{xy}=2-4,5\%$ ) направлениях.

Эксперименты проведены на действие статических и кратковременных динамических нагрузок. Диаграммы деформирования стали и бетона показаны на рис. 2.31, из рассмотрения которого видно, что с увеличением поперечного армирования возрастала несущая способность элементов. Авторами дана последовательность и характер развития деформаций призм. Показано влияние поперечного армирования на процесс трещинообразования. Наличие поперечной арматуры отдалало начало трещинообразова-

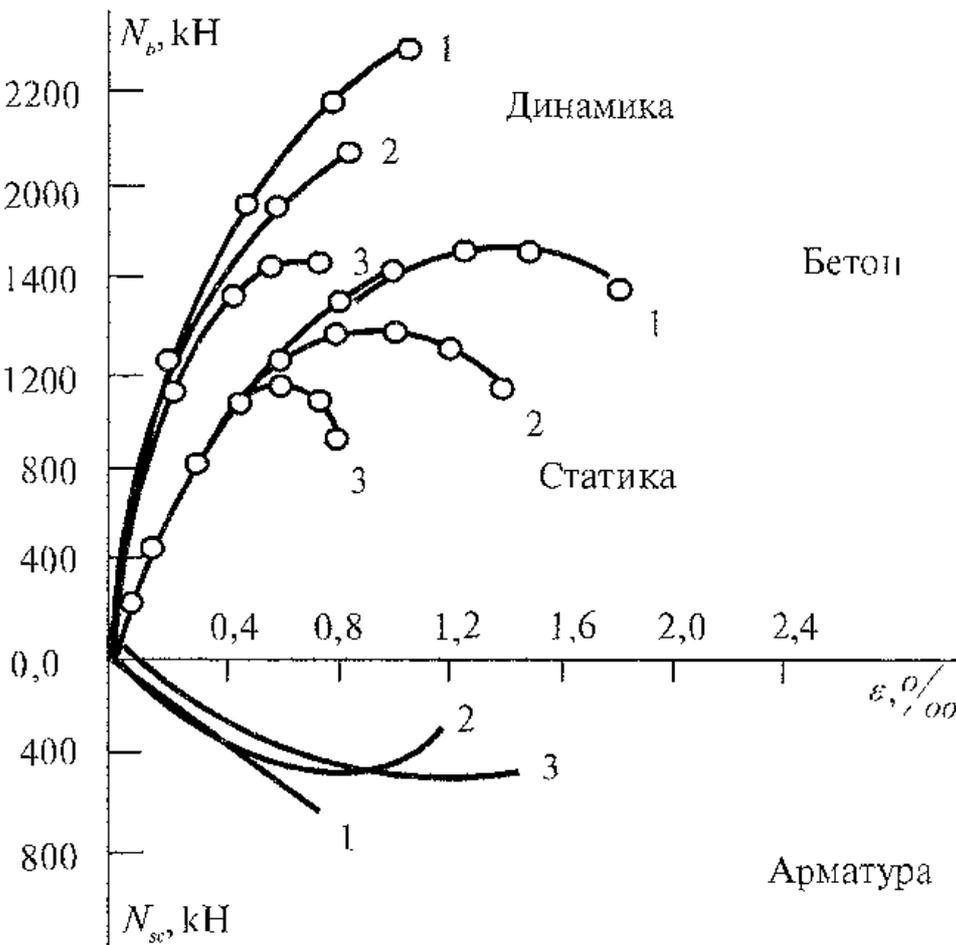


Рис. 2.31. Диаграммы сопротивления бетона и арматуры: 1 —  $m_{xy}=5,4\%$ ; 2 —  $m_{xy}=3,1\%$ ; 3 —  $m_{xy}=2,0\%$ ; 4 —  $m_{xy}=0$  [58]

ция. И чем выше был процент косвенного армирования, тем в большей степени поперечная арматура препятствовала развитию поперечных деформаций, сдерживая процесс разрушения. Динамическое нагружение призм проводилось на копре. Время действия нагрузки изменялось в пределах 6–9 мс. Скорость продольных деформаций изменялась в пределах  $\dot{\varepsilon}=5 \text{ с}^{-1}$ . Динамические диаграммы деформирования по характеру были близки к статическим диаграммам. При этом прочность ядра сечения бетона возросла на 40%, а предел текучести стержней поперечных сеток увеличился на 10%.

Анализ работы косвенной арматуры в изгибаемых элементах показал, что армирование железобетонных изгибаемых конструкций с усилением бетона сжатой зоны косвенной арматурой качественно изменяло характер их сопротивления [57]. Значительно повышалась деформативность и энергоемкость конструкций. Применение косвенного армирования может повысить несущую способность балок с ограниченными размерами поперечного сечения.

Исследования железобетонных балок на действие статических и кратковременных динамических нагрузок, проведенные А.И. Плотниковым, позволили определить полные диаграммы деформирования и получить функции сопротивления для железобетонных изгибаемых элементов [55, 56]. Исследования статической работы балок проведены на основе нелинейной природы деформаций бетона и арматуры [28]. Динамические диаграммы деформирования были получены с учетом результатов исследований Н.Н. Попова, Б.С. Расторгуева, А.В. Дмитриева [22, 64, 65].

Предложенный Б.С. Расторгуевым [65] метод получения диаграмм деформирования изгибаемых и внецентренно сжатых элементов основан на использовании полных диаграмм  $\sigma$ – $\varepsilon$  бетона и арматуры. Диаграмма сжатого бетона принята дробно-линейной для восходящей ветви и линейной для нисходящей. В стадии с трещиной расчетным при-

нято сечение, в котором усилия в растянутой арматуре равны средним на участке между трещинами и справедлив закон плоских сечений. Введение напряжений в растянутой зоне бетона позволило усреднить усилия в растянутой арматуре, поэтому отпала необходимость в использовании коэффициента неравномерности деформаций  $\psi_s$ . При образовании трещины  $\sigma_{bt} = R_{bt}$ . Деформации бетона и арматуры выражены через кривизну сечения  $\varkappa = 1/r$ . Смена различных деформированных состояний сечения определяется характеристическими кривизнами при образовании трещин или при достижении бетоном деформации  $\varepsilon_{bR}$ :

$$\chi_j x_j = \check{\chi}_j \xi_j = \varepsilon_{bR},$$

$$\chi_{крс} (h - x_{крс}) = \check{\chi}_{крс} (\check{h} - \xi_{крс}) = \varepsilon_{btu},$$

при достижении бетоном предельной деформации  $\varepsilon_{bt}$ ,  $\chi_u x_u = \check{\chi}_u \xi_u = \varepsilon_{bt}$ . Проведенные многочисленные сопоставления результатов расчетов с экспериментальными данными, полученными при действии статических и кратковременных динамических нагрузок, показали хорошее совпадение.

Известно, что и продольное и поперечное армирование оказывает существенное влияние на форму диаграмм деформирования бетона. Это вызывает необходимость выбора адекватной аналитической зависимости  $\sigma - \varepsilon$ .

В работе [83] предложена зависимость  $\sigma - \varepsilon$ , достаточно полно учитывающая влияние продольного и косвенного армирования, а также скорость деформаций бетона:

$$\sigma_b = R_{b,d} \frac{\alpha_1 x_1 + (\alpha_2 - 1) x_1^2}{1 + (\alpha_1 - 2) x_1 + \alpha_2 x_1^2}, \quad (2.46)$$

где  $x_1 = \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_{R1}}$  — относительная величина деформации;

$R_{s,d} = R_b (1,38 + 0,08 \log \dot{\varepsilon})$  при  $\dot{\varepsilon} > 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  или

$R_{s,d} = R_b(1,14 + 0,03 \log \dot{\varepsilon})$  при  $\dot{\varepsilon} < 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  — динамическая прочность бетона.

Коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  отражают влияние поперечного армирования и скорости деформирования на изменение формы диаграммы бетона:

$$\alpha_1 = \frac{E_b \varepsilon_{R1}}{R_{b,d}}, \quad (2.47)$$

$$\varepsilon_{R1} = \varepsilon_R(1 + 0,4q),$$

где  $\varepsilon_{R1}$  — деформации армированного бетона при максимальных значениях напряжений;  $q$  — коэффициент, отражающий влияние поперечного армирования на форму диаграммы бетона:

$$q = \left( 1,4 \frac{A_{b1}}{A_b} - 0,45 \right) \frac{\left( \frac{S_0}{S} \right)^{-1}}{1 + 0,0028/P}, \quad (2.48)$$

где  $A_b$  — общая площадь бетона при сжатии;  $A_{b1}$  — площадь сжатого бетона, ограниченного арматурой;  $S$  — шаг поперечной арматуры;  $S_0$  — коэффициент, равный удвоенной толщине элемента;  $P$  — коэффициент,  $P = A_{sw}/b \cdot S$ .

Деформации неармированного бетона при максимальных значениях напряжений:

$$\varepsilon_R = (1,3 - 0,061 \log \dot{\varepsilon} + 0,01 R_b) \cdot 10^{-3} \quad (2.49)$$

при  $\dot{\varepsilon} > 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ,

$$\varepsilon_R = (0,5 - 0,23 \log \dot{\varepsilon} + 0,01 R_b) \cdot 10^{-3} \quad (2.50)$$

при  $\dot{\varepsilon} < 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ .

Коэффициент  $\alpha_2$  принимается в виде:

$$\alpha_2 = [S_1 + S_1(\alpha_1 - 2)\alpha_3 - \alpha_1\alpha_3] = \frac{1}{1 - S_1}, \quad (2.51)$$

где  $S_1 = \frac{\sigma_{H1}}{R_b}$  — коэффициент;  $\sigma_{H1} = \sigma_H(1 + 0,1q)$  — предельные напряжения на ниспадающей ветви диаграммы бетона с учетом армирования;  $\sigma_H = \left[0,34 \left(\frac{R_b^o}{6,9}\right)^{0,5}\right] \cdot R_b^o$  — напряжения на ниспадающей ветви диаграммы неармированного бетона, соответствующие предельным деформациям.

$$\alpha_3 = \varepsilon_{bu1} \cdot \varepsilon_{R1}, \quad (2.52)$$

где  $\varepsilon_{bu1} = \varepsilon_{bu}(1 + 1,3q)$  — предельные деформации армированного бетона.

Ниже приводятся формулы предельных деформаций неармированного бетона:

$$\varepsilon_{bu} = \left[0,7 - 6 \left(\frac{R_b}{6,9}\right)^{-0,7} \cdot \log \dot{\varepsilon}\right] \cdot 10^{-3}$$

при  $\dot{\varepsilon} > 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ,

$$\varepsilon_{bu} = \left[0,7 - 1,25 \left(\frac{R_b}{6,9}\right)^{-0,7} \cdot \log \dot{\varepsilon}\right] \cdot 10^{-3}$$

при  $\dot{\varepsilon} < 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ .

(2.53)

Сопоставление расчетов, проведенных с использованием приведенных зависимостей, с результатами опытов показало удовлетворительное совпадение формы диаграмм, показанных на рис. 2.32, 2.33.

В практике динамического расчета железобетонных конструкций изменение свойств бетона учитывается коэффициентом динамического упрочнения  $K_{v,b}$ . Величина коэффициента динамического упрочнения бетона определяется многими факторами, включающими состав и со-

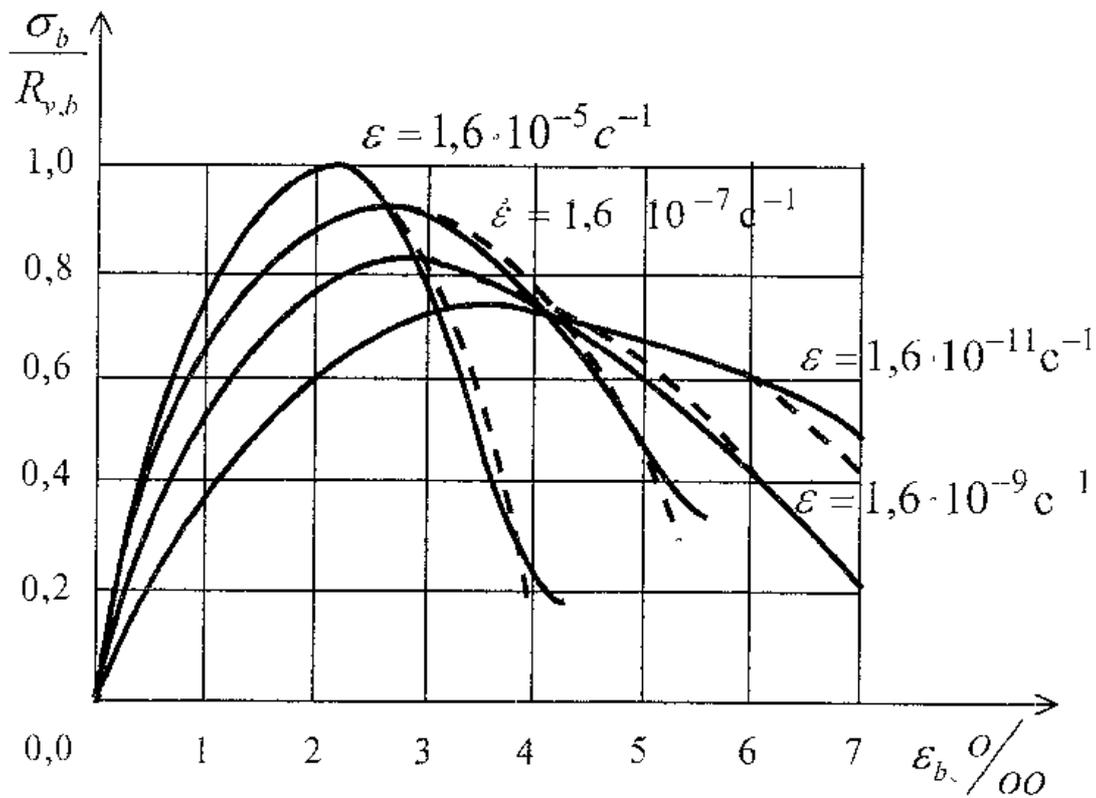


Рис. 2.32. Диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  неармированного бетона [78]  
 - - - - расчет по формуле 2.46; ——— эксперимент

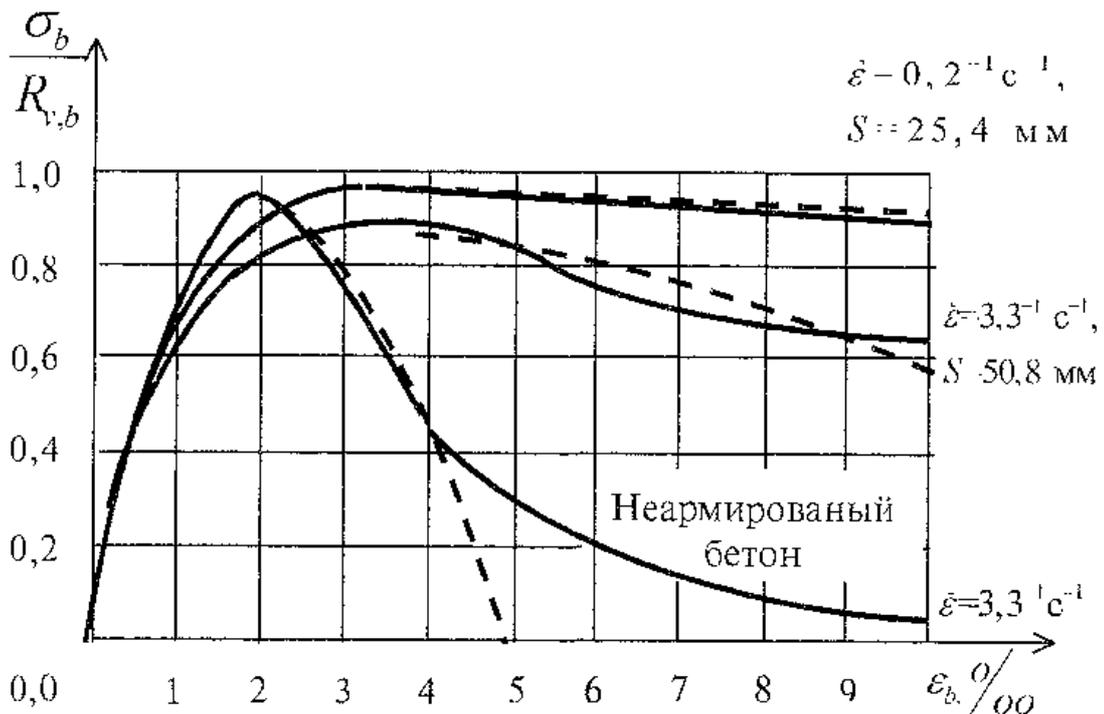


Рис. 2.33. Диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  бетона с косвенным армированием  
 - - - - расчет по формуле 2.46; ——— эксперимент [78]

стояние бетона, вид динамической нагрузки и характер напряженного состояния конструкции и др.

Значение коэффициента  $K_{v,b}$  принимается по результатам многочисленных экспериментальных исследований [2, 21, 36, 59, 83]. Динамическую прочность бетона определяют умножением предела прочности бетона при статическом сжатии на коэффициент динамического упрочнения.

## 2.7. Усилия, возникающие в наклонной трещине

### 2.7.1 Силы зацепления при смещении берегов трещины

При возникновении в железобетонной конструкции наклонной трещины и смещении ее берегов под действием внешних сил возникает сложная картина напряженного состояния. В опытах А.А. Гвоздева, А.С. Залесова и И.А. Титова поперечная составляющая сил зацепления в наклонном сечении для балок без хомутов составила 40–50%, для балок с хомутами — до 17% от величины полной поперечной силы. Эксперименты В.П. Митрофанова показали, что силы зацепления в наклонной трещине составляют 7–24% от величины поперечной силы в сечении [48].

Согласно полученным данным, вдоль берегов трещины действуют касательные напряжения  $\tau$ . Перпендикулярно берегам трещины возникают нормальные напряжения  $\sigma$ . Величины касательных и нормальных напряжений на поверхностях отрыва зависят от ширины раскрытия трещины и сдвига ее граней. Эта тема широко рассмотрена в работах отечественных и зарубежных исследователей [9, 11, 12, 48, 80, 81, 86, 88–90]. Она актуальна в приложениях к задачам статического и динамического расчета железобетонных конструкций.

Испытания бетонных блоков с искусственной трещиной постоянной ширины на сдвиг показали, что через зацепляющиеся выступы передаются значительные касательные усилия.

тельные напряжения, достигающие величин 0,8–2,0 МПа [80, 81]. И. Taylor [89] в экспериментах с бетонными блоками получил близкие результаты, согласно которым предельные значения касательных напряжений  $\tau$  составили 0,3–1,4 МПа и возрастали с увеличением марки бетона ( $\Delta_{сг}$  – сдвиг граней трещины,  $a_{сгс}$  – ширина раскрытия трещины). Нормальные напряжения в трещине, достигнув величин 0,1–0,4 МПа, резко уменьшались и становились перед разрушением растягивающими.

Изменения размеров щебня слабо влияли на прочность зацепляющихся выступов в трещине. Доля сил зацепления в величине действующей поперечной силы составила 33–50%, что практически совпадает с результатами опытов А.А. Гвоздева, А.С. Залесова и И.А. Титова. Теория расчета железобетонного элемента с трещиной может быть основана на реализации расчетной схемы, отражающей изгибно-сдвиговой характер деформаций. Согласно сложившимся представлениям о механизме появления и раскрытия трещины в бетоне, разработана теория прочности бетонных «зубьев» [48, 86, 88, 90].

Величины касательных и нормальных напряжений, возникающих при подвижке трещины, могут быть определены из условий:

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma_{pu} \left\{ \sum a_y (\rho_k, D_{max}, \Delta, a) + \mu \sum a_x (\rho, D_{max}, \Delta, a) \right\}, \\ \sigma &= \sigma_{pu} \left\{ \sum a_x (\rho_k, D_{max}, \Delta, a) - \mu \sum a_y (\rho, D_{max}, \Delta, a) \right\}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

где  $a_x, a_y$  – соответственно параллельная и перпендикулярная проекции трещины;  $\sigma_{pu}$  – напряжение текучести матрицы;  $\mu$  – коэффициент трения;  $D_{max}$  – максимальный размер зерна заполнителя;  $\rho$  – коэффициент, равный отношению объема заполнителя к общему объему бетона.

В практике расчета для определения касательных напряжений в трещине используется формула В.П. Митрофанова, интерпретирующая условия (2.54) в виде:

$$\frac{\tau}{R_b} = 0,0244 K_3 (4,4 - 3,18) \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{Z_T}\right)^2}, \quad (2.55)$$

где  $K_3$  – коэффициент влияния вида и марки бетона;  $x$  – координата трещины;  $Z_T = (h_0 - h_b) \sin \alpha$  – длина опасной наклонной трещины; 0,0244 – коэффициент плотности выступов шероховатости для тяжелого бетона;  $\alpha$  – угол наклона трещины к продольной оси;  $h_0$  – высота бетонного клина.

J.C. Waltraewen получил выражения для касательных и нормальных напряжений в трещине, хорошо сочетающиеся с результатами экспериментов [90].

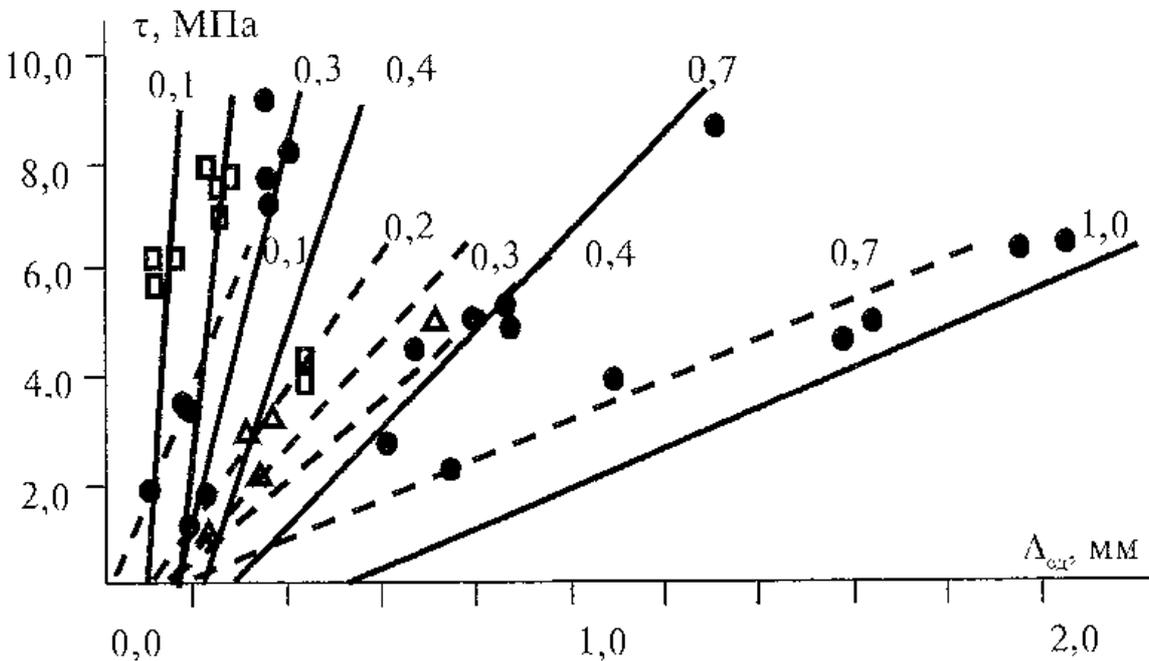


Рис. 2.34. Зависимость касательных напряжений от ширины раскрытия трещины ( $a_{cr} = 0,1, 0,2 - 1,0$  мм) и сдвига ее берегов ( $\Delta_{ск}$ ): ● □ △ – эксперимент [90]; --- -- расчет по (2.56) для бетона марки  $\bar{R} = 56,1$  МПа; — — — для бетона марки

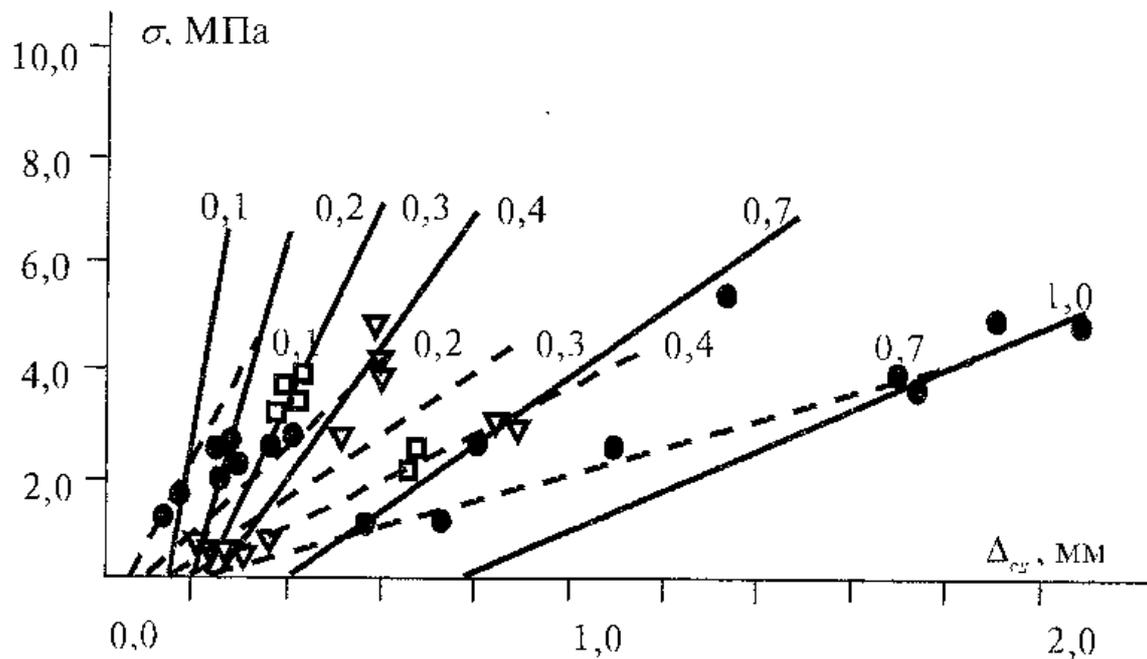


Рис. 2.35. Зависимость нормальных напряжений от ширины раскрытия трещины ( $a_{ср} = 0,1, 0,2-1,0$  мм) и сдвига ее берегов ( $\Delta_{сд}$ ): ● □ ▽ эксперимент [90]; расчет по (2.56): — — — для бетона марки  $\bar{R}=56,1$  МПа; - - - для бетона марки  $\bar{R}=13,4$  МПа

$$\tau = \frac{-\bar{R}}{30} + \left\{ 1,8a_{ср}^{-0,8} + \left[ 0,234a_{ср}^{-0,707} - 0,2 \right] \cdot \bar{R} \right\} \Delta_{сд}, \text{ Н, мм,} \quad (2.56)$$

$$\sigma = \frac{-\bar{R}}{20} + \left\{ 1,35a_{ср}^{-0,63} + \left[ 0,191a_{ср}^{-0,522} - 0,15 \right] \cdot \bar{R} \right\} \Delta_{сд}, \text{ Н, мм,}$$

где  $\bar{R}$  — кубиковая прочность бетона.

При составлении уравнений были учтены факторы, характеризующие материал и нагрузку. Проведена статистическая оценка поверхности контакта трещины. Сопоставление результатов расчета по формуле (2.51) и эксперимента показаны на рис. 2.34, 2.35.

### 2.7.2. Сопротивление продольной арматуры срезу

Анализ напряженно-деформированного состояния, а также результаты экспериментов показали, что в зоне чистого изгиба в нормальном сечении возникают предельные деформации растянутого бетона, формируются зоны предразрушения, и в наиболее несовершенной структуре бетона защитного слоя стартуют трещины нормального отрыва. Продольная арматура воспринимает возникшие в сечении усилия растяжения и сдерживает развитие трещин при постепенно нарушающемся сцеплении арматуры с бетоном. Перераспределение усилий в сечении при возрастании внешней нагрузки приводит к формированию локальных зон предразрушения, в сжатом бетоне с высокой концентрацией — к образованию дефектов структуры, как естественных, так и возникших в результате силового воздействия, формирования зон перенапряжения и старта трещин поперечного сдвига, образующихся при высоких, близких к предельным по несущей способности, уровнях внешнего нагружения.

Сопротивление арматуры срезу в трещине по разным оценкам изменяется в пределах 10–40% от величины поперечной силы в сечении. Исследования показали зависимость касательных напряжений в арматурном стержне от процента армирования, гранулометрического состава, марки бетона и других факторов, включая величину нагрузки, время ее действия и цикличность [90].

И.И. Карпенко, изучая работу арматуры в сечении с трещиной, пришел к выводу, что величина сопротивления арматуры срезу в большей степени зависит от угла пересечения трещиной арматуры [27]. Исследования проводились на железобетонных пластинах с фиксированной трещиной.

Анализируя результаты других ученых, J.C. Waltraewen показал, что в наибольшей степени «нагельный» эффект

проявляется при текучести арматуры, предложив зависимости по определению сопротивления сдвигу арматуры в стадии пластических деформаций [90]:

$$F_{\tau} = 10(a_{cre} + 0,2)^{-1} \Delta_{сд} d^{1,75} \bar{R}^{0,38}, \text{ Н, мм.} \quad (2.57)$$

Зависимость касательного напряжения в арматуре от марки бетона, процента армирования и других факторов приведена на рис. 2.36. В большей степени «нагельный» эффект проявляется при появлении пластических дефор-

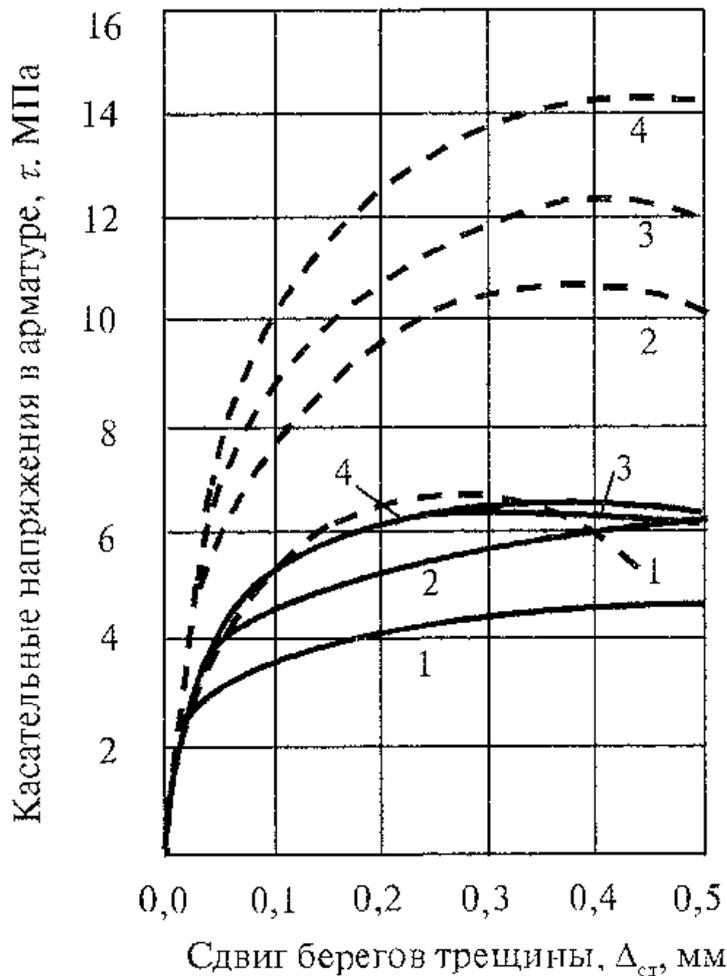


Рис. 2.36. Диаграммы касательных напряжений  $\tau-\Delta_{сд}$  в арматуре диаметром  $\varnothing \leq 16$  мм [90]: — — — —  $\bar{R}=56$  МПа; —————  $\bar{R}=20$  МПа; 1 —  $m=0,56\%$ ; 2 —  $m=1,12\%$ ; 3 —  $m=1,68\%$ ; 4 —  $m=2,23\%$

маций арматуры. На основе анализа опытов J.A. Hofbeck и др. [91], J.C. Walraven предложил зависимость по определению сопротивления сдвигу арматуры в пластической стадии в виде:

$$\tau_u = c_1 (\mu \sigma_{sy})^{c_2}, \text{ МПа}, \quad (2.58)$$

где  $c_1 = \bar{R}^{0,36}$ , МПа;  $c_2 = 0,09 \bar{R}^{0,46}$ , МПа. Отношение  $\frac{\tau_{u, \text{эксп}}}{\tau_{u, \text{теор}}}$  составило 0,98 (рис. 2.37).

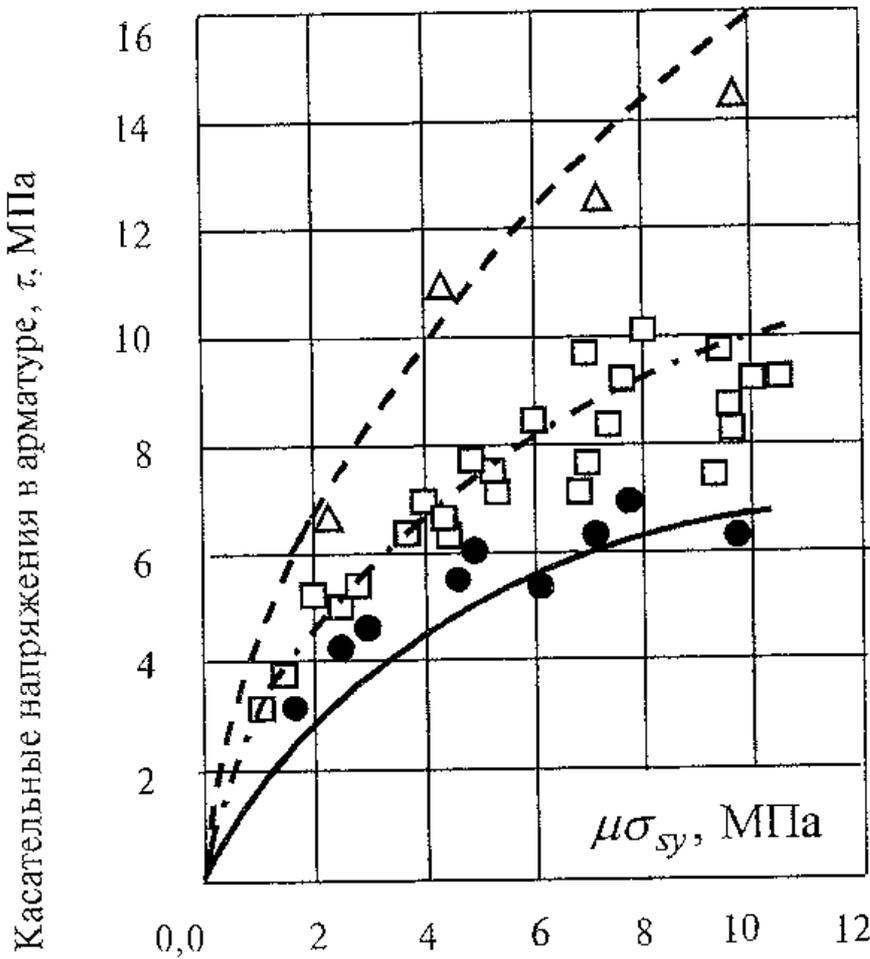


Рис. 2.37. Диаграммы касательных напряжений  $\tau$  в стадии пластического деформирования.

По (2.58) — — — —  $\bar{R}=56$  МПа; — · — · —  $\bar{R}=32$  МПа;

—————  $\bar{R}=20$  МПа;  $\Delta$ ,  $\square$ ,  $\bullet$  — опыт [90]

Опыты показывают, что в процессе разрушения деформации арматуры достигают значительных величин и могут быть определены лишь косвенным образом, так как непосредственные измерения весьма затруднительны.

Задачу количественной оценки напряженного состояния в зоне пластических деформаций или разрушения арматуры можно разрешить по данным об остаточных деформациях, выявленных путем непосредственных измерений. Изучение условий совместной работы растянутой арматуры с бетоном изгибаемых элементов на стадии, близкой к разрушению, проводились Ю.П. Гущей [18, 49]. Выполненные работы позволили выявить характер распределения остаточных деформаций в арматуре по длине стержней в зависимости от вида арматуры и уровня нагружения элементов.

Исследования условий совместной работы растянутой арматуры в изгибаемых элементах при кратковременном динамическом нагружении показали, что во всех испытанных образцах в предельной стадии вместе с нормальными трещинами имели место и наклонные трещины, что характеризует изгибно-сдвиговый механизм сопротивления конструкций [42, 43].

Для детального изучения картины деформаций сечения с трещиной железобетон рассматривают как систему, состоящую из двух элементов – бетона и дискретно расположенных стержней арматуры [27]. При этом бетонная среда рассматривается, как правило, при объемном напряженном состоянии. Модель арматурного стержня и зона его контакта с бетоном определяются условиями поставленной задачи.

Традиционные теории сцепления базируются на задании в той или иной форме эмпирической характеристики контакта (закона сцепления), выражающей связь между взаимными смещениями (сдвигами) арматуры и бетона и

контактными касательными напряжениями (рис. 2.36) [10, 27, 53, 73, 74, 90].

Основываясь на физических предпосылках модели деформирования железобетона с трещинами [27], заметим, что в трещине все усилия передаются через арматуру, за исключением части усилий, воспринимаемых остаточными связями в бетоне по берегам трещины. Интенсивность затухания напряжений в арматуре определяется силами сцепления арматуры с бетоном, то есть степенью участия бетона в восприятии действующих сил.

Помимо нормальных напряжений в арматурном стержне в трещине возникают касательные напряжения, развивающиеся на ограниченном участке по длине. Сдвигка берегов трещины приводит к искривлению продольной оси стержня и возникновению изгибающих моментов. Экспериментальные оценки деформаций бетона и арматуры в трещине могут быть приняты к рассмотрению на основании данных о структурных изменениях материала, полученных путем непосредственных измерений. Современные исследования основываются на проведении экспериментальных и теоретических работ, в основу которых положены методики экспериментальной физики по оценке структурных изменений в материалах и получению величин этих изменений. Имеются в виду эксперименты и сопровождающие их расчеты по определению напряженно-деформированных состояний железобетонных образцов с трещиной, а также детальное рассмотрение структуры арматурного стержня в зонах появившихся пластических деформаций и разрушений. Имеются также в виду напряженно-деформированные состояния бетонной среды на поверхности исследуемых элементов и детальное рассмотрение структуры материала в окрестности трещины в процессе разрушения.

Уточнения напряженно-деформированного состояния арматурного стержня при испытании на «чистый» сдвиг

получены авторами для стержня диаметром 12 мм, класса А-III (ст. 35 ГС). Прочность стержня на разрыв составила 540 МПа.

Эксперименты проводились на гидравлическом прессе. Для испытаний на «чистый сдвиг» было изготовлено приспособление, выполненное в виде толстостенного полого цилиндра с внутренним диаметром равным диаметру арматуры, и внешним диаметром, 60 мм. По длине толстостенный цилиндр разрезан на три части. Две крайние из них крепились на опоре пресса. Средняя часть была подвижной и предназначалась для передачи сдвигающей силы пресса на стержень, вставленный в отверстие приспособления. Таким образом, перерезывающие силы прикладывались по двум плоскостям.

Стержень доведен до разрушения при нагрузке 715 кН. В процессе разрушения поверхности сдвигающих частей толстостенного цилиндра плотно прилегли друг к другу. Для сглаживания концентраций напряжений режущие кромки сдвигающих поверхностей были округлены радиусом, равным радиусу арматурного стержня.

Исследования напряженно-деформированного состояния проводились после разрушения стержня. На рис. 2.38 показана схема разрезки, согласно которой из стержня вырезались тонкие пластинки (фольги).

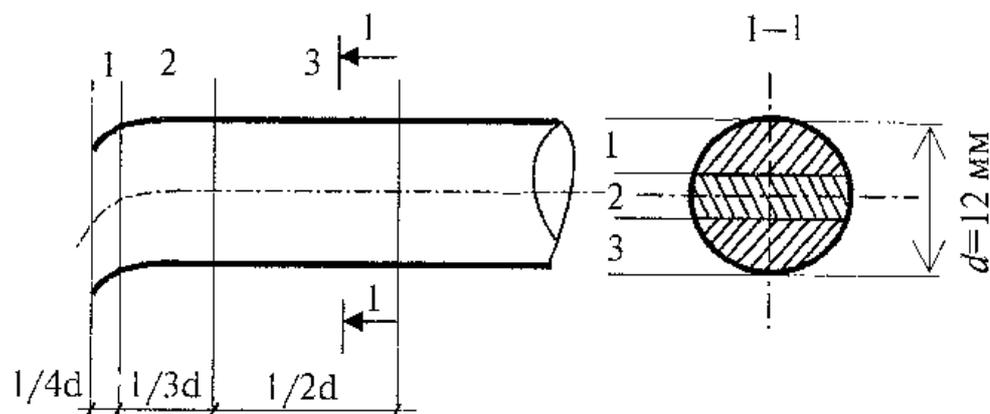


Рис. 2.38. Схема разрезки стержня, разрушенного сдвигом

Были определены остаточные деформации стали, ориентированные вдоль оси стержня: продольные деформации  $\varepsilon_x$  и поперечные деформации  $\varepsilon_y$ . Продольные деформации определялись при изучении нормальных к продольной оси поверхностей фольг. Для определения поперечных деформаций измерения проводились на сечениях, разделяющих стержень по высоте.

Методами металлографии и электронной дифракционной микроскопии тонких фольг показано, что сталь в исходном состоянии являлась морфологически двухфазным материалом и состояла из смеси зерен феррита (рис. 2.39 а) и перлита (рис. 2.39 б). В ферритных зернах наблюдалась сетчатая дислокационная субструктура, скалярная плотность дислокаций в которой составляла  $\sim 1,5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ . В ферритных прослойках перлитных зерен дислокационная субструктура в виде хаоса имела плотность дислокаций  $\sim 10^9 \text{ см}^{-2}$ . В пластинах цементита дислокации практически не наблюдались.

Механические испытания материала привели прежде всего к изменению дислокационной субструктуры в ферритной составляющей стали. Вблизи зоны разрушения (3 мм) в ферритных зернах сформировалась фрагментированная дислокационная субструктура (рис. 2.40 а). Азиму-

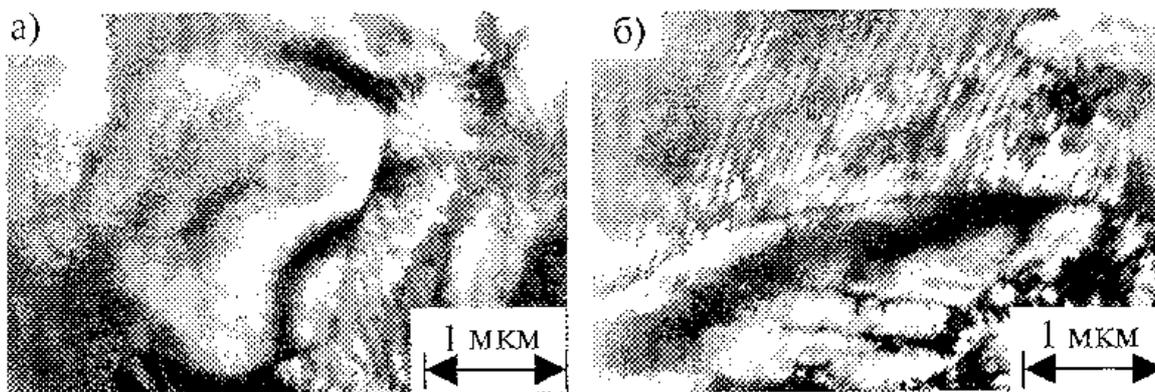


Рис. 2.39. Структура стали в исходном состоянии [34]

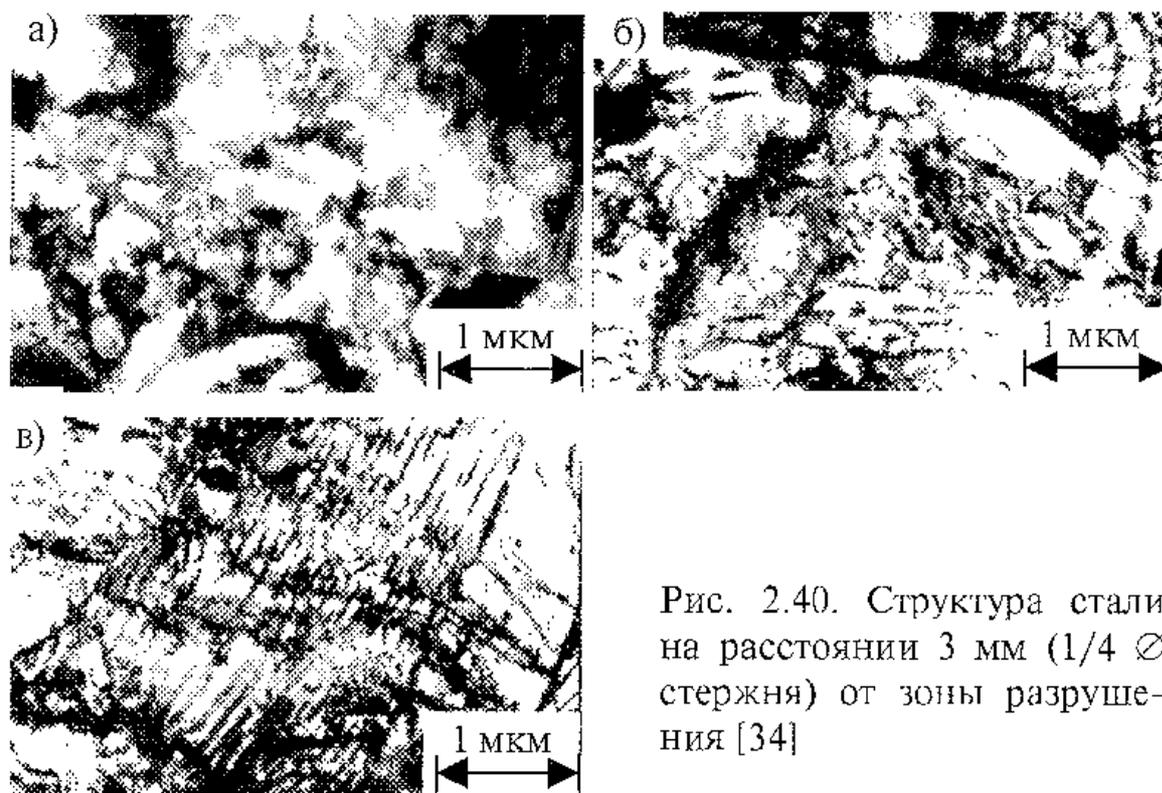


Рис. 2.40. Структура стали на расстоянии 3 мм ( $1/4 \text{ } \varnothing$  стержня) от зоны разрушения [34]

тальная составляющая угла полной разориентировки [72] составила  $\sim 5$  град.

В перлитных зернах тип дислокационной субструктуры не изменился, однако скалярная плотность дислокаций увеличилась до  $2,5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$  (рис. 2.40 б, в). Увеличение скалярной плотности дислокаций сопровождалось разрушением пластин цементита — пластины перерезались, растаскивались движущимися дислокациями. Края пластин опутываются дислокациями. Разрушение пластин цементита сопровождалось их растворением в основном за счет ухода атомов углерода из кристаллической решетки карбида в ядра дислокаций [17].

На расстоянии  $\sim 7$  мм от зоны разрушения изменение дислокационной субструктуры ферритной составляющей материала наблюдалось лишь в количественном отношении, — как и в исходном состоянии, наблюдалась сетчатая субструктура, однако плотность дислокаций заметно выше,

чем в исходном состоянии ( $\sim 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ ). В ферритных прослойках перлитной структуры дислокационная субструктура также не изменилась (по сравнению с исходной), однако плотность дислокаций увеличилась до  $8 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ . На состоянии пластин цемента такое увеличение плотности дислокаций заметным образом не отразилось. Характерные электронно-микроскопические изображения структуры стали на данном расстоянии от зоны разрушения приведены на рис. 2.41. На большем удалении от зоны разрушения материала ( $\sim 13 \text{ мм}$ ) структурно-фазовое состояние стали, а также дислокационная субструктура практически совпадали с исходными.

Рентгеноструктурные исследования проводились на дифрактометре ДРОН-3М в фильтрованном  $\text{Cu}_{K\alpha}$ -излучении. Измерялись размеры когерентного рассеяния ( $D_{hkl}$ ) и микронапряжения второго рода ( $\sigma_{II}$ ). Оценки размеров  $D_{hkl}$  и величины  $\sigma_{II}$  проведены методом аппроксимаций.

На рис. 2.42 а показаны эпюры остаточных деформаций  $\epsilon_y$ . Изменение формы эпюры поперечных деформаций с удалением от места разрушения, по сечению 1–1, свидетельствует об ослаблении сдвигающей составляющей напряженного состояния. Измерения в трех точках по высоте сечения стержня позволили уточнить характер распределе-

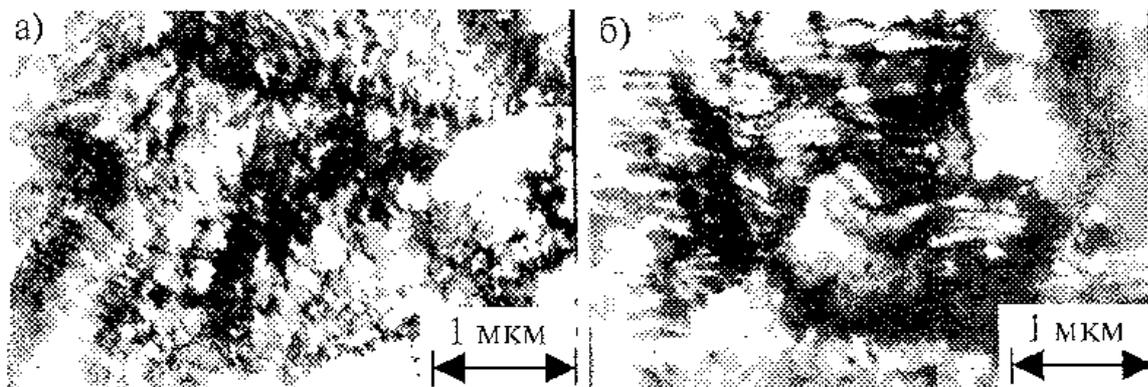


Рис. 2.41. Структура стали на расстоянии 6 мм ( $1/2 \text{ } \varnothing$  стержня) от зоны разрушения [34]

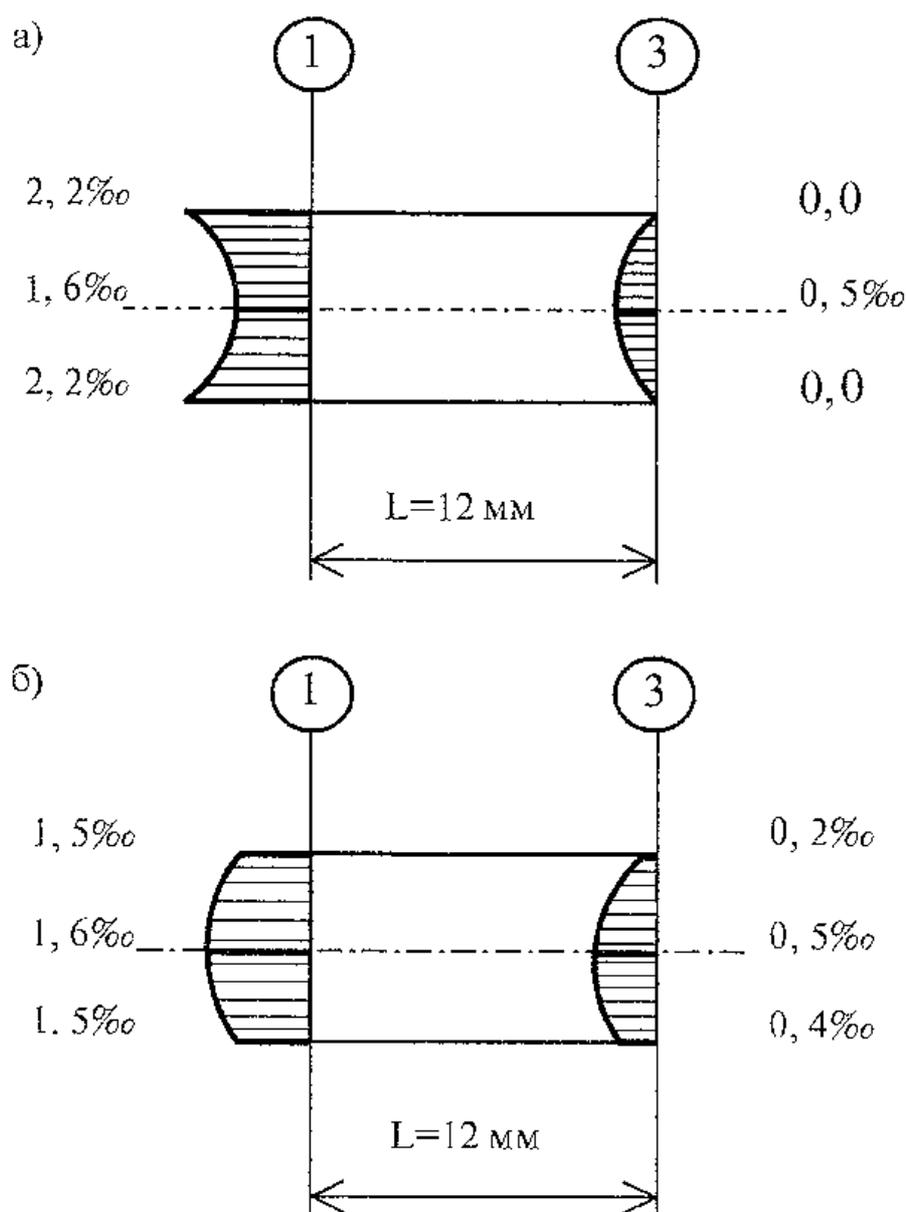


Рис. 2.42. Распределение деформаций по высоте сечения стержня при сдвиге: а) поперечные деформации, б) продольные деформации [34]

ния деформаций и выявить моментную составляющую деформаций (рис. 2.42 б).

### 2.7.3. Траектория движения трещины

Исследования железобетонных балок при изгибе при различных соотношения момента и поперечной силы по-

казали, что при относительно низких уровнях нормальных напряжений в бетоне развиваются трещины нормального отрыва по всей длине элемента. Затем, с возрастанием роли объемных напряжений и уровня касательных напряжений создается такое объемное напряженно-деформированное состояние, при котором трещины получают наклон от опоры к действующей силе. Этот наклон определяется отношением

шением  $\frac{Q}{Q_{\max}} / \frac{M}{M_{\max}}$ , т.е. весом доли действующих сдвигающих сил и изгибающих моментов.

Причем длина вертикального участка трещин, наклонных к продольной оси элементов, зависит от конструкции балки и условий ее закрепления, а также от свойств используемых материалов и условий нагружения.

Таким образом, трещина развивается по смешанному сдвиго-отрывному механизму и является комбинацией трещин нормального отрыва и поперечного сдвига.

Траекторию движения трещины обычно соотносят с шириной раскрытия  $a_{cr}$  и величиной сдвига берегов  $\Delta_{cd}$  в направлении ее развития [48, 80, 90]. Движение наклонной трещины, помимо отношения  $\frac{\Delta_{cd}}{a_{cr}}$ , зависит от ряда

трудно поддающихся учету факторов шероховатости и деформативности поверхности, степени зацепления зерен заполнителя, их крупности и т.д. Основанная на результатах экспериментов зависимость между шириной раскрытия  $a_{cr}$  трещины и сдвигом берегов  $\Delta_{cd}$  предложена в работе [90]:

$$\Delta_{cd} = 0,1875a_{cr}^2 + 0,175a_{cr}, \text{ мм.} \quad (2.59)$$

Опыты показывают [48, 54], что возрастание уровня нагрузки приводит к увеличению отношения  $\frac{\Delta_{cd}}{a_{cr}}$ , которое

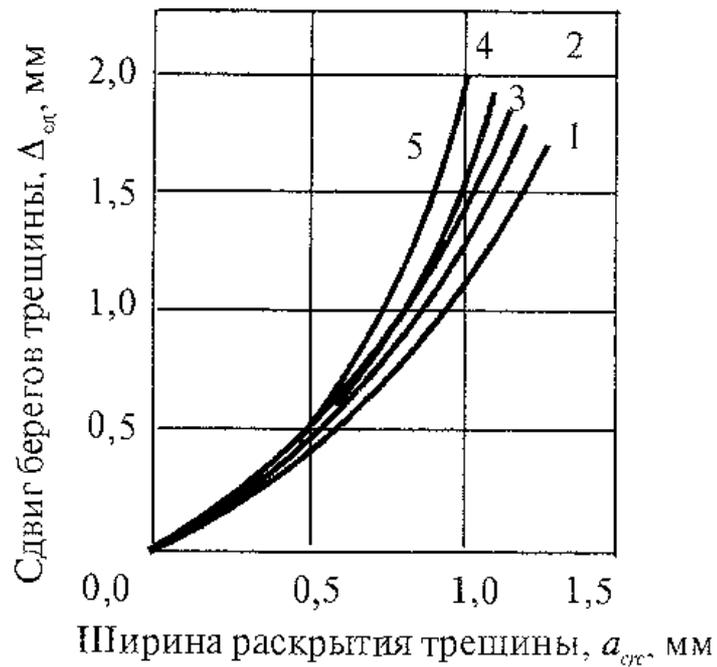


Рис. 2.44. Траектория движения трещины (2.60): 1 —  $\bar{R}=29$  МПа

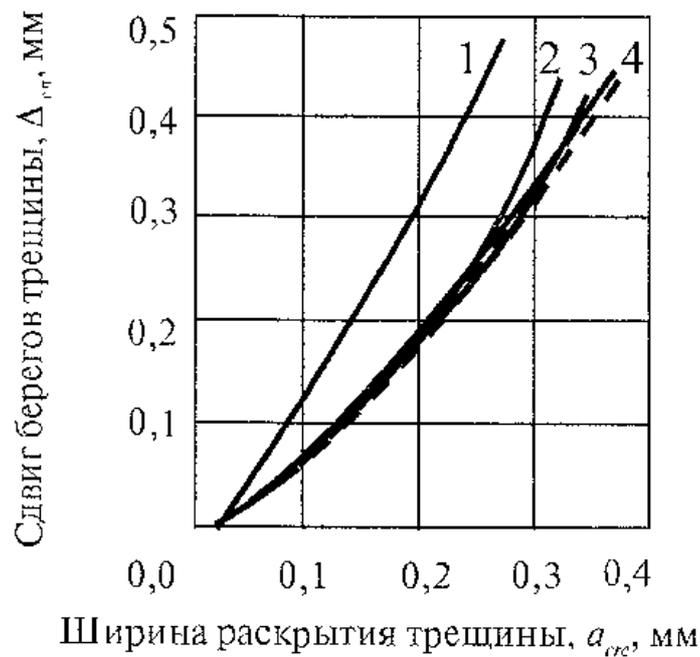


Рис. 2.43. Траектория движения трещины (2.60) с арматурой  $\varnothing 16$  мм: 1 —  $m=0,56\%$ ; 2 —  $m=1,12\%$ ; 3 —  $m=1,68\%$ ; 4 —  $m=2,23\%$  [48, 54]

на стадии разрушения наклонного сечения приближается к единице. При этом изменение процента армирования, марки бетона, крупности заполнителя практически не влияет на соотношение между  $a_{crс}$  и  $\Delta_{сд}$  (рис. 2.43, 2. 44). Направление «критического» хода трещины может быть определено по формуле [90]:

$$\frac{d\Delta_{сд}}{da_{crс}} = a_{crс}^{0,18} (1,65 + 2,1a_{crс}) - 1,5\Delta_{сд}. \quad (2.60)$$

На рис. 2.43 пунктиром показаны диаграммы для  $\bar{R}=56$  МПа, сплошной линией – для  $\bar{R}=20$  МПа.

## ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 2

1. *Аванесов М.П., Бондаренко В.М., Римшин В.И.* Теория силового сопротивления железобетона / Под ред. В.М. Бондаренко / Алт. гос. техн. ун-т им. И.И. Ползунова. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 1996. – 169 с.
2. *Адишев В.В.* Теоретическое и экспериментальное исследование процесса возникновения, стабилизации и роста макротрещин в элементах железобетонных конструкций: Автореф. дис. ... докт. техн. наук. – Новосибирск, 2001. – 43 с.
3. *Баженов Ю.М.* Бетон при динамическом нагружении. – М.: Стройиздат, 1970. – 292 с.
4. *Байков В.Н.* О дальнейшем развитии общей теории железобетона. – 1979. – №7. – С. 27–29.
5. *Байков В.Н., Горбатов С.В., Дмитриев З.А.* Построение зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона по системе нормируемых показателей // Изв. ВУЗов: Строительство и архитектура. – 1977. – №6. – С. 15–18.
6. *Берг О.Я.* Физические основы теории прочности бетона и железобетона. – М.: Госстройиздат, 1961. – 96 с.

7. *Бондаренко В.М.* Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. – Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1968. – 323 с.
8. *Гвоздев А.А.* Задачи и перспективы развития теории железобетона // *Строительная механика и расчет сооружений.* – 1981. – №6. – С. 14–17.
9. *Гвоздев А.А.* Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. – М.: Госстройиздат, 1949. – 280 с.
10. *Гвоздев А.А.* Состояние и задачи исследования сцепления арматуры с бетоном // *Бетон и железобетон.* – 1968. – №12. – С. 1–4.
11. *Гвоздев А.А., Залесов А.С.* К расчету прочности наклонных сечений железобетонных элементов // *Бетон и железобетон.* – 1978. – №11. – С. 27–28.
12. *Гвоздев А.А., Залесов А.С., Титов И.А.* Силы зацепления в наклонных трещинах // *Бетон и железобетон.* – 1975. – №7. – С. 44–45.
13. *Гениев Г.А.* Вариант деформационной теории пластичности бетона // *Бетон и железобетон.* – 1969. – №2. – С. 18–19.
14. *Гениев Г.А.* Метод определения динамических пределов прочности бетона // *Бетон и железобетон.* – 1998. – №1. – С. 18–19.
15. *Гениев Г.А., Киссюк В.Н.* К вопросу обобщения теории прочности бетона // *Бетон и железобетон.* – 1965. – №2. – С. 16–29.
16. *Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А.* Теория пластичности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.
17. *Громов В.Е., Козлов Э.В., Базайкин В.И. и др.* Физика и механика волочения и объемной штамповки. – М.: Недра, 1997. – 293 с.
18. *Гуща Ю.П.* Об учете неупругих деформаций бетона и арматуры при оценке деформативности железобетонных

- конструкций в стадиях, близких к разрушению // Влияние неупругих свойств железобетона на работу и распределение усилий в статически неопределимых конструкциях: Тр. НИИЖБ., Вып. 20. — М.: Стройиздат, 1975. — С. 44–56.
19. *Гуща Ю.П.* Предложения по нормированию диаграмм растяжения высокопрочной стержневой арматуры // Бетон и железобетон. — 1970. — №3. — С. 24–26.
  20. *Гуща Ю.П.* Предложения по нормированию диаграмм растяжения высокопрочной стержневой арматуры // Бетон и железобетон. — 1979. — №7. — С. 15–16.
  21. *Динамический расчет сооружений на специальные воздействия:* Справочник проектировщика. — М.: Стройиздат, 1981. — 215 с.
  22. *Дмитриев А.В.* Динамический расчет изгибаемых железобетонных элементов с учетом влияния скорости деформирования: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М., 1983. — 21 с.
  23. *Забегает А.В.* К построению общей модели деформирования бетона // Бетон и железобетон. — 1994. — №6. — С. 23–26.
  24. *Забегает А.В.* Оценка эффекта динамического упрочнения в бетоне. Строительство и архитектура // Сейсмостойкое строительство. — 1995. — Вып. 3. — С. 17–24.
  25. *Забегает А.В., Тамразян А.Г.* Оценка влияния динамических нагрузений на структурные изменения бетона // Сейсмостойкое строительство. — 1998. — Вып. 3. — С. 9–32.
  26. *Карпенко Н.И.* К построению обобщенной зависимости для диаграммы деформирования бетона // Строительные конструкции. — Минск, 1983. — С. 164–173.
  27. *Карпенко Н.И.* Общие модели механики железобетона. — М.: Стройиздат, 1996. — 416 с.

28. *Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н.* Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры. Напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций. – М.: НИИЖБ, 1980. – С. 7–25.
29. *Кемпбелл Д.* Эксперименты при высоких скоростях деформации // *Механика*. – 1966. – №5 (99). – С. 121–138.
30. *Конева Н.А., Козлов Э.В.* Природа субструктурных упрочнений // *Изв. ВУЗов: Физика*. – 1982. – №8. – С. 3–14.
31. *Конева Н.А., Лычагин Д.В., Жуковский С.П. и др.* Эволюция дислокационной структуры и стадии пластического течения поликристаллического железо-никелевого сплава // *ФММ*. – 1985. – Т. 60. – №1. – С. 171–179.
32. *Конева Н.А., Лычагин Д.В., Теплякова Л.А., Козлов Э.В.* Развороты кристаллической решетки и стадии пластической деформации // *Экспериментальное исследование и теоретическое описание дисклинаций*. – Л.: ФТИ, 1984. – С. 161–164.
33. *Копаница Д.Г., Клопотов А.А., Иванов Ю.Ф.* Деформация и разрушение арматурного стержня в железобетонной конструкции // *Актуальные проблемы строительного материаловедения. Материалы Всероссийской научно-технич. конф.* – Томск 1998. – С. 218–220.
34. *Копаница Д.Г., Клопотов А.А., Иванов Ю.Ф., Гирсова Н.В.* Закономерности формирования остаточных деформаций при разрушении стального стержня силами растяжения и сдвига // *Вестник ТГАСУ*. – 1999. – №1. – С. 107–119.
35. *Котляревский В.А.* Механические характеристики малоуглеродистой стали при импульсивном нагружении с учетом запаздывающей текучести и вязкопластических свойств // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1961. – №6. – С. 146–152.
36. *Котляревский В.А., Ганушкин В.И., Костин А.А. и др.* Убежища гражданской обороны: Конструкции и расчет. – М.: Стройиздат, 1989. – 606 с.

37. *Котляревский В.А., Сеньюков А.В., Бродецкая Л.А.* Расчет железобетонных конструкций за пределом упругости на действие ударной волны на ЭЦВМ / ЦНИИИИ им. Д.М. Карбышева, НТИ, вып. 1. – М., 1966. – 55 с.
38. *Кузьменко В.А.* Новые схемы деформирования твердых тел. – Киев: Наукова думка, 1973. – 200 с.
39. *Кумняк О.Г.* Совершенствование методов расчета железобетонных плоскостных конструкций при статическом и кратковременном динамическом нагружении: Дис. ... докт. техн. наук. – Томск, 1996. – 473 с.
40. *Кумняк О.Г., Копаница Д.Г.* Динамика защитной оболочки реакторного отделения АЭС при действии ударной волны внешнего взрыва // Вестник ТГАСУ. – 1999. – №1. – С. 109–120.
41. *Кумняк О.Г., Копаница Д.Г.* Собственные колебания реакторного отделения атомной электростанции в деформируемой среде // Сборник материалов международной научно-практической конференции «Строительные конструкции XXI века»: Часть 1. «Строительные конструкции. Строительная механика и испытание сооружений» / Моск. гос. ун-т. – М., 2000. – С. 225–226.
42. *Кумняк О.Г., Трекин Н.Н.* Железобетонные изгибаемые конструкции при ударном нагружении // Реферат. ж. «Строительство и архитектура» ВНИИИСа Госстроя СССР. – 1983. – Сер. 11. – Вып. 7. – 28 с.
43. *Кумняк О.Г., Трекин Н.Н.* Сопротивление железобетона ударным нагрузкам // Исследования по строительной механике и строительным конструкциям: Сб. науч. тр. ТИСИ. – Томск: Изд-во ТГУ, 1983. – С. 73–78.
44. *Мадатян С.А.* Диаграмма растяжения высокопрочной арматурной стали в состоянии поставки // Бетон и железобетон. – 1985. – №2. – С. 12–13.
45. *Мадатян С.А.* Учет эффектов преднапряжения арматуры при расчете прочности изгибаемых элементов // Бетон и железобетон. – 1978. – №6. – С. 12–15.

46. *Майборода В.И., Кравчук А.С., Холин Н.Н.* Скоростное деформирование конструкционных материалов. – М.: Машиностроение, 1986. – 264 с.
47. *Митасов В.М., Адишев В.В., Федоров Д.А.* Развитие теории сопротивления железобетона // Промышленность строит. материалов: Сер. 3. Промышленность сборного железобетона. Аналитический обзор. – М., 1991. – вып. 4. – 44 с.
48. *Митрофанов В.П.* Напряженно-деформированное состояние, прочность и трещинообразование железобетонных элементов при поперечном изгибе: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 1982. – 41 с.
49. *Мулин Н.М., Гуца Ю.П.* Арматура и условия ее работы в конструкциях // Бетон и железобетон. – 1971. – №5. – С. 7–10.
50. *Мяновский К.М.* Механизм трещинообразования железобетонных элементов с дисперсным армированием при растяжении / Пер. с польск., №А-83678. – М: ВЦП НТЛид, 1979. – 123 с.
51. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел / Пер. с англ. – М.:, 1954. – Т. 1. – 648 с.
52. *Пазаренко В.Г.* Диаграмма деформирования бетона с учетом ниспадающей ветви // Бетон и железобетон. – 1999. – №2. – С. 18–22.
53. *Оатул А.А., Кутин Ю.Ф., Пасечник В.В.* Сцепление арматуры с бетоном (обзор) // Изв. вузов. Сер.: Строительство и архитектура. – Новосибирск, 1977. – №5. – С. 3–16.
54. *Пересыпкин Е.Н.* Напряженно-деформированное состояние стержневых железобетонных элементов с трещинами: Автореф. дис. ... докт. техн. наук. – Л.: Краснодарский политехнический институт, 1984. – 40 с.
55. *Плотников А.И.* Динамика упругопластических железобетонных балок при действии интенсивных кратковременных нагрузок аварийного характера: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 1994. – 25 с.

56. *Плотников А.И.* О построении полных диаграмм сопротивления для случая динамического изгиба железобетонных элементов // Динамика железобетонных конструкций и сооружений при интенсивных кратковременных воздействиях: Сб. науч. тр. МИСИ. — М., 1992. — С. 110–116.
57. *Попов Н.Н., Кумпяк О.Г., Плевков В.С.* Вопросы динамического расчета железобетонных конструкций. — Томск: Изд-во ТГУ, 1990. — 288 с.
58. *Попов Н.Н., Матков Н.Г., Трекин Н.Н.* Влияние косвенного армирования на деформативность бетона при статическом и динамическом нагружениях // Бетон и железобетон. — 1986. — №8 — С. 17–21.
59. *Попов Н.Н., Расторгуев Б.С.* Расчет железобетонных конструкций на действие кратковременных динамических нагрузок. — М.: Стройиздат, 1964. — 147 с.
60. *Попов Н.Н., Расторгуев Б.С.* Расчет конструкций специальных сооружений: Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Стройиздат, 1990. — 208 с.
61. *Работнов Ю.Н.* Модель упруго-пластической среды с запаздыванием текучести. — ЖПТФ, 1968. — №3. — С. 45–54.
62. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
63. *Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В.* О законе деформирования металла при одноосном нагружении. — №4. — ММТ, 1972.— С. 41–54.
64. *Расторгуев Б.С.* Прочность железобетонных конструкций зданий взрывоопасных производств и специальных сооружений, подверженных кратковременным динамическим воздействиям: Автореф. дис. ... докт. техн. наук. — М.: МИСИ, 1987. — 37 с.
65. *Расторгуев Б.С.* Упрощенная методика получения диаграмм деформирования стержневых элементов в стадии с

- трещинами // Бетон и железобетон. — 1993. — №5. — С. 22–24.
66. *Салтыков С.А.* Стереометрическая металлография. — М.: Металлургия, 1970. — 376 с.
67. *Сахновский К.В.* Железобетонные конструкции. — М.: Госстройиздат, 1950. — 839 с.
68. *Ставров Г.Н.* Предельные деформации бетона при одноосном динамическом нагружении // Бетон и железобетон. — 1993. — №3. — С. 13–14.
69. *Такэда Д., Кавамура Т.* Бахукацу ни ёру тэккин конкурито кодзобуцу но хэнкэй, хакай но тэйрётэки ёсаку // Когё-кайку кёкайсю. — 1985. — Т. 46. — №4. — С. 182–194.
70. *Тамразян А.Г.* Совершенствование методов расчета железобетонных конструкций на основе структурной теории деформирования бетона: Дис. ... докт. техн. наук. — М.: МГСУ, 1998. — 395 с.
71. *Тейлор А.* Рентгеновская металлография. — М.: Металлургия, 1965. — 664 с.
72. *Утевский Л.М.* Дифракционная электронная микроскопия в металловедении. — М.: Металлургия, 1973. — 584 с.
73. *Холмянский М.М.* Бетон и железобетон. Деформативность и прочность. — М.: Стройиздат, 1978. — 559 с.
74. *Холмянский М.М.* Контакт арматуры с бетоном. — М.: Стройиздат, 1978. — 184 с.
75. *Bazant Z.P.* Strain-rate in rapid triaxial loading of concrete // Proc.A.S.C.E. — 1982. — Vol. 108. — №5. — P. 764–782.
76. *Bichara A.* Etude du problème de l'adhérence dans le béton armé, C.C.S.T.B. — Paris, 1957. — С. 117–127.
77. *Cornet I., Grassi R.C.* Fracture of Gray-Cast-Iron Tubes under Biaxial Stresses // Trans. ASME, J. Appl. Mech. — 1949. — №71. — P. 178–182.
78. *Dilger W.H, Koch R. and Kowalczyk R.* Ductility of Plain and Confined under Different Strain Rates, presented at American Concrete Institute Meeting: Houston. Nov., 1978, American

- Concrete Institute Special Publication, Dept. of Civil Engineering University of Calgary: Calgary, Alberta, Canada, 1978. — P. 4–12.
79. *Dilger W.H., Koch R. and Kowaleczuk R.* Ductility of Plain and Confined under Different Strain Rates // J. of the Amer. Concrete Ins. — 1984. — Vol. 81. — No.1. — P. 73–81.
80. *Fenwick R.C., Paulay T.* Discussion of the paper by J.N.J. Kani // ACI Journal. — 1964. — Proc. Vol. 61. — №12.
81. *Fenwick R.C., Paulay T.* Mechanisms of the Shear Resistance of Concrete Beams // Proc. Of the ASCE. — Oct. 1968. — Vol. 94. — NST 10.
82. *Kelly J.M.* Strain rate sensitivity and yield point behavior in mild steel. — Int. J. of Solids and Structures, 1967. — P. 521–532.
83. *Kufuor K.G., Perry S.H.* Hard impact of shallow reinforced concrete domes. Int. Conf. Structural Impact and Crashworthiness: Int. Conf. — V. 2. — London, 1984. — P. 675–686.
84. *Martinez G., Nilson A. and Glate O.* Spirally Reinforced High-Strength Concrete Columns // J. of the American Concrete Institute. — 1984, Sept.-Oct. — P. 431–442.
85. *Maxwell J.G.* Phil Trans. Roy. Soc., 157, 49, 1867.
86. *Moe I.* Discussion: Shear and Diagonal Tension by ACI-ASCE Committee 426 // ACI Journal. — 1962. — Proc. Vol. 59. — №9.
87. *Paul F. Mlakar, Ken P. Vitaya, Robert A. Cole* Dynamic Tensile-Compression Behavior of Concrete // ACI Journal. — 1985. — №4. — P. 484–490.
88. *Stroeven P.* Some morphometric aspect of load transfer in cracked sections of sffc. Механика и технология на композиционните материале: Докл. 3 нац. конф. — Варна, 1982. — С. 568–571.
89. *Taylor H.P. J.* Investigation of the forces carried across cracks in reinforced concrete beams in Shear by interlock aggregate. London. Cement and Concrete Ass. TRA 447. — Nov. 1970.

90. *Walrrawn J.C.* Scheurveranding. — Cement, 1981. — XXXIII. — №6. — P. 406–412.
91. *Zielinske A.J.* Model for tensile fracture of concrete at high rates of loading element and Research. — 1984. — Vol. 14. — P. 215–224.

## ГЛАВА 3

# МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

### 3.1. Стадия без трещин, железобетон как изотропный материал

Результаты экспериментальных и теоретических исследований, проведенных отечественными и зарубежными учеными, позволяют рассматривать работу железобетонного элемента в условиях скоростного нагружения как изотропного линейно-упругого материала до появления трещины при растяжении или до раздробления при всестороннем сжатии.

Напряженно-деформированное состояние сплошной тонкостенной пространственной конструкции можно моделировать поверхностью из плоских конечных элементов (КЭ). КЭ испытывает напряжения как от изгиба, так и от сил в срединной поверхности.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние тонкостенной пространственной конструкции, для чего используем треугольный КЭ (ТКЭ) с линейной аппроксимацией перемещений в пределах элемента и, соответственно, с шестью степенями свободы в каждой вершине треугольника (рис. 3.1).

Положение треугольника в пространстве определяется тремя узлами, координаты которых заданы в глобальной системе координат  $X', Y', Z'$ . Местная система координат обозначается  $X, Y, Z$ .

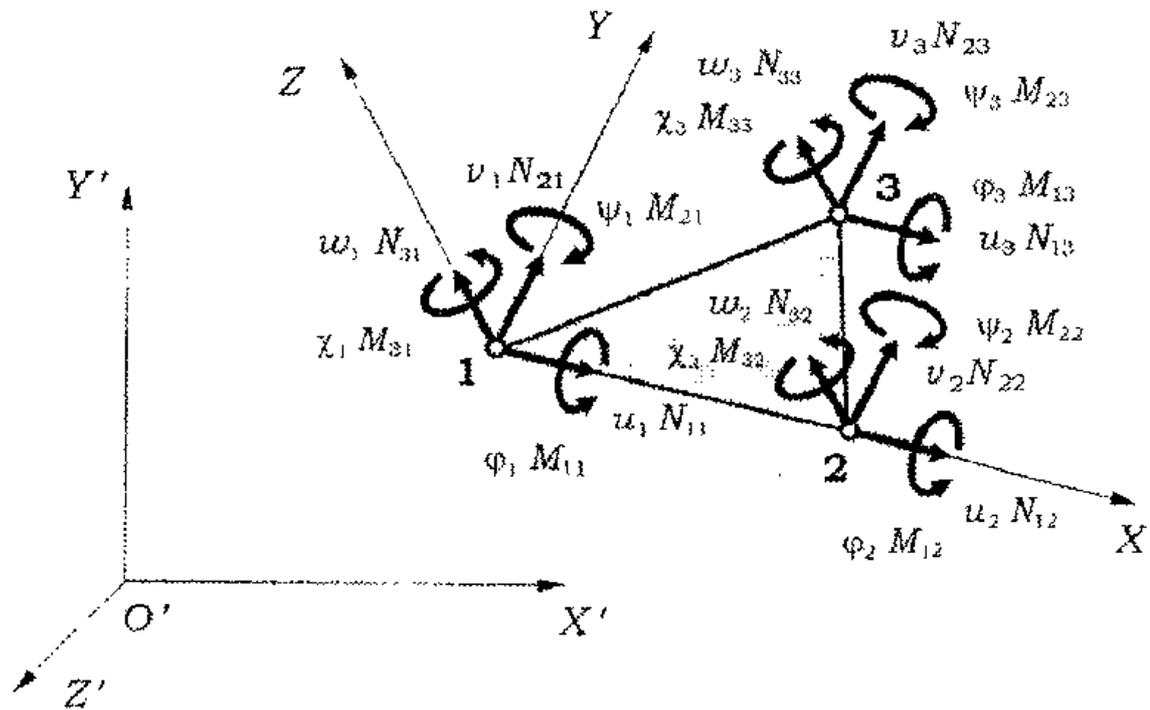


Рис. 3.1. Треугольный конечный элемент

Матрица жесткости ТКЭ строится путем объединения матриц жесткости плоского и изгибного напряженного состояний, так как в локальной системе координат перемещения  $u_i$  и  $v_i$  не зависят от  $w_i$ ,  $\varphi_i$  и  $\psi_i$ :

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} [K_{ij}^{\Pi}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_{ij}^{\text{И}}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

здесь  $[K_{ij}]$ ,  $[K_{ij}^{\Pi}]$ ,  $[K_{ij}^{\text{И}}]$  – подматрицы матриц жесткости общего, плоского и изгибного напряженных состояний.

Фиктивные угол поворота  $\chi_i$  и момент  $M_3$  вводятся для объединения некомпланарных пластинок.

Схема формирования глобальной матрицы жесткости для треугольного КЭ может быть представлена как:

$$[K_{ij}] = [K_{ij}^{\text{II}}] + [K_{ij}^{\text{III}}],$$

или

$$\begin{bmatrix} (11)_{\text{II}} & (12)_{\text{II}} & (13)_{\text{II}} \\ (21)_{\text{II}} & (22)_{\text{II}} & (23)_{\text{II}} \\ (31)_{\text{II}} & (32)_{\text{II}} & (33)_{\text{II}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (11)_{\text{III}} & (12)_{\text{III}} & (13)_{\text{III}} \\ (21)_{\text{III}} & (22)_{\text{III}} & (23)_{\text{III}} \\ (31)_{\text{III}} & (32)_{\text{III}} & (33)_{\text{III}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (11)_{\text{II}} & 0 & 0 & (12)_{\text{II}} & 0 & 0 & (13)_{\text{II}} & 0 & 0 \\ 0 & (11)_{\text{III}} & 0 & 0 & (12)_{\text{III}} & 0 & 0 & (13)_{\text{III}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (21)_{\text{II}} & 0 & 0 & (22)_{\text{II}} & 0 & 0 & (23)_{\text{II}} & 0 & 0 \\ 0 & (21)_{\text{III}} & 0 & 0 & (22)_{\text{III}} & 0 & 0 & (23)_{\text{III}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (31)_{\text{II}} & 0 & 0 & (32)_{\text{II}} & 0 & 0 & (33)_{\text{II}} & 0 & 0 \\ 0 & (31)_{\text{III}} & 0 & 0 & (32)_{\text{III}} & 0 & 0 & (33)_{\text{III}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости плоского напряженного состояния вычисляется по формуле:

$$[K^{\text{II}}] = A \cdot h \cdot [B^{\text{II}}]^T \cdot [D^{\text{II}}] \cdot [B^{\text{II}}], \quad (3.2)$$

где матрица деформаций:

$$[B^{\text{II}}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_3 & 0 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & -x_3 & 0 & x_2 \\ x_3 - x_2 & -y_3 & -x_3 & y_3 & x_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

матрица упругости

$$[D^H] = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$A$ ,  $h$  – площадь и толщина ТКЭ;  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Изгибная матрица жесткости определяется выражением:

$$[K^H] = \frac{1}{3A^3} \left\{ \begin{aligned} & [B^H(0,5;0,5;0)]^T \cdot [D^H] \cdot [B^H(0,5;0,5;0)] + \\ & + [B^H(0;0,5;0,5)]^T \cdot [D^H] \cdot [B^H(0;0,5;0,5)] + \\ & + [B^H(0,5;0;0,5)]^T \cdot [D^H] \cdot [B^H(0,5;0;0,5)] \end{aligned} \right\}, \quad (3.5)$$

где матрица упругости:

$$[D^H] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Матрица деформаций  $[B^H(L_1;L_2;L_3)]$  зависит от однородных (плоскостных) координат  $L_i = A_i/A$ , и ее элементы вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
& b_{1,1} = 0,5y_3^2(3L_1 - 3L_2 - L_3), \\
& b_{1,2} = -0,25y_3^3L_3, \\
& b_{1,3} = y_3^2(x_2(0,5L_2 - L_1 - 0,25L_3) + 0,25x_3L_3), \\
& b_{1,4} = 0,5y_3^2(3L_2 - 3L_1 - L_3), \\
& b_{1,5} = b_{1,2}, \\
& b_{1,6} = y_3^2(x_2(L_2 - 0,5L_1) + 0,25x_3L_3), \\
& b_{1,7} = y_3^2L_3, \\
& b_{1,8} = 2b_{1,2}, \\
& b_{1,9} = 0,25y_3^2(2x_3 - x_2)L_3, \\
& b_{2,1} = 0,5x_2^2(3L_1 - L_2 - 3L_3) + 2x_2x_3(L_2 - L_1 + L_3) + \\
& + 0,5x_3^2(3L_1 - 3L_2 - L_3), \\
& b_{2,2} = y_3(x_2^2(L_1 + 0,25L_2 - 0,5L_3) + \\
& + 0,25x_2x_3(3L_3 - 3L_1 - L_2) - 0,25x_3^2L_3), \\
& b_{2,3} = 0,25x_2^3L_2 + x_2^2x_3(0,75L_3 - 0,25L_1 - L_2) + \\
& + x_2x_3^2(10,75L_2 - 0,25L_1 - L_3) + 0,25x_3^3L_3, \\
& b_{2,4} = x_2^2L_2 + x_2x_3(L_1 - L_2 - L_3) + 0,5x_3^2(3L_2 - 3L_1 - L_3), \\
& b_{2,5} = 0,25y_3(x_2^2L_2 + x_2x_3(L_1 + 3L_2 - L_3) - x_3^2L_3), \\
& b_{2,6} = 0,5(x_2^3L_2 + x_2^2x_3(L_1 - 1,5L_2 - L_3) + \\
& + 0,5x_2x_3^2(L_2 - 3L_1 + L_3) + 0,5x_3^3L_3), \\
& b_{2,7} = 0,5x_2^3(3L_3 - 3L_1 - L_2) + x_2x_3(L_1 - L_2 - L_3) + x_3^2L_3, \\
& b_{2,8} = 0,5y_3(x_2^2(L_1 - 2L_3) + x_2x_3(L_2 - L_1 + L_3) - x_3^2L_3),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
b_{2,9} &= 0,25(x_2^3 L_2 + x_2^2 x_3(L_2 - 3L_1 + L_3)) + \\
&+ 0,5(x_2 x_3^2(L_1 - L_2 - 1,5L_3) + x_3^3 L_3), \\
b_{3,1} &= y_3(2x_2(L_2 - L_1 + L_3) + x_3(3L_1 - 3L_2 - L_3)), \\
b_{3,2} &= y_3^2(0,25x_2(3L_3 - 3L_1 - L_2) - 0,5x_3 L_3), \\
b_{3,3} &= 0,25y_3(x_2^2(3L_1 - 3L_2 + L_3) + 5x_2 x_3(L_2 - L_1 - L_3) + 2x_3^2 L_3), \\
b_{3,4} &= y_3(x_2(L_1 - L_2 - L_3) + x_3(3L_2 - 3L_1 - L_3)), \\
b_{3,5} &= y_3^2(0,25x_2(L_1 + 3L_2 - L_3) - 0,5x_3 L_3), \\
b_{3,6} &= 0,5y_3(x_2^2(L_1 - L_2 - L_3) + 0,5x_2 x_3(5L_2 - 5L_1 + L_3) + x_3^2 L_3), \\
b_{3,7} &= y_3(x_2(L_1 - L_2 - L_3) + 2x_3 L_3), \\
b_{3,8} &= y_3^2(0,5x_2(L_2 - L_1 + L_3) - x_3 L_3), \\
b_{3,9} &= y_3(0,25x_2^2(L_2 - L_1 - 3L_3) + x_2 x_3(0,5L_1 - 0,5L_2 - L_3) + x_3^2 L_3)
\end{aligned}$$

Наличие в матрице жесткости (3.1) нулевых строк и столбцов может привести к появлению в разрешающей системе линейных уравнений уравнения  $0=0$  в случае, когда все пластинки, сходящиеся в каком-либо узле, лежат в одной плоскости. Поэтому вводится система фиктивных коэффициентов жесткости таким образом, что равновесие в локальных координатах не нарушается:

$$\begin{Bmatrix} M_{3,1} \\ M_{3,2} \\ M_{3,3} \end{Bmatrix} = E \cdot A \cdot h \cdot \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{Bmatrix}, \quad (3.8)$$

где  $\alpha=0,0001$  – безразмерный коэффициент.

В общую систему координат матрица жесткости ТКЭ переводится по формуле:

$$[K'_i] = [T]^T \cdot [K_i] \cdot [T], \quad (3.9)$$

где матрица преобразования:

$$[T] = \begin{bmatrix} [L] & \\ & [L] \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

матрица направляющих косинусов:

$$[L] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

здесь  $l_x$  — косинус угла между осью ОХ местной системы координат и осью О'Х' общей системы;  $m_x$  — косинус угла между осью ОХ местной системы координат и осью О'У' общей системы;  $n_x$  — косинус угла между осью ОХ местной системы координат и осью О'Z' общей системы, и так далее.

ТКЭ расположен в плоскости ХОУ локальной системы координат таким образом, что центр системы находится в первой вершине, а ось ОХ проходит через вторую вершину (рис. 3.1). Направляющие косинусы оси ОХ вычисляются по формуле:

$$\{V_x\} = \{l_x \ m_x \ n_x\}^T = \frac{1}{d_{12}} \{x'_{21} \ y'_{21} \ z'_{21}\}^T, \quad (3.12)$$

где  $d_{12}$  — расстояние между вершинами 1 и 2;  $x'_{21} = x'_2 - x'_1$  и т.д.

Выбрав вспомогательную точку  $a$  в месте пересечения высоты треугольника с основанием 1–2, определим ее координаты.

Из выражения:

$$\{l_x \ m_x \ n_x\}^T = \frac{1}{x_3} \{x'_{a1} \ y'_{a1} \ z'_{a1}\}^T \quad (3.13)$$

имеем:

$$\left. \begin{aligned} x'_a &= x'_1 + x_3 \cdot l_x, \\ y'_a &= y'_1 + x_3 \cdot m_x, \\ z'_a &= z'_1 + x_3 \cdot n_x, \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

где

$$x_3 = \frac{(d_{12}^2 + d_{13}^2 + d_{23}^2)}{2d_{12}}. \quad (3.15)$$

Направляющие косинусы оси ОУ вычисляются по формуле:

$$\{V_y\} = \{l_y \ m_y \ n_y\}^T = \frac{1}{d_{1a3}} \{x'_{3a} \ y'_{3a} \ z'_{3a}\}^T. \quad (3.16)$$

Направляющие косинусы оси ОZ вычисляются через векторное произведение векторов единичной длины:

$$\{V_x\} = \begin{Bmatrix} l_x \\ m_x \\ n_x \end{Bmatrix} = \{V_x\} \times \{V_y\} = \begin{Bmatrix} m_x n_y & -n_x m_y \\ n_x l_y & -l_x n_y \\ l_x m_y & -m_x l_y \end{Bmatrix}. \quad (3.17)$$

Полученная таким образом матрица жесткости  $i$ -го ТКЭ размещается в общей матрице жесткости ТКЭ.

В расчете принимается, что начальные деформации постоянны по полю и по толщине пластины. Приведенные эквивалентные нагрузки в вершинах ТКЭ в локальной системе координат равны:

$$\{N_{11} \ N_{12} \ N_{21} \ N_{22} \ N_{13} \ N_{23}\}^T = A \cdot h \cdot [B^H]^T \cdot [D^H] \cdot \{\varepsilon_0\}, \quad (3.18)$$

здесь вектор начальных деформаций:

$$\{\varepsilon_0\} = \varepsilon_0 \cdot \{1 \ 1 \ 0\}^T. \quad (3.19)$$

В общую систему координат приведенные нагрузки в  $i$ -й вершине ТКЭ переводятся по формуле:

$$\{Q'_{0i}\} = [T]^T \cdot \{Q_{0i}\}, \quad (3.20)$$

где

$$\{Q_{0i}\} = \{N_{1i} \ N_{2i} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T. \quad (3.21)$$

Сформировав общий вектор нагрузки, и решив систему линейных уравнений, перемещения  $i$ -й вершины ТКЭ определяем в локальной системе координат по формуле:

$$\{U_i\} = \{u_i \ v_i \ w_i \ \varphi_i \ \psi_i \ \chi_i\}^T = [T] \cdot \{U'_i\}. \quad (3.22)$$

Напряжения в треугольных пластинках для последующей оценки прочности вычисляются в местной системе координат в восьми точках ( $j=1-8$ ):

$$\{\sigma_j\} = \{\sigma_{xj} \ \sigma_{yj} \ \tau_{xyj}\}^T = \{\sigma^H\} \pm \{\sigma_i^H\}, \quad (3.23)$$

здесь  $\{\sigma^H\}$  – напряжения плоского напряженного состояния, постоянные по всему ТКЭ;  $\{\sigma_i^H\}$  – изгибные напряжения, изменяются по площади пластины по линейному закону;  $i=1-4$ , где 1, 2, 3 – номера вершин ТКЭ, 4 – его центр тяжести.

$$\{\sigma^H\} = [D^H] \cdot (\{\varepsilon^H\} - \{\varepsilon_0\}), \quad (3.24)$$

здесь  $\{\varepsilon^H\}$  – вектор деформаций для плоского напряженного состояния.

$$\{\varepsilon^H\} = \{\varepsilon_x^H \ \varepsilon_y^H \ \gamma_{xy}^H\}^T = [B^H] \cdot \{U^H\}, \quad (3.25)$$

где

$$\{U^H\} = \{u_1 \ u_1 \ u_2 \ u_2 \ u_3 \ u_3\}^T. \quad (3.26)$$

Напряжения изгиба определяются через вектор распределенных изгибающих моментов  $\{M_i\}$ :

$$\{\sigma_i^H\} = \frac{12}{h^3} \cdot z \cdot \{M_i\}, \quad (3.27)$$

где

$$z = h/2;$$

$$\{M_i\} = \{M_{xi} \ M_{yi} \ -M_{xyl}\}^T = \frac{1}{A^2} [D^H] \cdot [B_i^H(L_1, L_2, L_3)] \cdot \{U^H\}, \quad (3.28)$$

здесь

$$\{U^H\} = \{w_1 \ \varphi_1 \ \psi_1 \ w_2 \ \varphi_2 \ \psi_2 \ w_3 \ \varphi_3 \ \psi_3\}^T, \quad (3.29)$$

$$\left. \begin{array}{llll} i=1 & L_1=1 & L_2=0 & L_3=0 \\ i=2 & L_1=0 & L_2=1 & L_3=0 \\ i=3 & L_1=0 & L_2=0 & L_3=1 \\ i=4 & L_1=1/3 & L_2=1/3 & L_3=1/3 \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

### 3.2. Стадия без трещин, железобетон как анизотропный материал

Закон Гука для анизотропного материала имеет вид:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} = [d]^{-1}\{\sigma\}, \quad (3.31)$$

где  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T$  – вектор деформаций;  $[C] = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Bmatrix}$  – матрица податливости;  $\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}^T$  – вектор напряжений;  $[d] = [C]^{-1}$  – матрица упругости.

Выражения для элементов матрицы  $[C]$  с точностью до множителя  $\delta$  ( $\delta$  – толщина железобетонного элемента) запишем в виде [12]:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \left( \frac{\sin^2 \alpha}{E'_{bn}} + \frac{\cos^2 \alpha}{E'_{bt}} \right), \quad c_{12} = -\frac{\nu_b (1+m)}{E'_{bn} m + E'_{bt}}; \\ c_{22} &= \left( \frac{\cos^2 \alpha}{E'_{bn}} + \frac{\sin^2 \alpha}{E'_{bt}} \right); \quad c_{13} = c_{23} = \left( \frac{1}{E'_{bn}} - \frac{1}{E'_{bt}} \right) \sin 2\alpha; \\ c_{33} &= \left( \frac{1}{E'_{bn}} + \frac{1}{E'_{bt}} \right) + \frac{2\nu_b (1+m)}{E'_{bn} m + E'_{bt}}; \quad m = \left| \frac{\sigma_{\max}^b}{\sigma_{\min}^b} \right| = \left| \frac{\sigma_{n.d}}{\sigma_{l.d}} \right|. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Записав матрицу упругости, обозначим армирование конечного элемента  $[d] = [C]^{-1}$ :

$$\begin{aligned} D_{11} &= d_{11} + \mu_{sx} E_{sx}; \quad D_{12} = d_{12}; \quad D_{13} = d_{13}; \\ D_{22} &= d_{22} + \mu_{sy}; \quad D_{23} = d_{23}; \\ D_{33} &= d_{33} + 0,2(\mu_{sx} E_{sx} + \mu_{sy} E_{sy}), \end{aligned} \quad (3.33)$$

где  $\mu_{si} = A_{si} / S_i \cdot \delta$  – коэффициент армирования элемента в соответствующем направлении ( $x, y, \nu$ );  $S_i$  – шаг арматурных стержней в  $i$ -м направлении;  $\nu_b$  – коэффициент Пуассона ( $\nu_b = 0,2$ );  $E'_{bn.d}$  и  $E'_{bt.d}$  – секущий динамический модуль упругости арматуры в направлении осей  $n$  и  $l$ , нормальных к главным площадкам;  $E_{sx}$  и  $E_{sy}$  – начальный модуль упругости арматуры в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $A_{si}$  – площади по-

перечных стержней арматуры ( $i = x, y, v$ );  $\alpha$  – угол наклона главной площадки с напряжением  $\sigma_{11}$  горизонтальной оси.

### 3.3. Элемент с трещинами, плоское напряженное состояние

Рассмотрим физические соотношения между напряжениями и деформациями железобетона с трещинами при кратковременном динамическом нагружении.

При выводе физических уравнений принимаются следующие предпосылки:

- трещины образуются и развиваются по площадкам, на которых действуют главные растягивающие напряжения;
- арматура в трещине полностью воспринимает растягивающие силы;
- подвижка берегов трещины вызывает нормальные и касательные напряжения в арматуре, которые учитываются в расчете как функции от ширины раскрытия трещины ( $a_{cr}$ ) и сдвигового смещения берегов ( $\Delta_{cd}$ );
- сопротивление арматуры срезу (нагельный эффект) учитывается в сечении с трещиной. На участке между трещинами нагельный эффект не учитывается;
- поперечные деформации для полос бетона между трещинами не учитываются ( $\nu_b=0$ ).

Расчет предусматривает три возможные схемы армирования, в которых арматура расположена в ортогональных направлениях, совпадающих с координатными осями  $x$  и  $y$ , а также под углом к горизонтальной оси  $\beta$  (рис. 3.2).

Установим зависимости касательных и нормальных напряжений, возникающих при смещении берегов трещины в бетоне, а также зависимости касательных и нормальных напряжений в арматуре в трещине. В зависимостях, ука-

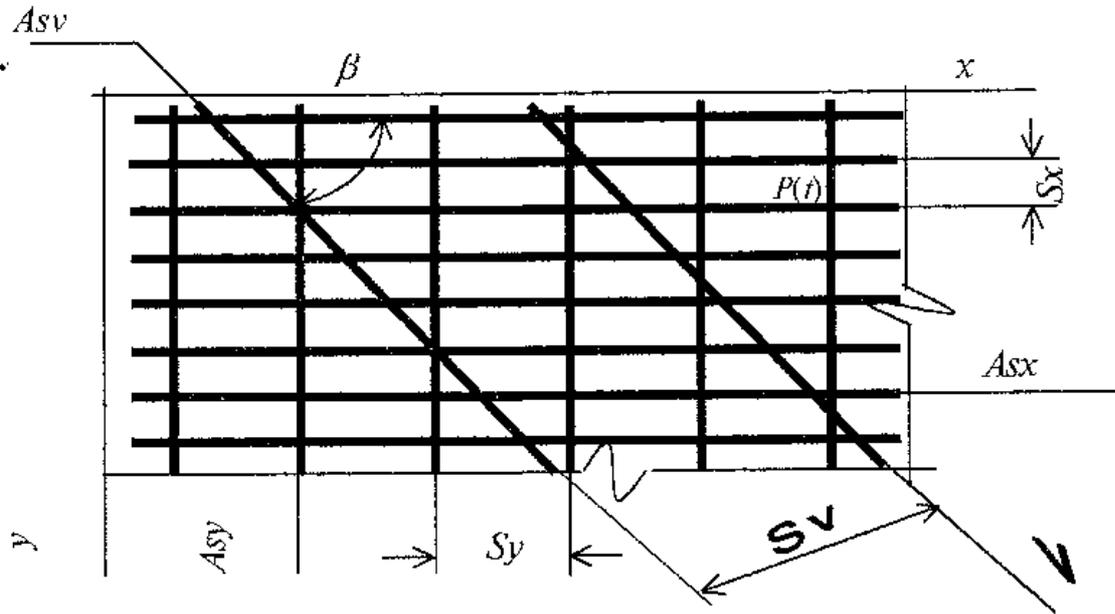


Рис. 3.2. Схема армирования

занных ниже, индекс  $d$ , означающий динамический характер, опущен.

Установим зависимость между сдвигом берегов трещины  $\Delta_{сд}$  и шириной раскрытия трещины  $a_{срс}$  в виде линейной дискретной функции, хорошо согласующейся с опытной зависимостью:

$$\Delta_{сд} = k^* a_{срс}, \text{ мм}, \quad (3.34)$$

где  $k^*$  – коэффициент, принимающий значения: 0,455 при  $0 < a_{срс} < 1,5$  мм; 0,65 при  $1,5 < a_{срс} < 2,5$  мм; 0,82 при  $2,5 < a_{срс} \leq 3,5$  мм; 0,925 при  $a_{срс} > 3,5$  мм.

В зависимости (3.34)  $a_{срс}$  – расстояние между берегами трещины. Ширина раскрытия трещины на уровне арматуры  $a_{срс,i}$  ( $i$  – направление армирования) может быть определена как разность удлинения бетона и арматуры на участке между трещинами ( $l_{срс}$ ):

$$a_{срс} = \frac{(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{btm})}{l_{срс}}, \quad (3.35)$$

здесь  $\varepsilon_{sm}$  — средние относительные удлинения растянутой арматуры на участке между трещинами;  $\varepsilon_{btm}$  — средние относительные удлинения бетона на участке между трещинами.

Если пренебречь деформациями растяжения бетона  $\varepsilon_{btm}$ , выражение (3.35) упрощается:

$$\begin{aligned} a_{crc,x} &= \psi_{sx} \frac{\sigma_{sx}}{E'_{sx}} l_{crc}; \\ a_{crc,y} &= \psi_{sy} \frac{\sigma_{sy}}{E'_{sy}} l_{crc}; \\ a_{crc,v} &= \psi_{sv} \frac{\sigma_{sv}}{E'_{sv}} l_{crc}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где  $\sigma_{sx}$ ,  $\sigma_{sy}$ ,  $\sigma_{sv}$ ;  $E'_{sx}$ ,  $E'_{sy}$ ,  $E'_{sv}$  — соответственно напряжения и секущие модули упругости арматуры, расположенной вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $v$ ;  $l_{crc}$  — определяется по теории В.И. Мурашева;  $\psi_{sx}$ ,  $\psi_{sy}$ ,  $\psi_{sv}$  — коэффициенты, выражающие неравномерность деформирования арматуры, направленной вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $v$  соответственно.

Расстояние между берегами трещины в соответствии с рис. 3.3 равно:

$$a = a_{crc,x} \sin \alpha; \quad a = a_{crc,y} \cos \alpha. \quad (3.37)$$

Величины нормальных и касательных напряжений, возникающие вследствие зацепления берегов трещины, определим из (2.38) с учетом (3.34), (3.36), (3.37):

$$\begin{aligned} \sigma_{b,mp} &= \Omega_x \sigma_{sx} \text{ или } \sigma_{b,mp} = \Omega_y \sigma_{sy}; \\ \tau_{b,mp} &= \Phi_{bx} \sin \alpha \sigma_{sx} \text{ или } \tau_{b,mp} = \Phi_{by} \cos \alpha \sigma_y, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$ ,  $\Phi_{bx}$ ,  $\Phi_{by}$  — функциональные зависимости, определяющие нормальные и касательные напряжения, возникающие по берегам трещины при ее движении:

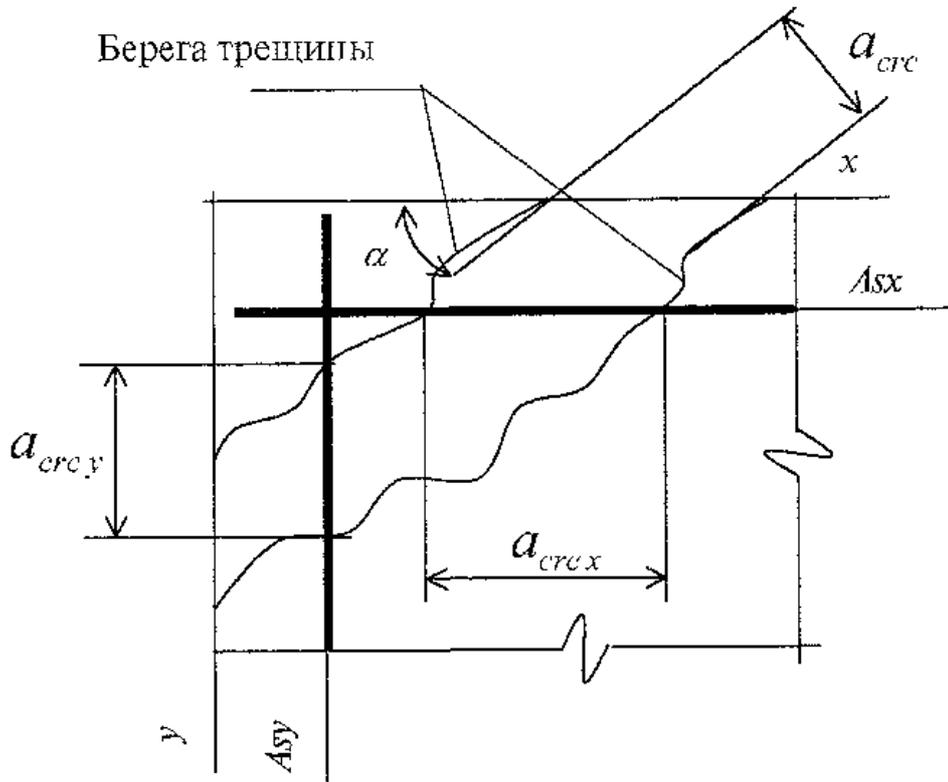


Рис. 3.3. К определению расстояния между берегами трещины

$$\Phi_{bx} = \left[ 1,8a^{-0,8} + (0,234a^{-0,707} - 0,2) \bar{R} \right] k^* \psi_{sx} l_{crc} / E'_{sx};$$

$$\Phi_{by} = \left[ 1,8a^{-0,8} + (0,234a^{-0,707} - 0,2) \bar{R} \right] k^* \psi_{sy} l_{crc} / E'_{sy};$$

$$\Omega_x = \left[ 1,35a^{-0,63} + (0,191a^{-0,522} - 0,15) \bar{R} \right] k^* \psi_{sx} l_{crc} \sin \alpha / E'_{sx};$$

$$\Omega_y = \left[ 1,35a^{-0,63} + (0,191a^{-0,522} - 0,15) \bar{R} \right] k^* \psi_{sy} l_{crc} \sin \alpha / E'_{sy}.$$

Значение касательных напряжений в арматуре определим из формулы (2.39) с учетом (3.34), (3.36), (3.37) имеем:

$$\tau_{sy} = \Phi_y \frac{\sin \alpha}{\mu_{sy}} \sigma_{sx}; \quad \tau_{sx} = \Phi_x \frac{\cos \alpha}{\mu_{sx}} \sigma_{sy}; \quad \tau_{si} = \frac{F_\tau}{\mu_{si} s_i \delta};$$

$$\tau_{sv} = \Phi_{sx} \sigma_{sx} \text{ или } \tau_{sv} = \Phi_{sy} \sigma_{sy}, \quad (3.39)$$

где  $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_{sx}, \Phi_{sy}$  — функциональные зависимости, характеризующие сопротивление арматуры срезу:

$$\Phi_x = \frac{10(a_{crc} + 0,2)^{-1} \varphi^{1,75} \bar{R}^{0,38}}{s_x \delta} \frac{k^* \psi_{sy} l_{crc}}{E'_{sy}};$$

$$\Phi_y = \frac{10(a_{crc} + 0,2)^{-1} \varphi^{1,75} \bar{R}^{0,38}}{s_y \delta} \frac{k^* \psi_x l_{crc}}{E'_{sx}};$$

$$\Phi_{sx} = \frac{10(a_{crc} + 0,2)^{-1} \varphi^{1,75} \bar{R}^{0,38}}{\mu_{sv} s_v \delta} \frac{k^* \psi_v l_{crc} \sin \alpha}{E'_{sx}};$$

$$\Phi_{sy} = \frac{10(a_{crc} + 0,2)^{-1} \varphi^{1,75} \bar{R}^{0,38}}{\mu_{sv} s_v \delta} \frac{k^* \psi_v l_{crc} \cos \alpha}{E'_{sy}}.$$

Рассмотрим схему непересекающихся трещин. Определим зависимости между напряжениями в арматуре в трещине, и касательными  $\tau_{xy}, \tau_{yx}$  и нормальными  $\sigma_x, \sigma_y$  полными напряжениями, действующими по граням выделенного плоского элемента.

Рассмотрим равновесие треугольной призмы  $ao\bar{b}$ , наклонная грань которой ( $ab$ ) проходит по трещине, а две другие совпадают с направлениями осей  $x$  и  $y$  (рис. 3.4). Длину грани  $ab$  считаем равной единице. В уравнениях равновесия учтем, что  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты полных напряжений, действующих по плоским граням элемента,

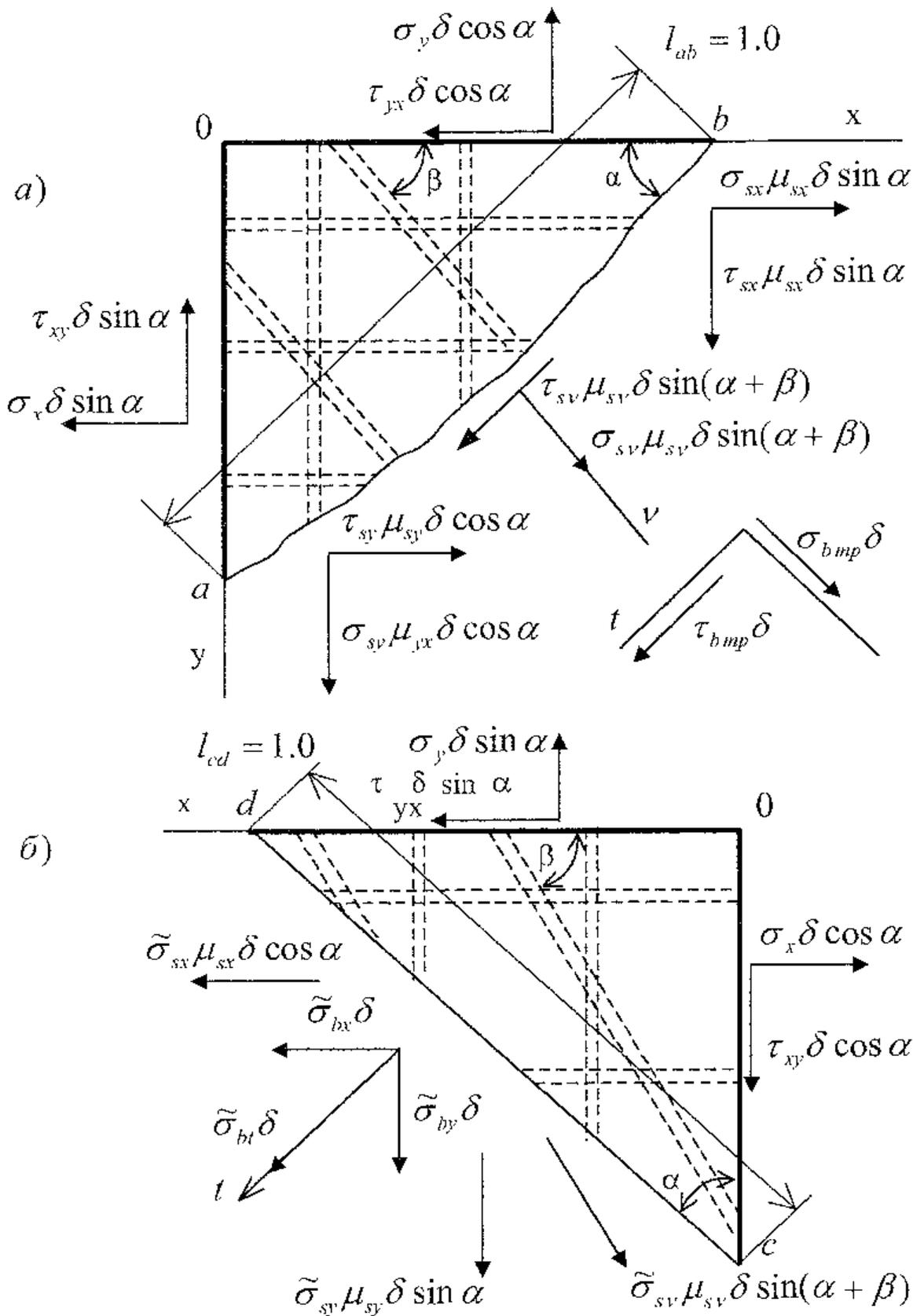


Рис. 3.4. Напряжения в арматуре в сечении с трещиной (а) и на участке между трещинами (б)

равные сумме осредненных напряжений в бетоне ( $\sigma_{bx}$ ,  $\sigma_{by}$ ,  $\tau_{bxy}$ ) и напряжений в арматуре ( $\sigma_{sx}$ ,  $\sigma_{sy}$ ,  $\tau_{sxy}$ ), т.е.:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{bx} + \sigma_{sx}; \\ \sigma_y &= \sigma_{by} + \sigma_{sy}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{bxy} + \tau_{sxy},\end{aligned}$$

где

$$\sigma_{sx} = E'_{sx} \varepsilon_{sx} \mu_{sx} + E'_{sv} \varepsilon_{sv} \mu_{sv} \cos \beta;$$

$$\sigma_{sy} = E'_{sy} \varepsilon_{sy} \mu_{sy} + E'_{sv} \varepsilon_{sv} \mu_{sv} \sin \beta;$$

$$\tau_{sxy} = 0,2 \left( \mu_{sx} E'_{sx} + \mu_{sv} E'_{sv} \cos \beta + \mu_{sy} E'_{sy} + \mu_{sv} E'_{sv} \sin \beta \right) \gamma_{xy};$$

$E'_{sx}$ ,  $E'_{sy}$ ,  $E'_{sv}$  – секущие модули деформации арматуры соответствующего направления;  $\sigma_{si}$  – напряжения в арматуре в сечении с трещиной ( $i=x, y, v$ ).

Уравнения равновесия запишем в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x \sin \alpha + \tau_{yx} \cos \alpha - \sigma_{sx} \mu_{sx} \sin \alpha - \tau_{xy} \mu_{sy} \cos \alpha + \tau_{b,mp} \cos \alpha - \\ - \sigma_{b,mp} \sin \alpha - \sigma_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta + \tau_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta = 0;\end{aligned}\tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha - \sigma_{sy} \mu_{sy} \cos \alpha - \tau_{sx} \mu_{sx} \sin \alpha - \tau_{b,mp} \sin \alpha - \\ - \sigma_{b,mp} \cos \alpha - \sigma_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta - \tau_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta = 0.\end{aligned}$$

Преобразуя (3.40) с учетом (3.38) и (3.39), определим напряжения в горизонтальной и вертикальной арматуре в сечении с трещиной:

$$\sigma_{sx} = \frac{\sigma_x + \tau_{yx} \operatorname{ctg} \alpha - \sigma_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta / \sin \alpha}{\mu_{sx} - \Phi_y \cos \alpha - \Phi_{bx} \cos \alpha + \Omega_x - \Phi_{sx} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta / \sin \alpha};$$

$$\sigma_{sy}^* = \frac{\sigma_y + \tau_{yx} \operatorname{tg} \alpha - \sigma_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta / \cos \alpha}{\mu_{sy} + \Phi_y \sin \alpha + \Phi_{by} \sin \alpha + \Omega_y - \Phi_{sy} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta / \cos \alpha}. \quad (3.41)$$

Для определения напряжений в наклонной арматуре запишем условие совместности деформаций арматуры в трещине [13]:

$$\frac{\sigma_{sv}}{E'_{sv} \sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sigma_{sx} \cos \beta}{E'_{sx} \sin \alpha} + \frac{\sigma_{sy} \sin \beta}{E'_{sy} \cos \alpha}. \quad (3.42)$$

Напряжения в наклонной арматуре из (3.42) с учетом (3.41):

$$\sigma_{sv} = \frac{(\sigma_x + \tau_{xy} \operatorname{ctg} \alpha) \cos \beta}{AE'_{sx} \sin \alpha \Omega^*} + \frac{(\sigma_y + \tau_{yx} \operatorname{tg} \alpha) \sin \beta}{BE'_{sy} \cos \alpha \Omega^*}, \quad (3.43)$$

где

$$\Omega^* = \frac{1}{E'_{sv} \sin(\alpha + \beta)} + \frac{\mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos^2 \alpha}{AE'_{sx} \sin^2 \alpha} + \frac{\mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin^2 \beta}{BE'_{sy} \cos^2 \alpha};$$

$$A = \mu_{sx} - \Phi_y \cos \alpha - \Phi_{bx} \cos \alpha + \Omega_x - \frac{\Phi_{sx} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta}{\sin \alpha};$$

$$B = \mu_{sy} - \Phi_x \sin \alpha - \Phi_{by} \sin \alpha + \Omega_y + \frac{\Phi_{sy} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Подставив (3.42) в (3.41), получим окончательно:

$$\sigma_{sx} = \frac{\sigma_x + \tau_{yx} \operatorname{ctg} \alpha}{A} - \frac{(\sigma_x + \tau_{yx} \operatorname{ctg} \alpha) \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos^2 \beta}{A^2 E'_{sx} \sin^2 \alpha \Omega^*} - \frac{(\sigma_y + \tau_{yx} \operatorname{tg} \alpha) \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin 2\beta}{ABE'_{sy} \sin 2\alpha \Omega^*};$$

$$\sigma_{sy} = \frac{\sigma_y + \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha}{B} - \frac{(\sigma_x + \tau_{xy} \operatorname{ctg} \alpha) \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin 2\beta}{ABE'_{sx} \sin 2\alpha \Omega^*} - \frac{(\sigma_x + \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha) \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin^2 \beta}{B^2 E'_{sy} \cos^2 \alpha \Omega^*}.$$
(3.44)

Средние деформации арматуры определим по формулам:

$$\varepsilon_{smx} = \frac{\sigma_{sx} \psi_{sx}}{E'_{sx}}; \quad \varepsilon_{smy} = \frac{\sigma_{sy} \psi_{sy}}{E'_{sy}}.$$
(3.45)

Подставив (3.44) в (3.45), получим:

$$\varepsilon_{smx} = c_{s11} \sigma_x + c_{s12} \sigma_y + c_{s13} \tau_{xy};$$

$$\varepsilon_{smy} = c_{s21} \sigma_x + c_{s22} \sigma_y + c_{s23} \tau_{xy},$$
(3.46)

здесь

$$c_{x11} = \frac{\psi_{sx}}{E'_{sx}} \left( \frac{1}{A} - \frac{\mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos^2 \beta}{A^2 E'_{sx} \sin^2 \alpha \Omega^*} \right);$$

$$c_{x12} = -\frac{\psi_{sx} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin 2\beta}{E'_{sx} A B E'_{sy} \sin 2\alpha \Omega^*};$$

$$c_{x13} = -\frac{\psi_{sx}}{E'_{sx}} \left( \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{A} - \frac{\mu_{sv} \operatorname{ctg} \alpha \sin(\alpha + \beta) \cos^2 \beta}{A^2 E'_{sx} \sin^2 \alpha \Omega^*} - \frac{\mu_{sv} \operatorname{tg} \alpha \sin(\alpha + \beta) \sin 2\beta}{A B E'_{sx} \sin 2\alpha \Omega^*} \right);$$

$$c_{x21} = -\frac{\psi_{sy}\mu_{sy}\sin(\alpha+\beta)\sin 2\beta}{E'_{sy}ABE'_{sx}\sin 2\alpha\Omega^*}; \quad (3.47)$$

$$c_{x22} = \frac{\psi_{sy}}{E'_{sy}} \left( \frac{1}{B} - \frac{\mu_{sv}\sin(\alpha+\beta)\sin^2\beta}{B^2E'_{sy}\cos^2\alpha\Omega^*} \right);$$

$$c_{x23} = -\frac{\psi_{sy}}{E'_{sy}} \left( \frac{\operatorname{tg}\alpha}{B} - \frac{\mu_{sv}\operatorname{ctg}\alpha\sin(\alpha+\beta)\sin 2\beta}{ABE'_{sx}\sin 2\alpha\Omega^*} - \frac{\mu_{sv}\operatorname{tg}\alpha\sin(\alpha+\beta)\sin^2\beta}{B^2E'_{sx}\cos^2\alpha\Omega^*} \right).$$

Зависимость угловых деформаций  $\gamma_{smxy}$  принимаем, следуя [13]:

$$\gamma_{smxy} = \varepsilon_{smx}\operatorname{ctg}\alpha + \varepsilon_{smy}\operatorname{tg}\alpha. \quad (3.48)$$

Подставим (3.46) в (3.48) и, учитывая закон парности касательных напряжений  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , получим:

$$\gamma_{smxy} = c_{s31}\sigma_x + c_{s32}\sigma_y + c_{s33}\tau_{xy}, \quad (3.49)$$

где

$$\begin{aligned} c_{s31} &= c_{s11}\operatorname{ctg}\alpha + c_{s21}\operatorname{tg}\alpha; \\ c_{s32} &= c_{s12}\operatorname{ctg}\alpha + c_{s22}\operatorname{tg}\alpha; \\ c_{s33} &= c_{s13}\operatorname{ctg}\alpha + c_{s23}\operatorname{tg}\alpha. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Установим влияние деформаций полос между трещинами на общие деформации элемента. Для этого рассмотрим равновесие треугольной призмы  $ocd$  на рис. 3.4 б. Призма  $ocd$  определена таким образом, что ее наклонная грань  $cd=1$  перпендикулярна грани призмы  $ab$  на рис. 3.4 а. На наклонной грани  $cd$  действуют главные сжимающие напряжения в бетоне  $\tilde{\sigma}_{b1}$  и напряжения в арматуре  $\tilde{\sigma}_{sv}$ ,  $\tilde{\sigma}_{sy}$ ,  $\tilde{\sigma}_{sx}$ . Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned}
& \sigma_x \cos \alpha - \tau_{xy} \sin \alpha - \tilde{\sigma}_{sx} \cos \alpha \mu_{sx} - \tilde{\sigma}_{bx} + \\
& \quad + \tilde{\sigma}_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta = 0; \\
& \sigma_y \sin \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha - \tilde{\sigma}_{sy} \sin \alpha \mu_{sy} - \tilde{\sigma}_{by} - \\
& \quad - \tilde{\sigma}_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta = 0,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

где  $\tilde{\sigma}_{bx}$ ,  $\tilde{\sigma}_{by}$  – проекции главного напряжения ( $\tilde{\sigma}_{bt}$ ) на оси  $x$  и  $y$ ;  $\tilde{\sigma}_{sx}$ ,  $\tilde{\sigma}_{sy}$ ,  $\tilde{\sigma}_{sv}$  – напряжения в арматуре на участке между трещинами.

Приведенное усилие, воспринимаемое арматурой, определяется с площадки  $\delta l$ , где  $l = \sin(\alpha + \beta)$  (рис. 3.5).

Условие совместности деформаций арматуры на участке между трещинами составим с учетом напряжений в арматуре  $\tilde{\sigma}_{sx}$  и  $\tilde{\sigma}_{sv}$ .

Деформации бетона в направлении осей  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_n \sin^2 \alpha + \varepsilon_t \cos^2 \alpha - (\gamma_{nt} + \gamma_m) \sin \alpha \cos \alpha; \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_n \cos^2 \alpha + \varepsilon_t \sin^2 \alpha + (\gamma_{nt} + \gamma_m) \sin \alpha \cos \alpha; \\
\gamma_{xy} &= (\varepsilon_n - \varepsilon_t) \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_{nt} \sin^2 \alpha - \gamma_m \cos^2 \alpha; \\
\gamma_{yx} &= (\varepsilon_n - \varepsilon_t) \sin \alpha \cos \alpha - \gamma_{nt} \cos^2 \alpha + \gamma_m \sin^2 \alpha.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Взаимно ортогональные площадки  $cd$  и  $ab$  (рис. 3.4) являются главными, и, следовательно, на них касательные напряжения равны нулю, т.е.  $\tau_m = \tau_n = 0$ .

Учитывая, что деформации бетона в направлении трещины ( $n$ ) равны нулю, из первого и второго уравнений (3.52) получим:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{bx} &= \frac{\tilde{\sigma}_{bt}}{E'_{bt}} \cos^2 \alpha = \frac{\tilde{\sigma}_{bx}}{E'_{bx}} \cos \alpha; \\
\tilde{\varepsilon}_{by} &= \frac{\tilde{\sigma}_{bt}}{E'_{bt}} \sin^2 \alpha = \frac{\tilde{\sigma}_{by}}{E'_{bx}} \sin \alpha; \\
\tilde{\varepsilon}_{sx} &= \tilde{\varepsilon}_{bx}; \quad \tilde{\varepsilon}_{sy} = \tilde{\varepsilon}_{by},
\end{aligned} \tag{3.53}$$

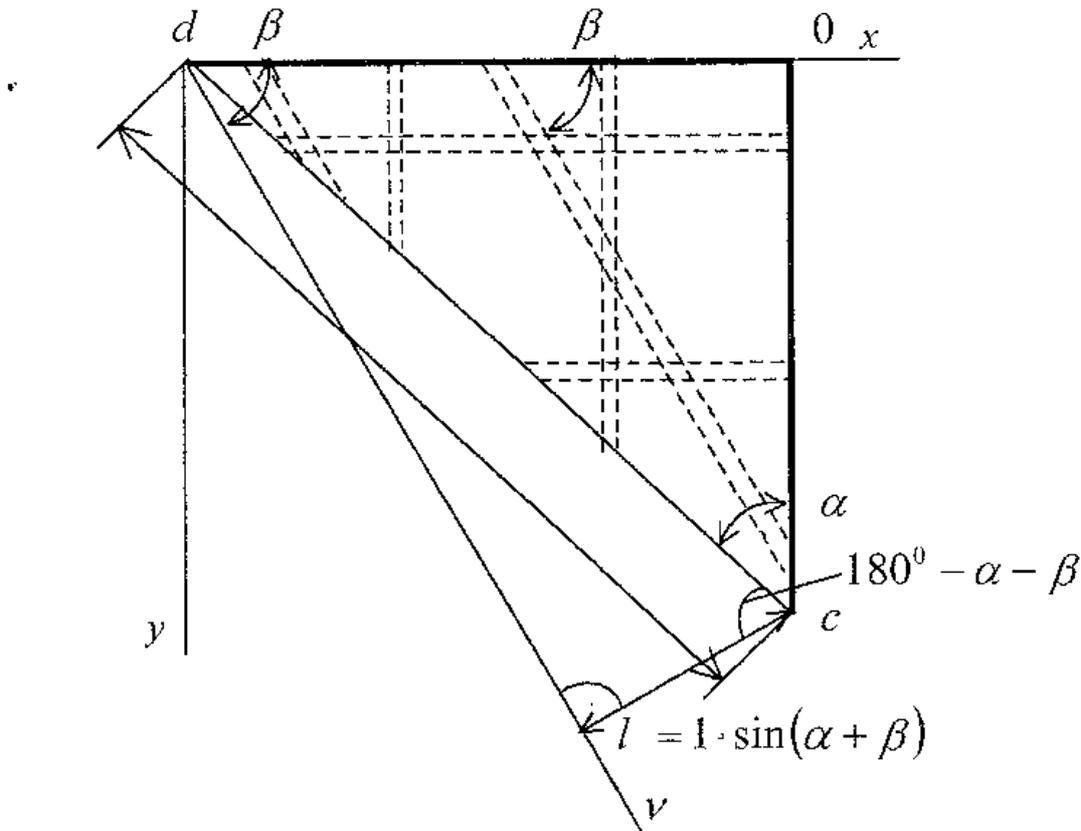


Рис. 3.5. Схема для определения усилий в наклонной арматуре

где  $\tilde{\varepsilon}_{sx}, \tilde{\varepsilon}_{sy}$  — деформации арматуры на участке между трещинами в направлении осей  $x$  и  $y$ .

Деформации полосы бетона между трещинами в направлении оси  $v$  при коэффициенте Пуассона, равном нулю, равны:

$$\tilde{\varepsilon}_{bv} = \tilde{\varepsilon}_{by} \sin^2 \beta + \tilde{\varepsilon}_{bx} \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_{bxy} \sin 2\beta. \quad (3.54)$$

Так как  $\tilde{\varepsilon}_{bv} = \tilde{\varepsilon}_{by}$ , то  $\tilde{\sigma}_{sv} = \varepsilon_{bv} E'_{sv}$ , уравнения (3.51) с учетом условий совместности деформаций бетона и арматуры (3.52) и (3.53) примут вид:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_x \cos \alpha - \tau_{yx} \sin \alpha - E'_{sx} \mu_{sx} \cos \alpha \tilde{\varepsilon}_{bx} - \frac{E'_{bf}}{\cos \alpha} \tilde{\varepsilon}_{bx} + \\
 & + E'_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta \left( \tilde{\varepsilon}_{by} \sin^2 \beta + \tilde{\varepsilon}_{bx} \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_{bxy} \sin 2\beta \right) = 0; \quad (3.55) \\
 & \sigma_y \sin \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha - E'_{sy} \mu_{sx} \sin \alpha \tilde{\varepsilon}_{by} - \frac{E'_{bf}}{\sin \alpha} \tilde{\varepsilon}_{by} - \\
 & + E'_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta \left( \tilde{\varepsilon}_{by} \sin^2 \beta + \tilde{\varepsilon}_{bx} \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_{bxy} \sin 2\beta \right) = 0.
 \end{aligned}$$

В двух уравнениях (3.55) – три неизвестных  $\tilde{\varepsilon}_{bx}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{by}$ ,  $\tilde{\gamma}_{bxy}$ . Введем дополнительное уравнение, устанавливающее связь между углом сдвига и деформациями бетона, т.е. между компонентами деформаций  $\tilde{\varepsilon}_{bx}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{by}$ ,  $\tilde{\gamma}_{bxy}$ , в виде:

$$\tilde{\gamma}_{bxy} = - \left( \tilde{\varepsilon}_{bx} \operatorname{tg} \alpha + \tilde{\varepsilon}_{by} \operatorname{ctg} \alpha \right). \quad (3.56)$$

Решая совместно (3.55) и (3.56), получим зависимости, связывающие деформации бетона на участке между трещинами с напряжениями на гранях элемента:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}_{bx} &= c_{b11} \sigma_x + c_{b12} \sigma_y + c_{b13} \tau_{yx}; \\
 \tilde{\varepsilon}_{by} &= c_{b21} \sigma_x + c_{b22} \sigma_y + c_{b23} \tau_{xy}.
 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Коэффициенты влияния деформаций полос бетона между трещинами на общие деформации элемента  $c_{bij}$  имеют сложное математическое выражение и мало пригодны для практических расчетов. Упростить эти выражения можно за счет исключения влияния деформаций наклонной арматуры на деформации бетона в направлении трещины  $\tilde{\varepsilon}_{bx}$  и  $\tilde{\varepsilon}_{by}$ . Тогда коэффициенты  $c_{bij}$  системы (3.57) примут вид:

$$\begin{aligned}
 c_{b11} &= \frac{\cos^2 \alpha}{E'_{sx} \cos^2 \alpha \mu_{sx} + E'_{bt}}; & c_{b13} &= -\frac{\sin 2\alpha}{2(E'_{sx} \cos^2 \alpha \mu_{sx} + E'_{bt})}; \\
 c_{b22} &= \frac{\sin^2 \alpha}{E'_{sy} \sin^2 \alpha \mu_{sy} + E'_{bt}}; & c_{b23} &= -\frac{\sin 2\alpha}{2(E'_{sy} \sin^2 \alpha \mu_{sy} + E'_{bt})};
 \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$c_{b12} = c_{b21} = 0.$$

Формулу (3.56) перепишем с учетом (3.57), тогда:

$$\tilde{\gamma}_{bxy} = c_{b31} \sigma_x + c_{b32} \sigma_y + c_{b33} \tau_{xy}, \quad (3.59)$$

где

$$\begin{aligned}
 c_{b31} &= c_{b13}; & c_{b32} &= c_{b23}; \\
 c_{b33} &= \frac{\cos^2 \alpha}{E'_{sy} \sin^2 \alpha \mu_{sy} + E'_{bt}} + \frac{\sin^2 \alpha}{E'_{sx} \cos^2 \alpha \mu_{sx} + E'_{bt}}.
 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Относительные деформации железобетонного элемента складываются из средних относительных деформаций арматуры, связанных с раскрытием трещин и сдвигом их берегов ( $\varepsilon_{smx}$ ,  $\varepsilon_{smy}$ ,  $\gamma_{smxy}$ ), и средних относительных деформаций полос между трещинами, т.е.:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{smx} + \tilde{\varepsilon}_{bx}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{smy} + \tilde{\varepsilon}_{by}; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{smxy} + \tilde{\gamma}_{bxy}$$

ИЛИ:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= c_{11} \sigma_x + c_{12} \sigma_y + c_{13} \tau_{xy}; \\
 \varepsilon_y &= c_{21} \sigma_x + c_{22} \sigma_y + c_{23} \tau_{xy}; \\
 \gamma_{xy} &= c_{31} \sigma_x + c_{32} \sigma_y + c_{33} \tau_{xy},
 \end{aligned} \quad (3.61)$$

где

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= c_{s11} + c_{b11}; & c_{12} &= c_{s12}; & c_{13} &= c_{s13} + c_{b13}; \\
 c_{22} &= c_{s22} + c_{b22}; & c_{23} &= c_{s23} + c_{b23}; & c_{33} &= c_{s33} + c_{b33}; \\
 c_{21} &= c_{s21}; & c_{31} &= c_{s31} + c_{b31}; & c_{32} &= c_{s32} + c_{b32}.
 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Коэффициенты  $c_{sy}$  и  $c_{hij}$  определяются по формулам (3.47), (3.50), (3.58), (3.60). При отсутствии наклонной арматуры выражения (3.47) и (3.50) принимают вид:

$$c_{s11} = \frac{\psi_{sx}}{E'_{sx} A^*}; \quad c_{s12} = 0; \quad c_{s21} = 0; \quad c_{s13} = \frac{\psi_{sx} \operatorname{ctg} \alpha}{E'_{sx} A^*};$$

$$c_{s22} = \frac{\psi_{sy}}{E'_{sy} B^*}; \quad c_{s23} = \frac{\psi_{sy} \operatorname{tg} \alpha}{E'_{sy} B^*}; \quad c_{s31} = c_{s13}; \quad (3.63)$$

$$c_{s32} = c_{s23}; \quad c_{s33} = c_{s11} \operatorname{ctg}^2 \alpha + c_{s22} \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

где

$$A^* = \mu_{sx} - \Phi_y \cos \alpha - \Phi_{bx} \cos \alpha + \Omega_x;$$

$$B^* = \mu_{sy} + \Phi_x \sin \alpha - \Phi_{by} \sin \alpha + \Omega_y.$$

При отсутствии наклонной арматуры коэффициенты  $c_{sij}$  системы (3.61) определяются в соответствии с (3.62), при этом коэффициенты  $c_{sij}$  принимаются по (3.63). Матрица коэффициентов податливости  $c_{sij}$  симметрична относительно главной диагонали. Анализ коэффициентов  $c_{sij}$  показал, что они являются функциями переменных величин, определяющих нелинейный процесс динамического сопротивления железобетона, включая образование и раскрытие трещин, развитие нормальных и касательных напряжений, возникающих по берегам трещины при их смещении, неравномерность деформаций арматуры в сечении с трещиной и на участке между ними, влияние скорости деформирования и процента косвенного армирования, выражаемое через секущий модуль деформаций бетона, неупругие деформации арматуры и другое.

### 3.4. Учет локального разгрузки

После появления неупругих деформаций в некоторых элементах конструкции, а также трещин в бетоне происходит процесс перераспределения внутренних усилий. При этом в некоторых сечениях возможна локальная разгрузка. При этом за начало разгрузки элемента без трещины принимается момент снижения деформаций бетона по одной из главных площадок.

Для элемента с трещинами за начало разгрузки можно принять уменьшение деформаций арматуры в трещине или снижение деформаций для полос бетона между трещинами. На момент начала разгрузки матрица упругости  $[D]$  выражает упруго-пластические свойства железобетона и для элемента с трещинами является функцией секущего модуля деформации бетона и арматуры, неупругих свойств бетона, проявляющихся при зацеплении выступов по берегам трещины при ее движении, упруго-пластического сопротивления арматуры при срезе и других факторов. С учетом данных обстоятельств зависимость между деформациями и напряжениями для элемента с трещинами будет нелинейной в виде кривой 1 на рис. 3.6. В реальных условиях разгрузка бетона происходит по прямой, параллельной касательной к кривой  $\sigma_v - \varepsilon_v$  ( $\sigma_v$  и  $\varepsilon_v$  — некоторые обобщенные функциональные переменные) в начале координат с некоторым восстановлением неупругих деформаций в конце разгрузки (линии 2, 4 на рис. 3.6). В этом случае значения напряжений в бетоне и арматуре определяются лишь упругой частью деформации. Такой подход используется в динамических расчетах изгибаемых железобетонных конструкций.

Эксперименты показывают, что в процессе деформирования конструкции под действием динамической нагрузки [16, 19] возможны случаи, когда при упругом и упруго-пластическом деформировании наибольшие значения пе-

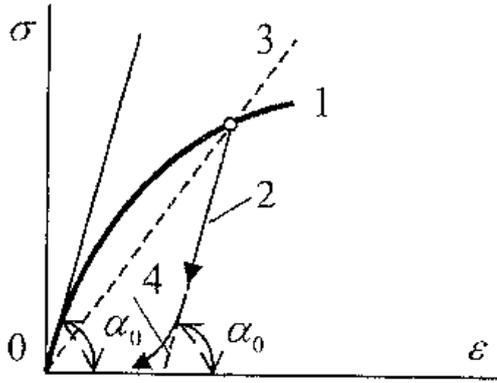


Рис. 3.6. Схема диаграммы с разгрузкой

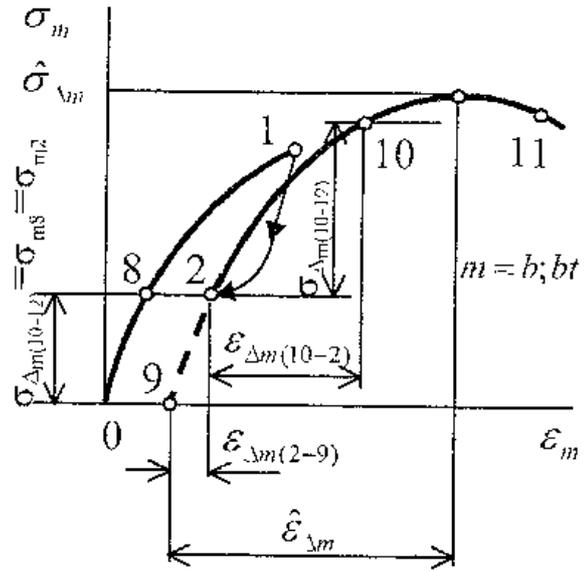


Рис. 3.7. Схема диаграммы с неполной разгрузкой [12]

ремещений  $w(t)$  и деформаций  $\varepsilon(t)$  могут возникать в процессе первого, второго или  $i$ -го цикла колебаний, что определяется соотношением частотных характеристик конструкции и параметров нагрузки.

Основываясь на подходе, принятом в работах [11, 12, 14, 29], рассмотрим диаграммы сопротивления железобетонных сечений в условиях, когда ветви возрастающих напряжений сменяются различными по уровню разгрузками и наоборот.

На рис. 3.7 показана диаграмма повторного нагружения, которое начинается в некоторой точке 2 после неполной разгрузки, начало которой обозначено точкой 1.

Через точку 2 проведена кусочная диаграмма 9–2–10, имеющая аналитическую зависимость в виде [12]:

$$\varepsilon_{\Delta m} = \frac{\sigma_{\Delta m}}{E_{\Delta m}^0 \nu_{\Delta m}}; \quad (3.64)$$

$$\nu_{\Delta m} = \dot{\nu}_{\Delta m} + (\nu_{\Delta 0} - \dot{\nu}_{\Delta m}) \sqrt{1 - \omega_1 \eta_{\Delta} - \omega_2 \eta_{\Delta}^2},$$

где  $m$  – индекс материала ( $m=b$  – при сжатии;  $m=bt$  – при растяжении); знак «+» – для восходящей ветви, знак «-» – для нисходящей;  $\eta_{\Delta}$  – уровень приращения напряжений ( $\eta_{\Delta} = \sigma_{\Delta m} / \sigma_{\Delta m}^0$ );  $E_{\Delta m}^0$  – модуль деформаций в начале отрезка диаграммы; коэффициент  $\nu_{\Delta m}$  – изменения модуля  $E_{\Delta m}^0$ ;  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – коэффициенты, характеризующие искривление отрезка диаграммы,  $\omega_2 = 1 - \omega_1$ .

Или:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\Delta m} &= \tilde{\gamma}_{\Delta 1} \hat{\sigma}_m; \quad \hat{\varepsilon}_{\Delta m} = \tilde{\gamma}_{\Delta 2} \hat{\varepsilon}_m; \quad E_{\Delta m}^0 = \tilde{\gamma}_{\Delta 3} E_b^0; \\ \omega_1 &= 2 - 2,5 \hat{\nu}_m + (36 \nu_{m1} - 28) \sqrt{\hat{\nu}_{\Delta m} - \hat{\nu}_m}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

где  $\tilde{\gamma}_{\Delta i}$  – корректирующие функции ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\tilde{\gamma}_{\Delta i} = 1 + \beta_{1i} \varphi_v + \beta_{2i} \varphi_v^2 + \beta_{3i} \varphi_v^3.$$

Коэффициенты  $\beta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) зависят от вида напряжения – растяжение или сжатие.

$$\varphi_v = \frac{V_{m8} - V_{m1}}{1 - V_m},$$

где  $V_{m8}$  – коэффициент секущего модуля для точки 8 на исходной диаграмме. Точка 8 находится по напряжениям на уровне точки 2, т.е.  $\sigma_{m2} = \sigma_{m8}$ .

Диаграмма 9–2–10 имеет некоторый фиктивный начальный отрезок 9–2;  $\sigma_{m(2-9)} = \sigma_{m2}$  и  $\varepsilon_{\Delta m(2-9)}$  – приращения напряжений и деформаций на фиктивном отрезке. Эти приращения вычитаются из общих приращений, отсчитываемых от точки 9, чтобы получить действительные значения приращений, которые отсчитываются от точки 2.

Следуя [16], заметим, что при нагрузках, вызывающих знакопеременные напряжения в железобетонном сечении, возможно использование математической модели Мей-

зинг-типа. Например, модель Ромберга—Осгуда фиксирует скелетную ветвь диаграммы:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_T} + \alpha \left[ \frac{\sigma}{\sigma_T} \right]^r \operatorname{sgn} \sigma \right), \quad (3.66)$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_T}{E_0(1+\alpha)}$ ,

а также ветвь разгрузки и повторного нагружения:

$$\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma - \sigma^*}{\sigma_T} + 2\alpha \left[ \frac{\sigma - \sigma^*}{2\sigma_T} \right]^r \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma^*) \right), \quad (3.67)$$

где  $\sigma_T$  — условный предел пропорциональности;  $E_0$  — начальный модуль упругости;  $r$  и  $\alpha$  — константы материала;  $\sigma^*$  и  $\varepsilon^*$  — напряжения и деформации в начале разгрузки или повторного нагружения, причем секущая на начальном участке диаграммы согласована с законом Гука, т.е. при  $\sigma = \sigma_T$ ,  $\varepsilon = \frac{\sigma_T}{E_0}$ . При  $r \rightarrow \infty$  модель (3.66) и (3.67) переходит в идеально упруго-пластическую диаграмму Прандтля.

На рис. 3.8 показана схема, где предусмотрены возможные варианты режима деформаций. Кривая 1 соответствует выражению (3.66), а предельные кривые 4 и 44 — зависимости (3.67). Эти линии ограничивают область напряжений. Таким образом, вводится ограничение напряжений по модулю, когда циклы повторных нагружений и разгрузок не имеют полного размаха.

При разгрузках с ветви 1 используется формула (3.67) для ветвей 2 и 22 или 4 и 44 с фиксацией новых предельных кривых 4 и 44, когда напряжение и деформация превысят соответственно значения  $\sigma_m$  и  $\varepsilon_m$  точек подвеса предельных кривых на предыдущем временном шаге (или в третьем квадранте плоскости  $\sigma$ — $\varepsilon$  станут меньше этих величин с обратным знаком).

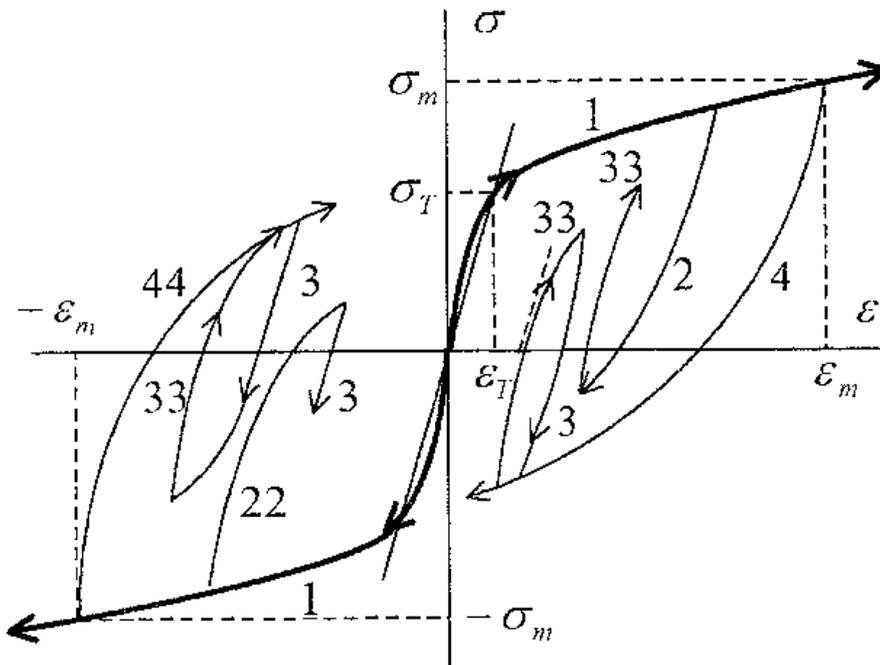


Рис. 3.8. Диаграмма упруго-пластического материала Мейзинг-типа [16]

При повторном нагружении и разгрузке проводится усечение напряжений предельными кривыми 4 и 44. Для кривых 3 и 33 также используется зависимость (3.67), но для точек подвеса внутри области полных размахов при аналогичной процедуре усечения напряжений. Поскольку в динамических расчетах обычно используют явную зависимость напряжений от деформаций, вопрос обращения функций решается с применением сплайн-аппроксимации, а затем сплайн-интерполяции функции по аргументу  $\varepsilon$ .

Опыт применения описанной модели в динамических расчетах железобетонных конструкций показывает, что формулы (3.66) и (3.67) должны быть скорректированы в зависимости от условий поставленной задачи. Это позволит учесть влияние уровня предшествующего нагружения и накопления остаточных деформаций при последующих

пиках, а также влияние режима растяжения-сжатия на прочностные и деформативные свойства бетона.

### 3.5. Железобетонный элемент с трещиной при изгибе

В общем случае при двузначной эпюре железобетонное сечение с возрастанием внутренних усилий под влиянием внешних воздействий от нуля до предельных значений проходит пять стадий напряженного состояния [26], включая следующие: 1 – малые деформации в сечении, когда напряжения в растянутой зоне сечения меньше  $R_{bt}$ ; 2 – деформации и напряжения в растянутой зоне бетона достигли предельных значений, появились трещины; 3 – деформации с трещинами; 4 – напряжения в растянутой арматуре достигли предела текучести или напряжения сжатого бетона – предела прочности; 5 – предельное напряженное состояние, когда наступает полное разрушение сечения.

Рассмотрим физические соотношения между напряжениями и деформациями железобетона с трещинами на кратковременные динамические нагрузки при изгибе.

При выводе физических уравнений принимаются следующие предпосылки:

- сечения плоские и нормальные к срединной поверхности КЭ до изгиба остаются плоскими и нормальными к искривленной срединной поверхности КЭ после изгиба (гипотеза Бернулли);
- трещины образуются и развиваются по площадкам, на которых действуют главные растягивающие напряжения;
- усилия в растянутой арматуре равны средним на участке между трещинами, коэффициент В.И. Мурашева  $\psi_s=1$ ;
- напряжения в растянутой зоне бетона после образо-

вания трещин  $\sigma_{bt} = \frac{1}{2} R_{bt} \frac{\varepsilon_{btu}}{\varepsilon_s}$ ,  $\varepsilon_{btu}$  – предельная растяжимость бетона,  $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{btu}$ .

Расчет предусматривает симметричное и асимметричное армирование КЭ относительно его срединной поверхности. Схема деформаций и эпюры напряжений в нормальном сечении показаны на рис. 3.9.

Расчет изгибаемого железобетонного элемента на основе полной диаграммы деформирования  $\sigma-\varepsilon$  сечения может быть упрощен, если криволинейную диаграмму сжатого бетона представить дробно-линейной функцией на восходящей ветви и прямолинейной на нисходящей [26].

Использование самостоятельной формулы для нисходящей ветви облегчает расчет, учитывающий влияние про-

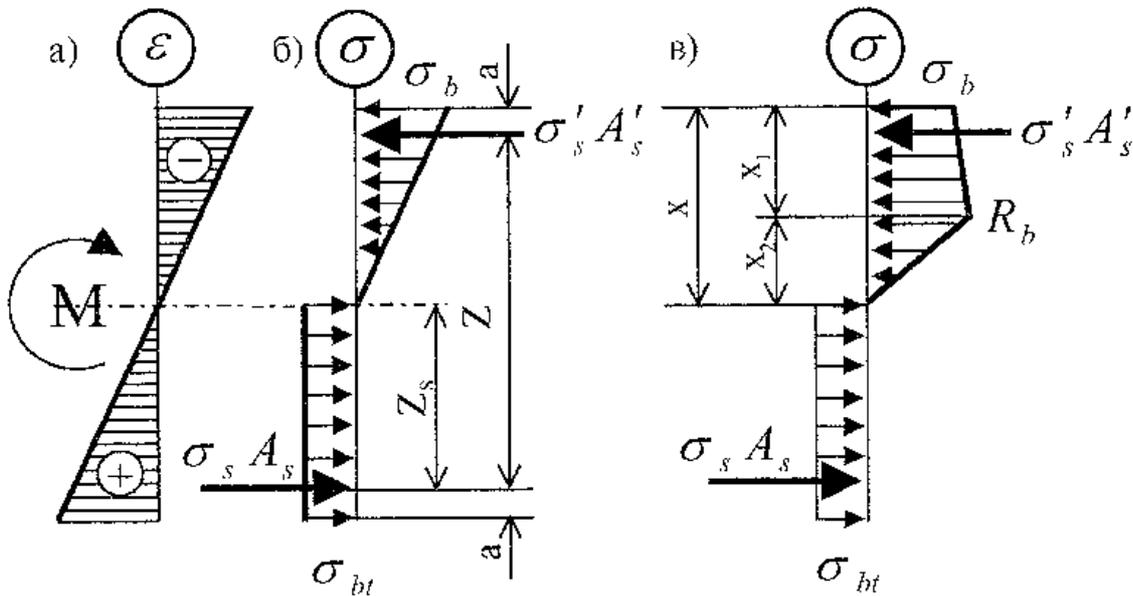


Рис. 3.9. Эпюры деформаций и напряжений в нормальном сечении изгибаемого железобетонного КЭ: а) эпюра деформаций по высоте сечения КЭ от момента  $M$ ; б)  $\sigma_b \leq R_b$ ,  $\sigma_{bt} \leq R_{bt}$ , ( $\chi_{cr} < \chi \leq \chi_f$ ); в)  $R_b < \sigma_b \leq R_u$ ,  $\sigma_{bt} = R_{bt}$ , ( $\chi_f < \chi \leq \chi_u$ )

цента армирования, стесненность деформаций и другие факторы. Запишем зависимость  $\sigma_b - \varepsilon_b$  в виде:

$$\sigma_b = \nu_b E_b \varepsilon_b, \quad (3.68)$$

где 
$$\nu_b = \frac{1}{1 + \alpha_b \varepsilon_b} \text{ при } 0 < \varepsilon_b \leq \varepsilon_{bR};$$

$$\nu_b = \frac{\gamma_1}{\varepsilon_b} - \gamma_2 \text{ при } \varepsilon_{bR} < \varepsilon_b \leq \varepsilon_{bu};$$

$$\alpha_b = \frac{\nu_{bR}^{-1} - 1}{\varepsilon_{bR}}; \quad \gamma_1 = \frac{\varepsilon_{bu} (\nu_{bR} - \nu_{bu})}{\eta_d - 1}; \quad \gamma_2 = \frac{\nu_{bR} - \nu_{bu} \eta_d}{\eta_d - 1};$$

$$\nu_{bR} = \frac{R_b}{E_b \varepsilon_{bR}}; \quad \nu_{bu} = \frac{\sigma_{bu}}{E_b \varepsilon_{bu}}; \quad \eta_d = \frac{\varepsilon_{bu}}{\varepsilon_{bR}}.$$

Напряжения в арматуре определяются в виде:

$$\sigma_s = \nu_s E_s \varepsilon_s; \quad \sigma'_s = \nu'_s E'_s \varepsilon'_s; \quad d\sigma_s = \nu_s^k E_s d\varepsilon_s, \quad (3.69)$$

где  $\nu_s$  и  $\nu_s^k$  – коэффициенты изменения секущего модуля;  $\nu'_s$  – коэффициент изменения касательного модуля.

Согласно принятой линейной аппроксимации напряжений в сжатой зоне бетона, напряжения в крайнем сжатом волокне определяются формулой (3.68). Деформации бетона и арматуры выражаются через кривизну сечения  $\chi = \frac{1}{\rho}$  в соответствии с рис. 3.9 по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= \chi x = \bar{\chi} \xi; \\ \varepsilon_{br} &= \chi (h - x) = \bar{\chi} (\bar{h} - \xi); \\ \varepsilon_s &= \chi (h_0 - x) = \bar{\chi} (1 - \xi); \\ \varepsilon'_s &= \chi (x - a') = \bar{\chi} (\xi - \bar{a}'), \end{aligned} \quad (3.70)$$

где  $\bar{\chi} = \chi h_0$ ;  $\xi = \frac{x}{h_0}$ ;  $\bar{h} = \frac{h}{h_0}$ ;  $\bar{a}' = \frac{a'}{h_0}$ .

Смена напряженно-деформированных состояний сечения определяется значениями характеристических кривизн.

При образовании трещины:

$$\chi_{crc} (h - x_{crc}) = \bar{\chi}_{crc} (\bar{h} - \xi_{crc}) = \varepsilon_{btu}. \quad (3.71)$$

При достижении деформаций в бетоне уровня  $\varepsilon_{bR}$ :

$$\chi_f x_f = \bar{\chi}_f \xi_f = \varepsilon_{bR}. \quad (3.72)$$

При возникновении в бетоне предельных деформаций  $\varepsilon_{bu}$ :

$$\chi_u x_u = \bar{\chi}_u \xi_u = \varepsilon_{bu}. \quad (3.73)$$

Обращаясь к схемам (б) и (в) на рис. 3.9, обозначим усилие, возникающее в растянутой зоне бетона при образовании трещины в сечении  $b \times h$ :

$$N_{bt} = R_{bt} b (h - x_{crc}) = \frac{R_{bt} b \varepsilon_{btu}}{\chi_{crc}}, \quad (3.74)$$

в стадии работы с трещиной:

$$N_{bt} = \sigma_{bt} b (h - x) = \frac{0,5 R_{bt} h \varepsilon_{btu} (h - x)}{\chi_{crc} (h_0 - x)} \approx \frac{R_{bt} b \varepsilon_{btu}}{2 \chi}. \quad (3.75)$$

Условие равновесия всех сил на продольную ось для схемы (б) когда  $\bar{\chi}_{crc} < \bar{\chi} \leq \bar{\chi}_f$ :

$$v_b \xi^2 + \delta_0 \xi - \Delta_1 = 0; \quad (3.76)$$

для схемы (в) когда  $\bar{\chi}_f < \bar{\chi} \leq \bar{\chi}_u$ :

$$v_b \xi^2 + \left( \delta_0 + \frac{R_b}{E_b \bar{\chi}} - \frac{v_b \xi}{\bar{\chi}} \right) \xi - \Delta_1 = 0, \quad (3.77)$$

где

$$\begin{aligned}
 \delta_0 &= 2(\nu_s \alpha \mu + \nu'_s \alpha' \mu'); \\
 \delta_1 &= 2(\nu_s \alpha \mu + \nu'_s \alpha' \mu' \bar{a}'); \\
 \mu &= \frac{A_s}{bh_0}; \quad \mu' = \frac{A'_s}{bh_0}; \\
 \Delta_1 &= \delta + \frac{s}{\bar{\chi}^2} + \frac{2\bar{N}}{\bar{\chi}}; \quad s = \frac{R_{bt} \varepsilon_{btu}}{E_b}; \\
 \alpha &= \frac{E_s}{E_b}; \quad \alpha' = \frac{E'_s}{E_b}; \quad \bar{N} = \frac{N}{E_b bh_0}.
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Получим выражение для определения кривизны при образовании трещины. Если в уравнение (3.78) подставить выражение, следующее из (3.71), и учесть, что для  $\xi_{crc}$  справедливо выражение (3.78), заменив  $s$  на  $2s$  и приняв:

$$\xi_{crc} = \bar{h} - \frac{\varepsilon_{btu}}{\bar{\chi}_{crc}}, \tag{3.79}$$

получим уравнение для кривизны:

$$\begin{aligned}
 &(\nu_b \bar{h}^2 + \delta_0 \bar{h} - \delta_1) \bar{\chi}_{crc}^2 - \\
 &- \left[ (2\nu_b \bar{h} + \delta_0) \varepsilon_{btu} + \bar{N} \right] \bar{\chi}_{crc} + \nu_b \varepsilon_{btu}^2 - 2s = 0.
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Если  $\varepsilon_{btu} = \frac{2R_{bt}}{E_b}$ , то  $2s = \nu_b^2$  и при  $\nu_b = 1$  для обычных из-

гибаемых элементов:

$$\bar{\chi}_{crc} = \frac{\varepsilon_{btu} (2\bar{h} + \delta_0)}{\bar{h}^2 + \delta_0 \bar{h} - \delta_1}, \tag{3.81}$$

Уравнение для кривизны при работе элемента с трещиной и в стадии разрушения определим с учетом того, что в

(3.78) может быть принято  $\xi = \xi_p$ , а из (3.72) и (3.73) —  $v_b = v_{bR}$ ,  $\xi = \xi_u$  и  $v_b = v_{bu}$ :

$$\delta_1 \bar{\chi}_f^2 - (\delta_0 \varepsilon_{bR} - 2\bar{N}) \bar{\chi}_f + s - v_{bR} \varepsilon_{bR}^2 = 0, \quad (3.82)$$

$$\delta_1 \bar{\chi}_u^2 - \delta_0 \varepsilon_{bu} \bar{\chi}_u + s - v_{bu} \varepsilon_{bu}^2 - \left( \frac{R_b}{E_b} - v_{bu} \varepsilon_{bR} \right) \varepsilon_{bu} = 0. \quad (3.83)$$

Коэффициент  $v_b$  после преобразований может быть представлен в виде:

$$v_b = \frac{1}{1 + \alpha_b \bar{\chi} \xi} \text{ или } v_b = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\bar{\chi} \xi}, \quad (3.84)$$

тогда уравнения для  $\xi$  могут быть представлены в виде:

$$(1 + \alpha_b \delta_0 \bar{\chi}) \xi^2 + (\delta_0 - \alpha_b \Delta_1 \bar{\chi}) \xi - \Delta_1 = 0 \text{ при } \bar{\chi}_{cr} < \bar{\chi} \leq \bar{\chi}_f, \quad (3.85)$$

$$\gamma_2 \xi^2 - \delta_2 \xi + \Delta_2 = 0 \text{ при } \bar{\chi}_f < \bar{\chi} \leq \bar{\chi}_u, \quad (3.86)$$

где  $\delta_2 = \delta_0 + \frac{1}{\bar{\chi}} \left( \frac{R_b}{E_b} + \gamma_1 + \gamma_2 \varepsilon_{bR} \right)$ ;  $\Delta_2 = \Delta_1 + \varepsilon_{bR} \frac{\gamma_1}{\bar{\chi}^2}$ .

Момент внутренних сил относительно центра тяжести растянутой арматуры  $A_s$  при появлении трещины в сечении, когда  $\bar{\chi} \leq \bar{\chi}_{cr}$ :

$$M_s = E_b b h_0^3 \bar{\chi}_{cr} \times \left[ 0,5 v_b \xi^2 \left( 1 - \frac{\xi}{3} \right) + v'_s \alpha' \mu' (\xi - \bar{a}') (1 - \bar{a}') - \frac{2r}{\bar{\chi}^2} \right]; \quad (3.87)$$

при  $\bar{\chi}_{cr} < \bar{\chi} \leq \bar{\chi}_f$ :

$$M_s = E_b b h_0^3 \bar{\chi} \times \left[ 0,5 v_b \xi^2 \left( 1 - \frac{\xi}{3} \right) + v'_s \alpha' \mu' (\xi - \bar{a}') (1 - \bar{a}') - \frac{r}{\bar{\chi}^2} \right], \quad (3.88)$$

при  $\bar{\chi}_f < \bar{\chi} \leq \bar{\chi}_u$  :

$$M_s = E_b b h_0^3 \bar{\chi} \times \left[ \begin{aligned} & \frac{0,5 R_b \xi_2}{E_b \bar{\chi}} \left( 1 - \xi_1 - \frac{\xi_2}{3} \right) + \nu_b \xi \xi_1 \left( 1 - 0,5 \xi_1 \right) + 0,5 \left( \frac{R_b}{E_b \bar{\chi}} - \nu_b \xi \right) \times \\ & \times \xi_1 \left( 1 - \frac{2}{3} \xi_1 \right) + \nu'_s \alpha' \mu' (\xi - \bar{a}') (1 - \bar{a}') - \frac{r}{\bar{\chi}^2} \end{aligned} \right], \quad (3.89)$$

где  $r = 0,25 s (\bar{h} - 2\bar{a} - \xi)$ ;  $\xi_2 = \frac{\varepsilon_{bR}}{\bar{\chi}}$ ;  $\xi_1 = \xi - \xi_2$ ;  $\bar{a}' = \frac{a}{h_0}$ .

При работе арматуры в упругой стадии  $\nu_s = \nu'_s = 1$ .

Уравнение моментов в нормальном сечении для изгибаемого элемента

$$M = M_0, \quad (3.90)$$

где  $M_0$  — момент внутренних сил относительно оси, расположенной на расстоянии  $z_s$  от центра тяжести растянутой арматуры.

### 3.6. Критерий динамической прочности бетона при плоском напряженном состоянии

В координатах главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  критерий прочности бетона представляется поверхностью общего вида  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ . Для тяжелых бетонов в области всестороннего равномерного сжатия эта поверхность разомкнута. Подробный анализ применимости классических теорий прочности и их модификации приведен в работах П.П. Баландина [2], О.Я. Берга [4], А.А. Гвоздева [6], Г.А. Гениева, В.Н. Кисюка, Г.А. Тюпина [9], Ю.В. Зайцева [10], Н.И. Карпенко [12], Г.С. Писаренко, А.А. Лебедева [25], Лившица [20], Л.К. Лукши [21], А. Надаи [23], В.И. Феодосьева [31],

М.М. Филопенко-Бородича [33], А.В. Яшина [36] и др. Современный подход к построению критериев прочности основывается на установлении тех или иных функциональных зависимостей между первым инвариантом тензора напряжений ( $I_1$ ) и вторым ( $I_2$ ) и третьим ( $I_3$ ) инвариантами девиатора напряжений, т.е.  $F(I_1, I_{D2}, I_{D3})=0$ ,

Удовлетворительные приближения результатов расчетов и экспериментов в трехмерных задачах на интенсивные динамические нагрузки показали теории Г.А. Гениева и А.В. Яшина. В исследованиях процессов деформирования и разрушения керамики и бетона при скоростном нагружении поведение бетона при динамическом нагружении до разрушения описывалось моделью линейно-упругого тела. После разрушения — это упруго-пластическое изотропно упрочняющееся тело с физико-механическими свойствами гранулированной среды [5]. В качестве условия прочности использован критерий Г.А. Гениева, В.Н. Кисюка [8]:

$$3I_{D2} = [AI_1 + B] \left\{ 1 - (1 - C) \left[ 1 - \frac{I_{D3}}{2} \left( \frac{I_{D2}}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \right\}, \quad (3.91)$$

где  $I_1, I_{D2}, I_{D3}$  — первый инвариант тензора напряжений, второй и третий инварианты девиатора напряжений соответственно;  $A=R_b - R_{bt}$ ;  $B=R_b \cdot R_{bt}$ ;  $C=\frac{3T^2}{R_b R_{bt}}$ ;  $R_b, R_{bt}, T$  —

пределы прочности бетона при одноосном сжатии, растяжении и сдвиге соответственно. Поверхность (3.91) для изотропных материалов должна отвечать условию выпуклости (в соответствии с постулатом Друккера и Хилла), которое накладывает следующие ограничения на расчетные параметры:

$$0,530 \leq \frac{T}{\sqrt{R_b R_{bt}}} \leq 0,577.$$

Численные значения  $A$ ,  $B$ ,  $C$  определяются через пределы прочности бетона при растяжении, сжатии и сдвиге, полученные при динамическом нагружении [1, 7]. В рамках данного подхода проведен численный анализ МКЭ взаимодействия стального ударника с бетонной плитой [35]. Результаты расчетов были сопоставлены с экспериментами в виде изометрических проекций сечений ударника и плиты плоскостью симметрии, иллюстрирующими картину разрушения бетона в момент остановки ударника. Отклонение расчетной глубины кратера от экспериментальной составило 4 и 12% при скорости удара 244 и 370 м/с соответственно [3].

Расчеты пространственных железобетонных конструкций на действие ударных нагрузок с использованием критерия А.В. Яшина показали удовлетворительные согласования с результатами экспериментов, проведенных А.Г. Саргсяном [27] применительно к ограждающим конструкциям АЭС. Подтверждение применимости теории А.В. Яшина в динамических расчетах железобетонных сооружений получено и в работе А.Г. Смолянина [28].

Уравнение предельной поверхности бетона [36] имеет вид:

$$\frac{S_t}{K(\varphi)m(\sigma_0)} = R_b, \quad (3.92)$$

где

$$m(\sigma_0) = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \left[ A + \frac{1-A}{F_c} F(\sigma_0) \right]; \quad F(\sigma_0) = \lg \left( B + \frac{R_{bt}}{R_b} + \alpha \frac{\sigma_0}{R_b} + \beta \frac{\sigma_0^2}{R_b^2} \right);$$

$$F_c = \lg \left( B + \frac{R_{bt}}{R_b} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{9} \right); \quad F_p = \lg \left[ B + \frac{R_{bt}}{R_b} \left( 1 - \frac{\alpha}{3} \right) + \frac{\beta}{9} \left( \frac{R_{bt}}{R_b} \right)^2 \right];$$

$$\Lambda = \frac{\frac{R_{bt}}{F_c} - \frac{F_p}{F_c}}{1 - \frac{F_p}{F_c}}; \quad K(\varphi) = 1 - a \sin \frac{3}{2} \varphi + b \sin^2 \frac{3}{2} \varphi;$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \quad S_1 = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2};$$

$$S_{II} = \frac{3\sqrt{6}}{S_1^2} (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0); \quad \sin^2 \frac{3}{2} \varphi = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{S_{II}}{S_1} \right);$$

$F(\sigma_0)$  – функция, отражающая изменение меридиональных кривых поверхности прочности;  $K(\varphi)$  – функция, характеризующая изменение девиаторных кривых;  $\Lambda$  – характеристика критерия прочности при одноосном растяжении;

$F_c$  – значение  $F(\sigma_0)$  при  $\sigma_0 = -\frac{R_b}{3}$ ;  $F_p$  – значение  $F(\sigma_0)$

при  $\sigma_0 = -\frac{R_b}{3}$ ;  $B=1,1$ ;  $\alpha=1,41$ ;  $\beta=0,081$ .

Прочность бетонного тела при скоростном нагружении определяется и соотношением компонентов напряженного состояния. Экспериментальные исследования бетонных образцов показали зависимость октаэдрических напряжений от скорости нагружения и увеличение прочности бетона до 1,5–2 раз с увеличением уровня бокового обжатия [30].

Исследования прочности бетона в области «сжатие–растяжение» позволили авторам выявить экспериментальную прочность бетона при динамическом нагружении [38]. Опыты проводились на полых цилиндрах. Динамическая нагрузка создавалась путем резкого изменения соотношения давления масла на внутренней и наружной поверхностях образца. Осевое давление создавалось ударным молотом. Линия регрессии опытной прочности бетона получена в виде:

$$\frac{\sigma_{b,t}}{R_b} + \frac{\sigma_{bt,d}}{R_{bt}} = 1 - 0,02503 \ln \frac{t}{t_c}, \quad (3.93)$$

где  $\sigma_{b,d}$ ,  $\sigma_{bt,d}$  — соответственно сжимающие и растягивающие напряжения при скоростном нагружении бетона;  $R_b$ ,  $R_{bt}$  — прочность бетона на сжатие и растяжение при одноосном статическом нагружении ( $R_b=17,37$  МПа,  $R_{bt}=2,24$  МПа);  $t$  — время нагружения;  $25 \text{ мс} \leq t \leq t_c$ ,  $t_c=600$  мс. Принято, что  $\sigma_{b,d} > 0$ ,  $\sigma_{bt,d} > 0$ .

Критерий динамической прочности бетона, находящегося в условиях плоского напряженного основания, предложен О.Г. Кумпяком [17]. В основу критерия положены предложения А.А. Гвоздева и А.С. Залесова [24] по оценке статической прочности бетона при плоском напряженном состоянии. Критерий Гвоздева—Залесова построен в координатах главных напряжений  $\frac{\sigma_1}{R_b}$ ,  $\frac{\sigma_3}{R_{bt}}$  и в области «сжатие—растяжение» состоит из двух отрезков — вертикального и наклонного. Вертикальный отрезок характеризует участок критерия в области малых значений главных сжимающих напряжений, наклонный — область интенсивного снижения предельного значения главного растягивающего напряжения до нуля в области высоких значений главного сжимающего напряжения, возрастающего до сопротивления бетона осевому сжатию.

Расчетный критерий в области «сжатие—растяжение» можно представить в виде:

$$\frac{\sigma_{1,d}}{R_b K_{v,b}} - \frac{\sigma_{3,d}}{R_{bt} K_{v,bt}} = 1, \quad (3.94)$$

где  $\sigma_{1,d}$  и  $\sigma_{3,d}$  — соответственно главные сжимающие и главные растягивающие напряжения при динамическом нагружении,  $K_{v,b}$  и  $K_{v,bt}$  — коэффициенты динамического упрочнения бетона при сжатии и растяжении соответственно.

Согласно опытным данным, в области «сжатие—сжатие» при статическом нагружении с увеличением сжимающих напряжений по одной площадке, предельное сжимающее напряжение по взаимно перпендикулярной площадке несколько повышается по сравнению с сопротивлением бетона осевому сжатию. Результаты экспериментов [1, 5] качественно отражают аналогичную картину изменения прочности бетона при динамическом нагружении. В связи с этим в области «сжатие—сжатие» расчетный критерий с некоторым запасом прочности может быть принят в виде:

$$\frac{\sigma_{1,d}}{R_b K_{v,b}} = 1. \quad (3.95)$$

Обобщая результаты экспериментальных исследований, Х. Купфер (H. Kurfer) предложил условие прочности плоского железобетонного элемента, которое для случая динамической нагрузки имеет вид [37]:

$$\left( \frac{\sigma_1}{R_b^d} + \frac{\sigma_3}{R_b^d} \right)^2 + \frac{\sigma_1}{R_b^d} + 3,65 \frac{\sigma_3}{R_b^d} \leq 0, \quad \sigma_3 < \sigma_1 < 0;$$

$$1 + 0,8 \frac{\sigma_1}{R_b^d} - 10 \frac{\sigma_3}{R_b^d} \geq 0, \quad \sigma_1 > 0, \quad \sigma_3 < 0; \quad (3.96)$$

$$\sigma_1 - 0,1 R_b^d \leq 0, \quad \sigma_1 > \sigma_3 > 0.$$

Предельная кривая (3.96) показана на рис. 3.10.

Анализ опытных данных о сопротивлении бетона при сложном напряженном состоянии в условиях скоростного нагружения был положен в основу критерия прочности [18] для плоской задачи в виде двух отрезков, которые, трансформируясь во времени, создают поверхность, ограничивающую область прочного сопротивления материала (рис. 3.11).

В координатах главных напряжений  $\sigma_{1,d}/R_b$  и  $\sigma_{3,d}/R_{bc}$  в

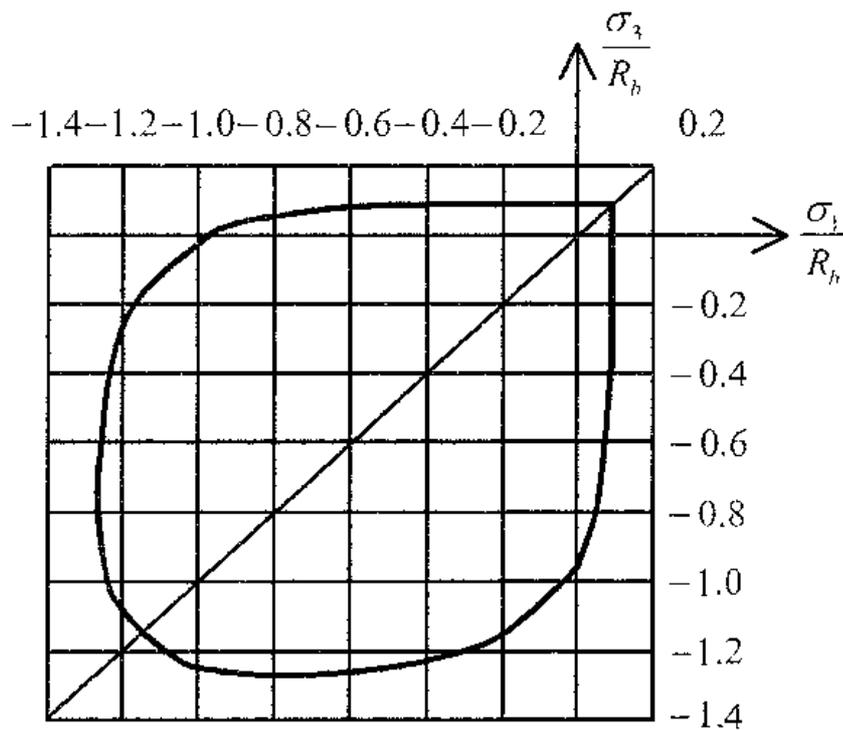


Рис. 3.10. Предельная кривая для бетона в осях  $\frac{\sigma_1}{R_b}$ ,  $\frac{\sigma_3}{R_b}$  [37]

области «сжатие–растяжение» критерий прочности бетона представляется поверхностью  $cc'b'b$ , угол наклона которой к координатным плоскостям изменяется в зависимости от времени нагружения  $\tau$ . В области «сжатие–сжатие» предельная поверхность  $bb'a'a$  образуется путем переноса прямолинейного отрезка, параллельного одной из координатных осей, по криволинейным направляющим.

Направляющие  $aa'$  и  $bb'$  соответствуют изменению коэффициента динамического упрочнения бетона при сжатии в зависимости от времени нагружения  $K_{v,b}$ . Направляющие  $cc'$  в области «сжатие–растяжение» соответствуют изменению коэффициента динамического упрочнения бетона при растяжении  $K_{v,bt}$ .

Выражения, описывающие кривые  $aa'$ ,  $bb'$  и  $cc'$ , получены на основании статистической обработки экспериментальных данных [1] и имеют вид:

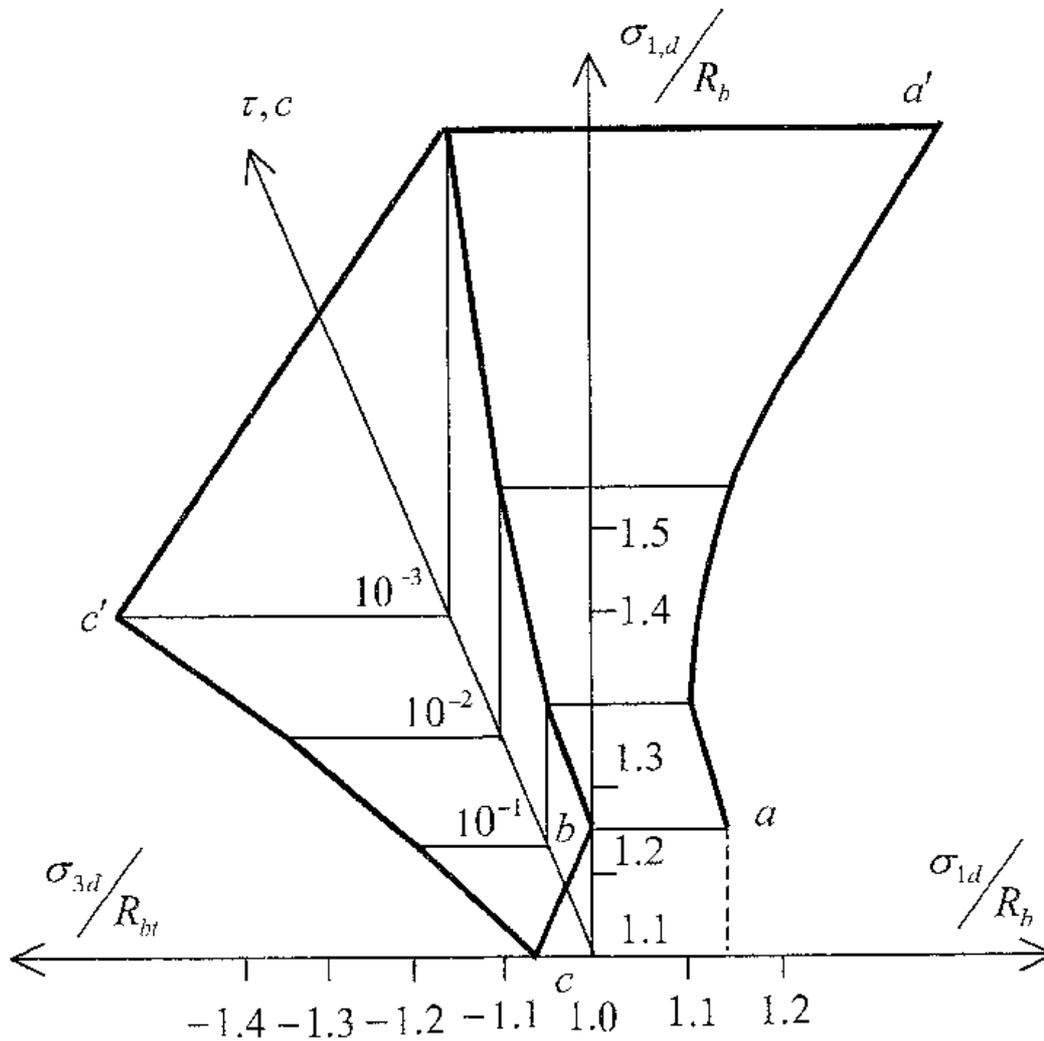


Рис. 3.11. Критерий динамической прочности бетона в условиях плоского напряженного состояния [18]

$$K_{vb} = 1,58 - 0,35 \lg \tau + 0,07 (\lg \tau)^2, \quad (3.97)$$

$$K_{vbt} = 1,58 - 0,15 \lg \tau + 0,07 (\lg \tau)^2, \quad (3.98)$$

где  $\tau$  — время нагружения, изменяется в пределах от 1 до 2000 мс.

При динамическом расчете железобетонных конструкций усилия, действующие в бетоне, выражаются через нормальные и касательные напряжения  $\sigma_{xd}$ ,  $\sigma_{yd}$ ,  $\tau_{xyd}$ . Поэтому расчетный критерий прочности удобно представить в

координатах нормальных и касательных напряжений — в области «сжатие—растяжение»:

$$n(1+n)^2 \left( \frac{\tau_{xyd}}{R_{bt} \cdot K_{v,bt}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{xd}}{R_b \cdot K_{vb}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{yd}}{R_b \cdot K_{vb}} \right)^2 - \frac{(1+n^2)}{n} \times$$

$$\times \frac{\sigma_{xd}}{R_b K_{vb}} \frac{\sigma_{yd}}{R_b K_{vb}} - (1-n) \left( \frac{\sigma_{xd}}{R_b K_{vb}} + \frac{\sigma_{yd}}{R_b K_{vb}} \right) - n = 0; \quad (3.99)$$

в области «сжатие—сжатие»:

$$n^2 \left( \frac{\tau_{xyd}}{R_{bt} K_{v,bt}} \right)^3 - \frac{\sigma_{xd}}{R_b K_{vb}} \frac{\sigma_{yd}}{R_b K_{vb}} + \frac{\sigma_{xd}}{R_b K_{vb}} + \frac{\sigma_{yd}}{R_b K_{vb}} - 1 = 0. \quad (3.100)$$

В координатах относительных напряжений  $\tau_{xy}/R_{bt}$  и  $\sigma_x/R_b$  при различном отношении  $\sigma_y/R_b$  расчетный критерий прочности представлен на рис. 3.12. Анализ полученных графических зависимостей показал, что при динамическом нагружении предельные касательные напряжения  $\tau_{xy}$  с увеличением нормальных напряжений  $\sigma_{xd}$  сначала возрастают до некоторого максимального значения (при определенном значении  $\sigma_{yd}$ ), а потом уменьшаются до нуля при  $\sigma_{xd} = R_b K_{vb}$ . При отсутствии  $\sigma_{yd}$  расчетный динамический критерий прочности бетона имеет вид пологой кривой с максимальным значением касательных напряжений, определяемых по формуле:

$$\tau_{xy, \max, d} = R_{bt} \sqrt{\frac{2(K_{v,bt})^2(1+2n^2) + nK_{v,bt}(2-n) - K_{v,bt}}{4n(1+n)^2}}$$

и соответствующих  $\sigma_{xd} = \frac{1-n}{2n} K_{v,bt} R_b$ .

3.6. Критерий динамической прочности бетона при плоском напряженном состоянии

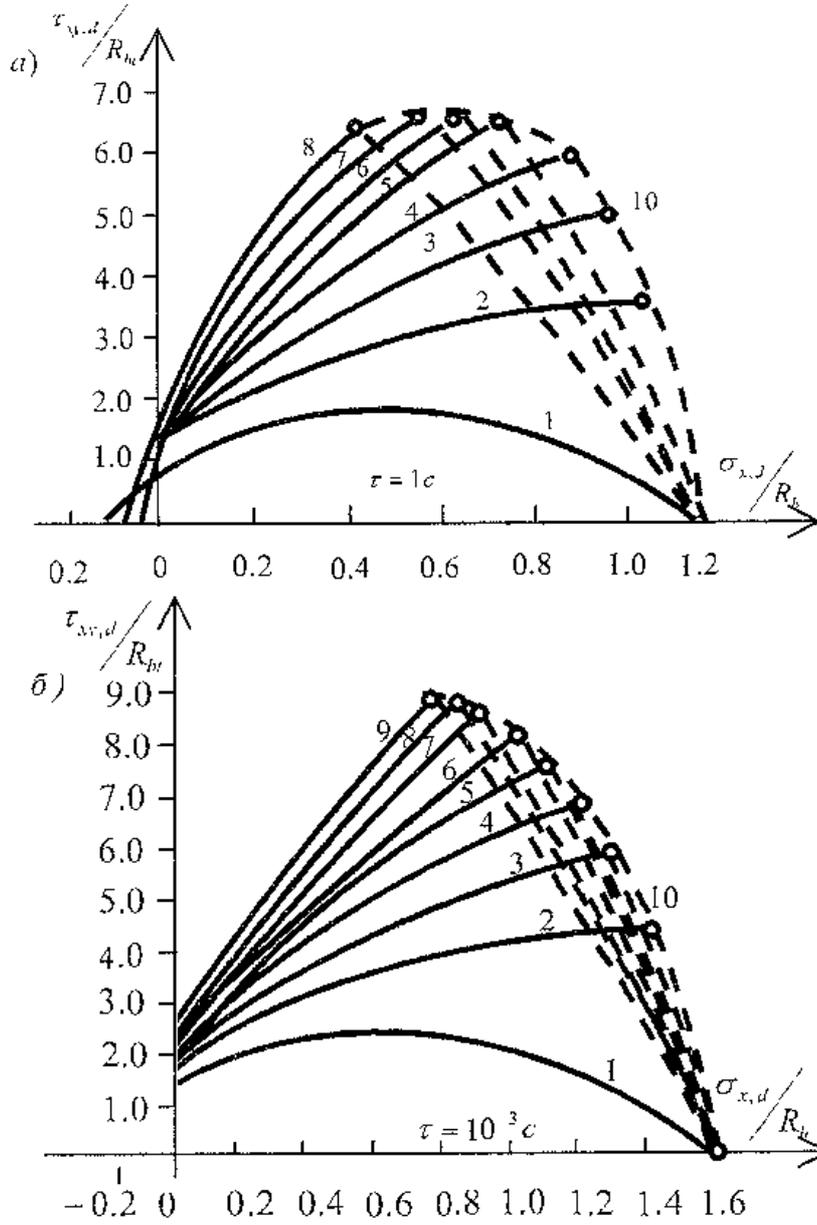


Рис. 3.12. Расчетный критерий прочности [18]: а) при  $\tau=1$  с; б) при

$$\tau=10^{-3} \text{ с}; \quad 1 - \frac{\sigma_{y,d}}{R_b} = 0; \quad 2 - \frac{\sigma_{y,d}}{R_b} = 0,1; \quad 3 - \frac{\sigma_{y,d}}{R_b} = 0,2;$$

$$4 - \frac{\sigma_{y,d}}{R_b} = 0,3; \quad 5 - \frac{\sigma_{y,d}}{R_b} = 0,4; \quad 6 - \frac{\sigma_{y,d}}{R_b} = 0,5; \quad 7 - \frac{\sigma_{y,d}}{R_b} = 0$$

$$8 - \frac{\sigma_{y,d}}{R_b} = 0,7; \quad 9 - \frac{\sigma_{y,d}}{R_b} = 0,8; \quad 10 - \text{оггибающая пре-}$$

дельных касательных напряжений

### 3.7. Схема разрушения и угол наклона трещины в плоском железобетонном КЭ

Определим ориентацию трещины на плоскости конечного элемента [34]. Для чего используем теорию разрушения О. Мора, развитую М.М. Филоненко-Бородичем [32], совместно с критерием прочности Г.А. Гениева, В.Н. Кисюка, Г.А. Тюпина [9].

Разрушение, по теории О. Мора, происходит вследствие сдвига и зависит от соотношения между нормальными и касательными напряжениями в плоскости сдвига, которая располагается перпендикулярно оси среднего нормального напряжения в пространстве главных напряжений. Среднее нормальное напряжение было введено А. Надаи [23] и ранее не учитывалось О. Мором.

Огибающие кривые Мора:

$$\tau_n = f(\sigma_n) \quad (3.101)$$

определяются экспериментально (рис. 3.13).

Запишем критерий прочности [9] через октаэдрические напряжения [15]:

$$\tau_{окт}^2 = c \left[ 3(R_b - R_{bf})\sigma_{окт} - R_b R_{bf} \right] = 0, \quad (3.102)$$

где

$$\sigma_{окт} = \frac{I_1}{3}; \quad \tau_{окт} = \left( -\frac{2}{3} I_{D2} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (3.103)$$

$$c = \frac{2}{9} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{3T_c^2}{R_b R_{bf}} \right) \left( 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_{D3}}{(-I_{D2})^{\frac{3}{2}}} \right) \right]$$

$T_c$  – предельная интенсивность касательных напряжений при чистом сдвиге. Значение  $T_c$  можно выразить через прочность бетона при двухосном равномерном сжатии  $R_b^*$ ,

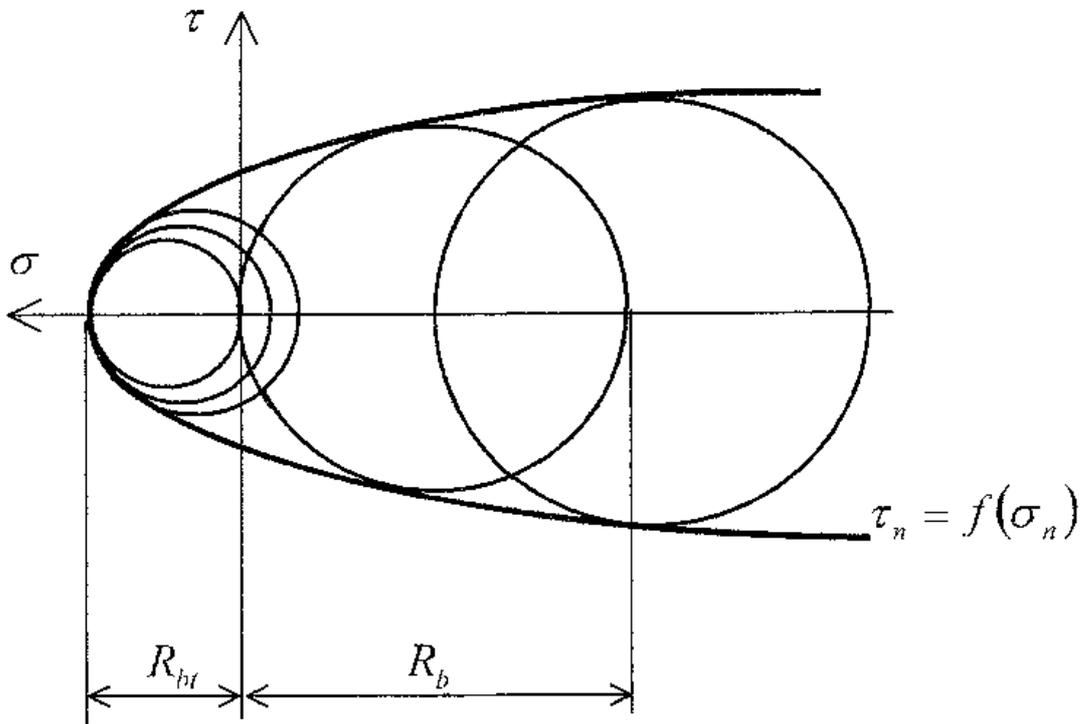


Рис. 3.13. Огибающая кривая О. Мора [34]

$$R_b^* = (1,25 - 1,45) R_b :$$

$$T_c = \left\{ \left[ 1 + \frac{(R_b^*)^2}{2(R_b - R_{bt})R_b^* + R_b R_{bt}} \right] \frac{R_b R_{bt}}{6} \right\}^{\frac{1}{2}} . \quad (3.104)$$

Введем параметр Лоде–Надаи:

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3}; \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (3.105)$$

Тогда:

$$\frac{\mu(9 - \mu^2)}{(3 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_{D3}}{(-I_{D2})^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.106)$$

Каждой комбинации  $\sigma_{окт}$ ,  $\tau_{окт}$ ,  $m$  критерия разрушения (3.102) соответствует один круг напряжений Мора:

$$(\sigma - \lambda)^2 + \tau^2 - \xi^2 = 0, \quad (3.107)$$

где  $\lambda = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$  — значение абсциссы средней точки;

$\xi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  — радиус круга, или, через октаэдрические напряжения и параметр Лоде–Надаи:

$$\xi = \frac{3\tau_{окт}}{\eta}; \quad \lambda = \frac{\sigma_{окт} - \mu\tau_{окт}}{\eta}, \quad (3.108)$$

где  $\eta = \left(2(3 + \mu^2)\right)^{\frac{1}{2}}$ .

Учитывая (3.104), запишем формулу (3.103) в виде:

$$\left(\frac{\sigma - \sigma_{окт} + \mu\tau_{окт}}{\eta}\right)^2 + \tau^2 - \frac{9\tau_{окт}^2}{\eta^2} = 0. \quad (3.109)$$

Если в формуле (3.107) с учетом формулы (3.102) исключить  $\sigma_{окт}$ , то при постоянном  $\mu$  получим однопараметрическое семейство кругов предельного напряжения. Параметром является  $\tau_{окт}$ . Чтобы найти огибающую кругов Мора, необходимо аппроксимировать параболу, соответствующую условию трещинообразования (3.102), семейством касательных к ней, показанных на рис. 3.14:

$$\sigma_{окт} = -N\tau_{окт} + \bar{\sigma}_{окт}, \quad (3.110)$$

здесь:

$$\bar{\sigma}_{окт} = \frac{\tau_{окт}^2}{3c(R_b - R_{bt})} + \frac{R_b R_{bt}}{3(R_b - R_{bt})}; \quad (3.111)$$

$$F(\sigma, \tau, \tau_{окт}) = \left[\sigma - \bar{\sigma}_{окт} + \frac{(\eta N + \mu)\tau_{окт}}{\eta}\right]^2 + \tau^2 - \frac{9\tau_{окт}^2}{\eta^2} = 0. \quad (3.112)$$

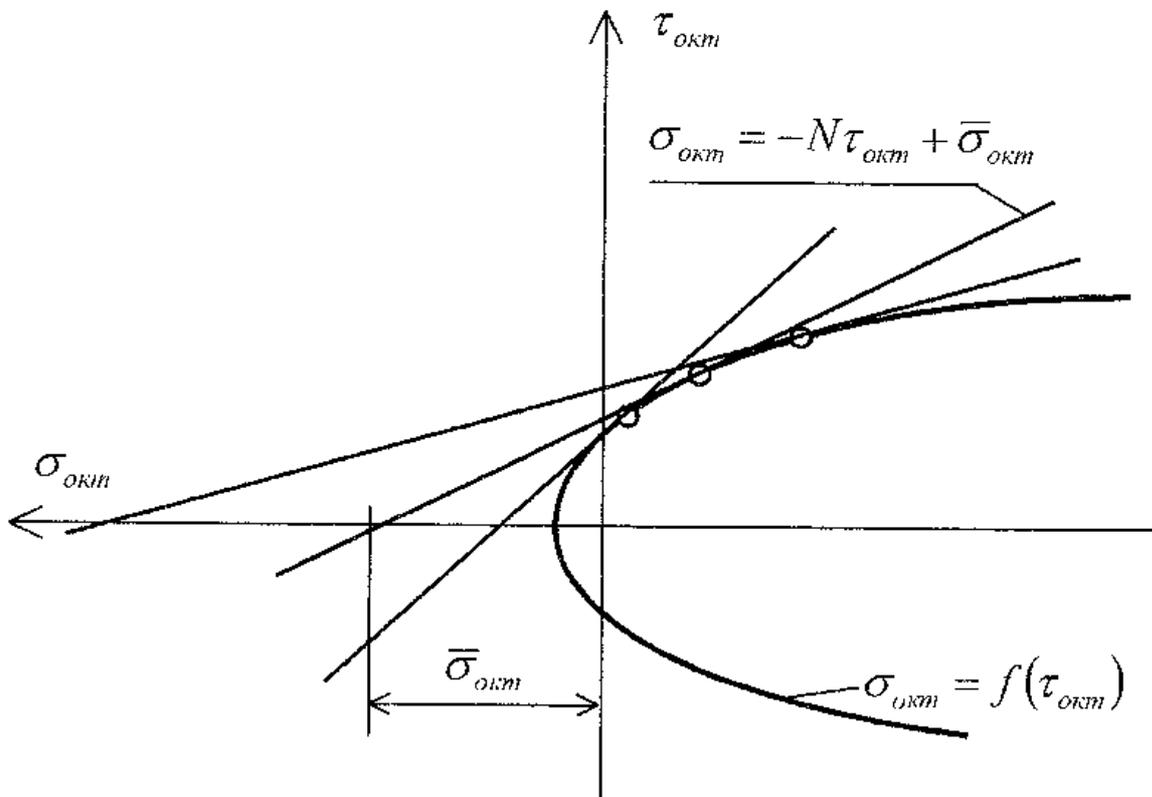


Рис. 3.14. Аппроксимация кривой условия трещинообразования семейством касательных [34]

Эти уравнения описывают однопараметрическое семейство кругов предельного напряжения. Огибающая кругов Мора получается при исключении параметра  $\tau_{окт}$  из этих уравнений посредством равенств:

$$\frac{\partial F(\sigma, \tau, \tau_{окт})}{\partial \tau_{окт}} = F_{\tau_{окт}}(\sigma, \tau, \tau_{окт}) = 0;$$

$$\tau_{окт} = \frac{(\sigma - \bar{\sigma}_{окт})(\eta N + \mu)\eta}{9 - (\eta N + \mu)^2};$$

$$\tau^2 = \frac{9(\sigma - \bar{\sigma}_{окт})^2}{(\eta N + \mu)^2 - 9},$$

$$\text{откуда} \quad \tau = \pm \frac{3(\sigma - \bar{\sigma}_{окт})}{\left( (\eta N + \mu)^2 - 9 \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.113)$$

Для существования огибающей кругов Мора необходимо выполнение условия:

$$(\eta N + \mu)^2 - 9 = (\eta N + \mu + 3)(\eta N + \mu - 3) > 0;$$

$$\frac{\partial^2 F(\sigma, \tau, \tau_{окт})}{\partial \tau_{окт}^2} = 0;$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} F, \sigma & F, \tau \\ F_{\tau_{окт}}, \sigma & F_{\tau_{окт}}, \tau \end{bmatrix} \right) = \frac{\partial(F, F_{\tau_{окт}})}{\partial(\sigma, \tau)} = 0.$$

Так как  $\eta N + \mu + 3$  всегда положительно, то с учетом неравенства  $\eta N + \mu - 3 > 0$  получим:

$$N = \left| \frac{d\sigma_{окт}}{d\tau_{окт}} \right| > \frac{(3 - \mu)}{\eta}. \quad (3.114)$$

Вторая производная  $F(\sigma, \tau, \tau_{окт})$  по  $\tau_{окт}$ :

$$\frac{\partial^2 F(\sigma, \tau, \tau_{окт})}{\partial \tau_{окт}^2} = 2 \left( \frac{N + \mu}{\eta} \right)^2 - \frac{18}{\eta^2} = \frac{2 \left( (\eta N + \mu)^2 - 9 \right)}{\eta^2},$$

идентична корню уравнения (3.111), который при выполнении условия (3.112) будет положительным. Учитывая также, что:

$$\frac{\partial F_{\tau_{окт}}}{\partial \tau} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \tau} = 2\tau; \quad \frac{\partial F_{\tau_{окт}}}{\partial \sigma} = 2 \frac{N + \mu}{\eta} > \frac{2\eta(3 - \mu)}{\eta + \mu} = \frac{6}{\eta} \neq 0,$$

и что для каждой комбинации величин  $\sigma, \tau, \tau_{окт}$  удовлетворяются неравенства (3.112), запишем начальные условия для огибающей кривой кругов Мора:

$$\frac{\partial^2 F(\sigma, \tau, \tau_{окт})}{\partial \tau_{окт}^2} = 0; \quad \frac{\partial(F, F_{\tau_{окт}})}{\partial(\sigma, \tau)} = -\frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{\partial F_{\tau_{окт}}}{\partial \sigma} = 0;$$

$$\left| \frac{d\sigma_{окт}}{d\tau_{окт}} \right| = \frac{2\tau_{окт}^M}{3(R_b - R_{bt})c} = \frac{(3-\mu)}{\eta},$$

откуда:

$$\tau_{окт}^M = \frac{3c(R_b - R_{bt})(3-\mu)}{2\eta}. \quad (3.115)$$

При  $\tau_{окт} < \tau_{окт}^M$  направление трещины перпендикулярно направлению главного напряжения  $\sigma$ , (рис. 3.15). При  $\tau_{окт} \geq \tau_{окт}^M$  появляется трещина за счет сдвига (рис. 3.16).

Угол наклона касательной к огибающей кругов Мора определяется по формуле, полученной из уравнения (3.111):

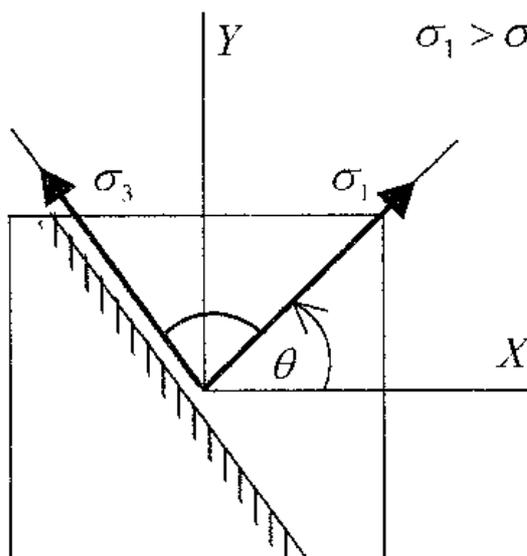


Рис. 3.15. Угол наклона трещины при  $\tau_{окт} < \tau_{окт}^M$

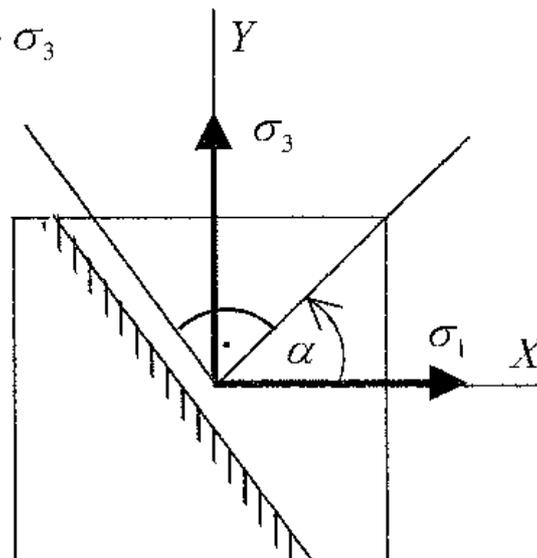


Рис. 3.16. Угол наклона трещины при  $\tau_{окт} \geq \tau_{окт}^M$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{3}{\left[ \left( \frac{2\eta\tau_{окт}}{3c(R_b - R_{bt})} + \mu \right)^2 - 9 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.116)$$

Угол наклона касательной к огибающей кривой кругов Мора определяет положение плоскости разрушения. Нормаль к плоскости трещины образует угол  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$  с направлением главного напряжения  $\sigma_1$  (рис. 3.17).

Согласно теории Н.И. Карпенко [12], после образования первой плоскости трещины последующие плоскости трещины ортогональны друг другу.

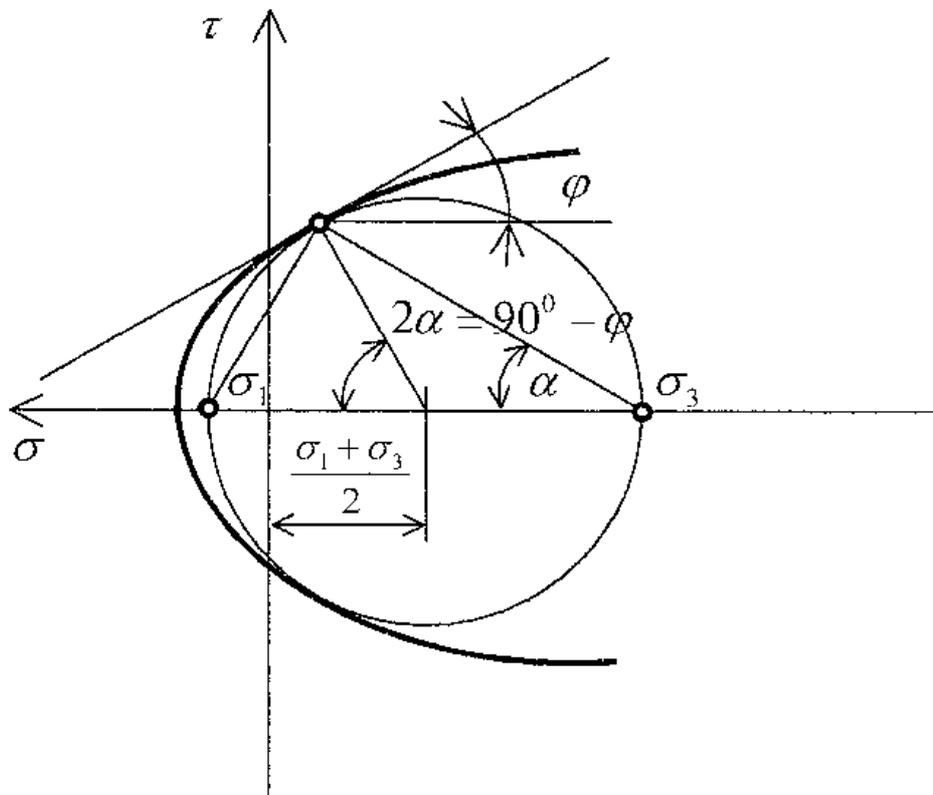


Рис. 3.17. Определение угла наклона плоскости трещины в осях  $\sigma$ – $\tau$

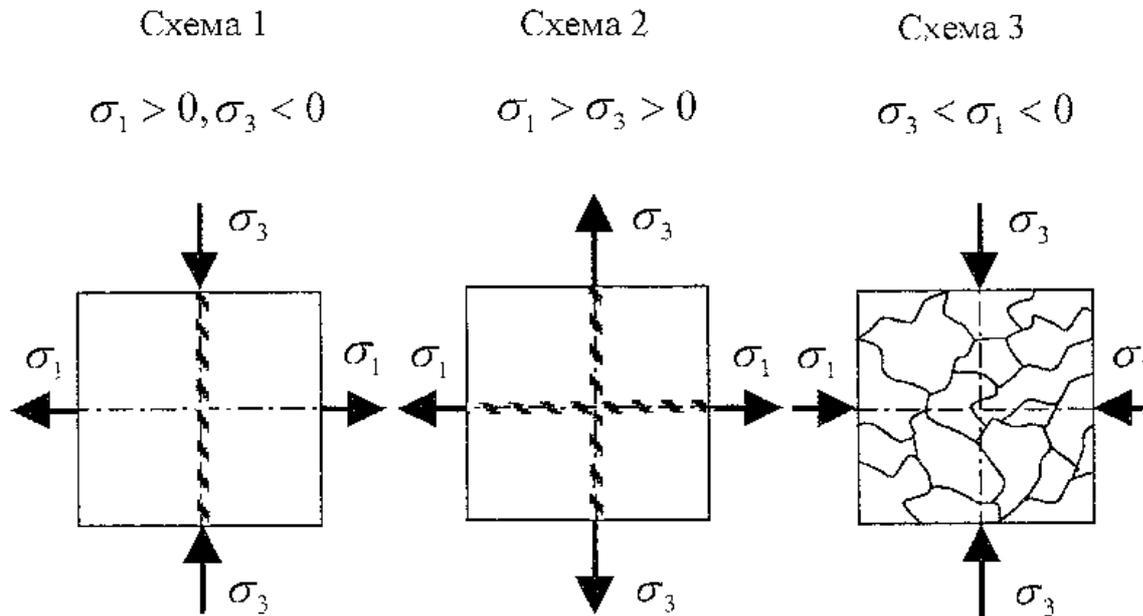


Рис. 3.18. Схемы образования трещин в плоском КЭ

Для плоского железобетонного элемента возможны три схемы разрушения, показанных на рис. 3.18. Если образование трещин происходит согласно схеме 1 или схеме 2, то материал передаст напряжения параллельно плоскостям трещин. При образовании трещин по схеме 3 (всестороннее сжатие) происходит раздробление бетона.

### ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 3

1. *Баженов Ю.М.* Бетон при динамическом нагружении. — М.: Стройиздат, 1970. — 292 с.
2. *Баландин П.П.* К вопросу о гипотезах прочности // Вестник инженеров и техников. — 1937. — №1. — С. 12–36.
3. *Белов П.Н., Югов Н.Т., Афанасьева С.А., Коняев А.А., Копаница Д.Г., Толкачев В.Ф., Хабибуллин М.В., Инжелевский П.М.* Исследование процессов деформирования и разрушения хрупких материалов // Механика компози-

- ционных материалов и конструкций. — 2001. — Т. 7. — №2. — С. 131–142.
4. *Берг О.Я.* Физические основы теории прочности бетона и железобетона. — М.: Госстройиздат, 1961. — 96 с.
  5. *Гвоздев А.А.* Опытное изучение механических свойств бетона при стесненной поперечной деформации // Вестн. ВИА. — 1946. — №49. — С. 48–54.
  6. *Гвоздев А.А.* Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. — М.: Госстройиздат, 1949. — 280 с.
  7. *Гениев Г.А.* Метод определения динамических пределов прочности бетона // Бетон и железобетон. — 1998. — №1. — С. 18–19.
  8. *Гениев Г.А., Киссюк В.Н.* К вопросу обобщения теории прочности бетона // Бетон и железобетон. — 1965. — №2. — С. 16–29.
  9. *Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А.* Теория пластичности бетона и железобетона. — М.: Стройиздат, 1974. — 316 с.
  10. *Зайцев Ю.В.* Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения. — М.: Стройиздат, 1982. — 196 с.
  11. *Карпенко Н.И.* Методика конечных приращений для расчета деформаций железобетонных элементов при знакопеременной нагрузке // Совершенствование конструктивных форм, методов расчета и проектирования железобетонных конструкций. — М., 1983. — С. 3–11.
  12. *Карпенко Н.И.* Общие модели механики железобетона. — М.: Стройиздат, 1996. — 416 с.
  13. *Карпенко Н.И.* Теория деформирования железобетона с трещинами. — М.: Стройиздат, 1976. — 208 с.
  14. *Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А.* Диаграммы деформирования бетона для развития методов расчета железобетонных конструкций с учетом режимов нагружения // Эффективные маломатериалоемкие железобетонные конструкции. — М., 1988. — С. 4–17.

15. *Козак А.П.* Некоторые результаты численного моделирования разрушения железобетонных конструкций в условиях трехосного напряженного состояния. — Киев: КИСИ, 1980. — 19 с.
16. *Котляревский В.А.* Исследование модели мейзинг-типа в динамических расчетах железобетонных конструкций // Динамика железобетонных конструкций и сооружений при интенсивных кратковременных воздействиях: сб. науч. тр. / Моск. инж.-строит. ин-т. им. В.В. Куйбышева. — МИСИ, 1992. — С. 50–53.
17. *Котляревский В.А., Ганушкин В.И., Костин А.А. и др.* Убежища гражданской обороны: Конструкции и расчет. — М.: Стройиздат, 1989. — 606 с.
18. *Кумняк О.Г.* Критерий прочности бетона при кратковременном динамическом нагружении // Исследование по строительным конструкциям и строительной механике: Сб. науч. тр. ТИСИ. — Томск: Изд-во ТГУ, 1987. — С. 72–77.
19. *Кумняк О.Г., Копаница Д.Г.* Динамика защитной оболочки реакторного отделения АЭС при действии ударной волны внешнего взрыва // Вестник ТГАСУ. — 1999. — №1. — С. 109–120.
20. *Лившиц М.Б.* Учет вида напряженного состояния в критерии прочности бетона // Строительные конструкции транспортного и общего назначения. — Новосибирск, 1979. — С. 19–30.
21. *Лукша Л.К.* Прочность трубобетона. — Минск: Вища школа, 1977. — 96 с.
22. *Мурашев В.И.* Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона (основы сопротивления железобетона). — М.: Изд-во МСПМ, 1950. — 268 с.
23. *Падаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел / Пер. с англ. — М., 1954. — Т. 1. — 648 с.: ил.
24. *Новое о прочности железобетона* / Под ред. К.В. Михайлова. — М.: Стройиздат, 1977. — 272 с.

25. *Нисаренко Г.С., Лебедев А.А.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. — Киев: Наукова думка, 1976. — 416 с.
26. *Расторгуев Б.С.* Упрощенная методика получения диаграмм деформирования стержневых элементов в стадии с трещинами // Бетон и железобетон. — 1993. — №5. — С. 22–24.
27. *Саргсян А.Е.* Динамика взаимодействия сооружений с основанием и летящим телом конечной жесткости: Дисс. ... докт. техн. наук. — М., 1985. — 385 с.
28. *Смолянин А.Г.* Математическое моделирование динамического разрушения балок и оболочек из железобетона при ударе: Дис. ... канд. техн. наук. — М., 1985. — 129 с.
29. *Сорокин Е.С.* Динамический расчет несущих конструкций зданий. — М.: Госстройиздат, 1956. — 340 с.
30. *Такэда Д., Кавамура Т.* Бахукацу ни ёру тэккин конкурито кодзобуцу но хэнкэй, хакай но тэйрётэки ёсаку // Когё-каяку кёкайсю. — 1985. — Т. 46. — №4. — С. 182–194.
31. *Феодосьев В.И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. — М.: Наука, 1975. — 176 с.
32. *Филоненко-Бородич М.М.* Механические теории прочности (курс лекций). — М.: Изд. МГУ, 1961. — 91 с.
33. *Филоненко-Бородич М.М.* Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. сб. — 1954. — Вып. 19. — С. 15–47.
34. *Хечумов Р.А., Кеттлер Х., Прокопьев В.И.* Применение метода конечных элементов к расчету конструкций. — М.: Изд-во АСВ, 1994. — 351 с.
35. *Югов Ю.М.* Численный анализ трехмерного процесса деформирования и разрушения цилиндра и пластины при наклонном соударении // Изв. АН СССР, ММТ. — 1990. — №1. — С. 112–117.

36. Яшин А.В. Влияние неоднородных (сложных) напряженных состояний на прочность и деформации бетона, включая область, близкую к разрушению // Прочность, жесткость и трещиностойкость железобетонных конструкций / Под ред. А.А Гвоздева. – М., 1979. – С. 187–202.
37. K pfer H.B. Das nicht-lineare Verhalten des Betons bei zweiachsiger Beanspruchung // Beton und Stahlbetonbau. – 1973. – №11. – P. 269–273.
38. Paul F. Mlakar, Ken P. Vitaya, Robert A. Cole Dynamic Tensile-Compression Behavior of Concrete // ACI Journal. – 1985. – №4. – P. 484–490.

## ГЛАВА 4

# ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 4.1. Исходные уравнения и функционал

Рассмотрим задачу о колебаниях линейно-упругого армированного тела, занимающего некоторую область  $\Omega$  в декартовых координатах  $x_1, x_2, x_3$ . Армирование тела, показанного на рис. 4.1, проведено дисперсными группами взаимно ортогональных стержней с коэффициентами армирования  $\mu_\alpha(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mu_\beta(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mu_\gamma(x_1, x_2, x_3)$  и косинусами

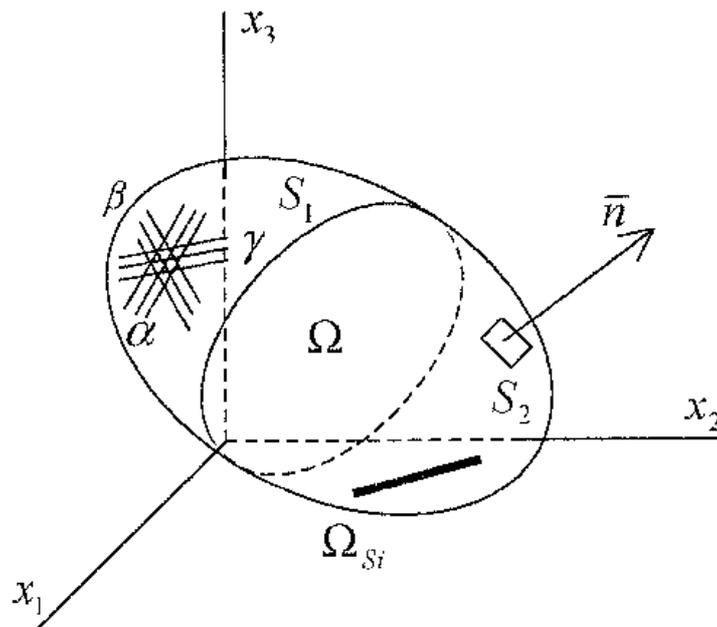


Рис. 4.1. Объемное армированное тело

углов наклона к осям  $x_1, x_2, x_3$ . Конструктивный материал имеет удельную плотность  $\rho$ .

Вектор объемных сил  $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ , здесь  $X_1, X_2, X_3$  — проекции на оси  $x_1, x_2, x_3$ .

Граничные условия на контуре имеют вид:

$$\begin{cases} \Delta = \Delta_s, \in S_1 \\ A_s \sigma = g_s, \in S_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$  — вектор перемещений;  $\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}$  — вектор напряжений, образованный из симметричного тензора напряжений;  $g_s$  — нагрузка на контуре  $S_2$ ;  $A_s$  — матрица направляющих косинусов:

$$A_s = \begin{bmatrix} \cos(x_1 \wedge n) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x_2 \wedge n) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(x_3 \wedge n) \\ \cos(x_2 \wedge n) & \cos(x_1 \wedge n) & 0 \\ 0 & \cos(x_3 \wedge n) & \cos(x_2 \wedge n) \\ \cos(x_3 \wedge n) & 0 & \cos(x_1 \wedge n) \end{bmatrix},$$

здесь  $n$  — нормаль к поверхности  $S_2$ .

Условие неразрывности запишем в виде уравнения Коши:

$$A\Delta = \varepsilon, \quad (4.2)$$

здесь:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix};$$

$\varepsilon = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} \varepsilon_{12} \varepsilon_{23} \varepsilon_{31}\}$  – вектор деформаций.

Связь между напряжениями и деформациями в бетоне и арматуре представим в виде закона Гука:

$$\begin{cases} \sigma_b = D_b \varepsilon \\ \sigma_{st} = D_{st} \varepsilon' \end{cases} \quad (4.3)$$

где  $D_b$ ,  $D_{st}$  – матрицы упругости бетона и арматуры.

Уравнения динамического равновесия составим на основе вариационного принципа Гамильтона–Остроградского, согласно которому сумма вариаций внутренней энергии тела и работы неконсервативных сил в течение некоторого интервала времени от  $t_1$  до  $t_2$  равна нулю, т.е.:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(K - \Pi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0, \quad (4.4)$$

где  $K$  — кинетическая энергия всего тела,  $\Pi$  — потенциальная энергия всего тела;  $W$  — работа неконсервативных сил.

Кинетическая энергия тела в произвольный момент времени:

$$K = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta^T}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial t} d\Omega. \quad (4.5)$$

Потенциальная энергия с учетом (4.3):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A\Delta)^T D_b A\Delta d\Omega + \frac{1}{2} \sum_1^m \int_{\Omega_{si}} (A\Delta)^T (D_{si} - D_b) A\Delta d\Omega_{si}. \quad (4.6)$$

Работа неконсервативных поверхностных ( $g_s$ ) и объемных ( $X$ ) сил:

$$W = \int_{\Omega} X^T \Delta d\Omega + \int_{S_2} g_s \Delta_{S_1} dS. \quad (4.7)$$

Функционал (4.4) с учетом (4.5), (4.6), (4.7) запишем в виде:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta F dt = 0, \quad (4.8)$$

где  $F = \left( \Delta, \frac{\partial}{\partial t} \Delta \right)$ .

Для решения (4.8) проведем дискретизацию функционала  $F$ .

## 4.2. Дискретизация энергетического функционала на пространстве конечных элементов

Запишем линейное разложение функции перемещения

$$\Delta(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi(x_1, x_2, x_3) a(t), \quad (4.9)$$

где  $\Phi$  – матрица известных заранее базисных функций:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \dots & \varphi_p & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & 0 & \varphi_p & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & 0 & \varphi_p \end{bmatrix}; \quad (4.10)$$

$a$  – вектор весовых коэффициентов  $a = \{a_1^1, a_1^2, a_1^3, a_2^1, a_2^2, a_2^3, \dots, a_p^1, a_p^2, a_p^3\}^T$ ;  $p$  – количество базисных функций;  $a_i^j$  – весовой коэффициент для функции  $\varphi_i$  в направлении  $x_j$ .

Вектор  $a(t)$  является вектором перемещений множества точек  $p$ .

С учетом разложения (4.9), (4.5), (4.6), (4.7) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [A(\Phi a)]^T D_b A(\Phi a) d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_{Si}} [A(\Phi a)]^T (D_{Si} - D_b) A(\Phi a) d\Omega_{Si} = \quad (4.11) \\ &= \frac{1}{2} a^T \left( K_b + \sum_{i=1}^m K_{Si} \right) a = \frac{1}{2} a^T K_{\Omega} a, \end{aligned}$$

здесь  $K_b$  – матрица жесткости бетона:

$$K_b = \int_{\Omega} (A\Phi)^T D_b (A\Phi) d\Omega;$$

$K_{Si}$  – матрица жесткости  $i$ -го арматурного стержня:

$$K_{Si} = \int_{\Omega_{Si}} (A\Phi)^T (D_{Si} - D_b) (A\Phi) d\Omega_{Si};$$

$$K = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\Phi a) \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\Phi a) \right] d\Omega = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial a}{\partial t} \right]^T M_{\Omega} \frac{\partial a}{\partial t}, \quad (4.12)$$

где  $M_{\Omega} = \rho \int_{\Omega} \Phi^T \Phi d\Omega$  – матрица масс тела.

$$W = f_{\Omega}^T a + f_S^T a, \quad (4.13)$$

где:  $f_{\Omega} = \int_{\Omega} X^T \Phi d\Omega$  – вектор узловых сил, эквивалентных

объемной распределенной нагрузке;  $f_S = \int_{S_2} g_S dS_2$  – вектор

узловых сил, эквивалентных поверхностной распределенной нагрузке.

После дискретизации функционала на пространстве базисных функций  $\varphi_i$  условие (4.8) запишем в виде:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \tilde{F} dt = 0, \quad (4.14)$$

где:

$$\tilde{F}\left(a, \frac{\partial a}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^T M_{\Omega} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{1}{2} a^T \left(K_b + \sum_1^m K_{S_i}\right) a + (f_{\Omega} + f_S)^T a. \quad (4.15)$$

Интеграл (4.14) может быть представлен суммой интегралов:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left( \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^T M_{\Omega} \frac{\partial a}{\partial t} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( M_{\Omega} \frac{\partial a}{\partial t} \right)^T \delta \left( \frac{\partial a}{\partial t} \right) \right) dt; \quad (4.16)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left( \frac{1}{2} a^T K_{\Omega} a \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} (K_{\Omega} a)^T \delta a dt; \quad (4.17)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left( (f_{\Omega} + f_S)^T a \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} (f_{\Omega} + f_S)^T \delta a dt. \quad (4.18)$$

Вычисляя интеграл (4.16) по частям:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( M_{\Omega} \frac{\partial a}{\partial t} \right)^T \delta \left( \frac{\partial a}{\partial t} \right) \right) dt = \\ & = \delta a \left( M_{\Omega} \frac{\partial a}{\partial t} \right)^T \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta a \left( M_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial a}{\partial t} \right) \right)^T dt, \end{aligned}$$

отметим, что его первая часть обращается в нуль ввиду того, что на границах временного интервала  $t_1-t_2$ ,  $\delta a=0$ . Уравнение (4.14) преобразуется к виду:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta a \left( -M_{\Omega} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - K_{\Omega} a + f_{\Omega} + f_S \right)^T dt = 0. \quad (4.19)$$

Ввиду того, что вариация  $\delta a$  произвольна, уравнение (4.19) имеет решение в случае, если:

$$-M_{\Omega} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - K_{\Omega} a + f_{\Omega} + f_S = 0,$$

или 
$$M_{\Omega} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + K_{\Omega} a = P(t), \quad (4.20)$$

здесь  $P(t)$  – суммарный вектор узловых сил, эквивалентных внешней нагрузке;  $K_{\Omega}$  – матрица жесткости тела  $\Omega$ .

Отметим, что матрица жесткости  $K_{\Omega}$  и матрица масс  $M_{\Omega}$  имеют размерность  $3p \times 3p$ , где  $p$  – количество базисных функций (или узловых точек). Используемые базисные функции  $\varphi$  отличны от нуля лишь в поле конечного элемента [4].

Таким образом, для отдельно взятого конечного элемента вводится вектор  $u$ , компоненты которого равны компонентам глобального вектора  $a$ , соответствующим

этим же узлам. Вектор  $y$  имеет размерность  $3n \times 3n$ , где  $n$  — количество узлов в конечном элементе. Для построения энергетического соотношения для отдельного конечного элемента введем базисные функции  $N$ , являющиеся отображением  $\Phi$  на отдельный конечный элемент.

Таким образом, аналогично (4.9) с сохранением условий (4.10) можно записать:

$$\delta_e(x_1, x_2, x_3, t) = N(x_1, x_2, x_3)y(t), \quad (4.21)$$

здесь  $N$  — матрица базисных функций конечного элемента:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix};$$

$\delta_e$  — перемещения, определенные в поле конечного элемента  $e$ .

Вектор узловых перемещений конечного элемента:

$$y = \{y_1^1, y_1^2, y_1^3, y_2^1, y_2^2, y_2^3, \dots, y_n^1, y_n^2, y_n^3\}^T,$$

где  $n$  — количество узлов конечного элемента.

С учетом сделанных обозначений, матрицы жесткости  $K_e$  и масс  $M_e$  для конечного элемента определяются формулами:

$$K_e = \int_{\Omega_e} B^T D_b B d\Omega_e + \sum_1^{M_e} f_i \int_{l_i} B^T (D_{Si} - D_b) B dl, \quad (4.22)$$

здесь  $\Omega_e$  — объем конечного элемента;  $f_i$  — площадь, и  $l_i$  — длина  $i$ -го арматурного стержня;

$$M_e = \rho \int_{\Omega_e} N^T N d\Omega_e; \quad (4.23)$$

$$B=[B_1 B_2 \dots B_n];$$

$$B_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N_j}{\partial x_2} & \frac{\partial N_j}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_3} & \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_j}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

Практика решения уравнений движения (4.20) показала, что выбор метода существенным образом зависит от параметров решаемой задачи. В случае решения задачи на интенсивные кратковременные динамические нагрузки необходимо учитывать возможные изменения свойств материала и разрушения, приводящие к изменению собственных частот. В этом случае при разложении колебаний по формам необходимо решение задачи на собственные значения на каждом временном шаге счета. Наиболее рациональным подходом при решении задач динамического расчета является использование методов непосредственного интегрирования системы уравнений.

### 4.3. Вынужденные колебания с затуханием. Матрица демпфирования

В процессе взаимодействия с динамической нагрузкой колебания железобетонной конструкции происходят с некоторым декрементом, величина которого определяется диссипацией энергии, возникающей за счет движения тела в вязкой среде, трением в местах контакта с другими телами, внутренним демпфированием в материале и др. Существуют инженерные оценки, определяющие необходимость учета демпфирования. Как правило, такие задачи возникают в случае продолжительных колебаний. При действии коротких интенсивных нагрузок вязкие свойства конструкции не учитывают.

В общем случае зависимость силы сопротивления от скорости перемещения нелинейна и зачастую определяется экспериментально. Механическая интерпретация системы, зависимой от скорости деформирования, может быть представлена реологической моделью Фойгта [3] (рис. 4.2).

Рассматривая колебания системы с учетом демпфирования, допустим, что искомое решение представляет собой колебание по закону синуса с частотой вынужденных колебаний  $\omega$ . Тогда все силы, участвующие в колебаниях, должны также изменяться по закону синуса с той же частотой. Рассмотрим векторную диаграмму на рис. 4.3. Дифференцирование в этом случае эквивалентно умножению длины вектора на  $\omega$ , с одновременным поворотом его на прямой угол в сторону вращения.

Пусть перемещение точки определяется уравнением:

$$\delta = \delta_0 \sin(\omega t - \lambda), \quad (4.24)$$

где  $\delta$  и  $\lambda$  – неизвестные постоянные величины.

На векторной диаграмме это перемещение направлено вертикально вверх. Восстанавливающая сила  $k\delta$  имеет амплитуду  $k\delta_0$  и направлена на диаграмме вертикально вниз.

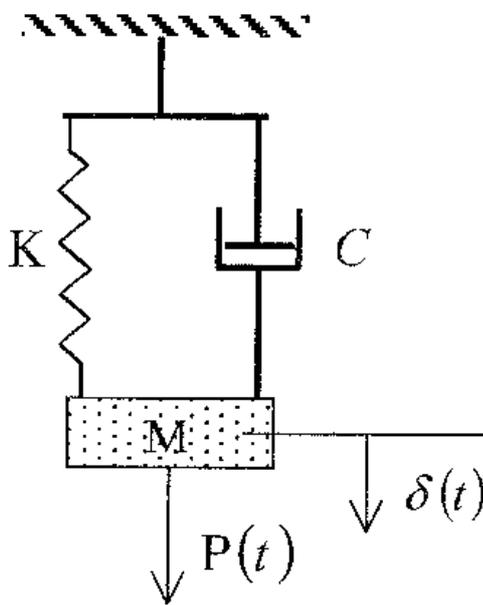


Рис. 4.2. Упруго-вязкая модель

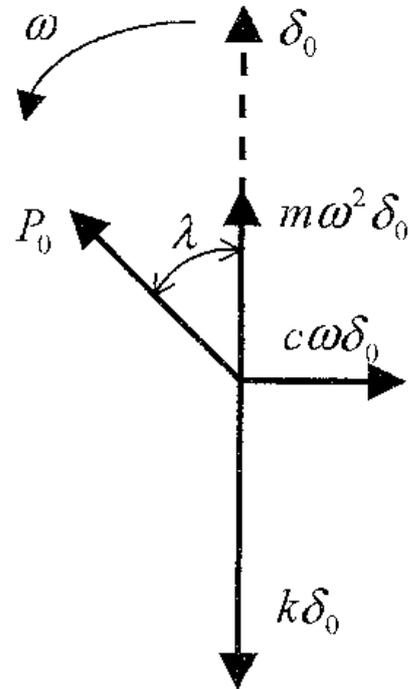


Рис. 4.3. Векторная диаграмма колебаний [3]

Сила затухания  $c\dot{\delta}$  имеет амплитуду  $c\omega\delta_0$  и повернута на прямой угол вперед по отношению к восстанавливающей силе. Сила инерции  $m\ddot{\delta}$  повернута на  $90^\circ$  вперед по отношению к силе затухания и имеет амплитуду  $m\omega^2\delta_0$ . Возмущающая сила  $P(t)=P_0\sin\omega t$  расположена под углом  $\lambda$  к перемещению  $\delta_0\sin(\omega t-\lambda)$  в сторону вращения.

Рассматривая равновесие сил по вертикали и горизонтали, получим:

$$\begin{cases} k\delta_0 - m\omega^2\delta_0 - P_0 \cos \lambda = 0 \\ c\omega\delta_0 - P_0 \sin \lambda = 0 \end{cases}, \quad (4.25)$$

откуда определим амплитудное значение смещения  $\delta_0$  и сдвиг по фазе  $\lambda$ :

$$\delta_0 = \frac{P_0}{\sqrt{(c\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}} = \frac{\frac{P_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 - \left(2 \frac{c}{c_c} \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \quad (4.26)$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2 \frac{c}{c_c} \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}, \quad (4.27)$$

где  $\frac{P_0}{k}$  — удлинение пружины под действием статической силы  $P_0$ ;  $\omega_n$  — частота незатухающих собственных колебаний;  $c_c = 2m\omega_n$  — коэффициент «критического затухания».

Следуя [3], проведем анализ энергетических соотношений, примененных к описанию колебаний. Допустим, что для очень медленных движений ( $\lambda=0$ ) за полный период колебаний никакой работы не совершается. Иными словами, за один цикл колебаний механическая энергия в тепловую не преобразуется. Исходя от положения равновесия, возмущающая сила перемещается на некоторое расстояние, прежде чем достигнуть крайнего положения, и, следовательно, совершает при этом некоторую работу. И эта работа переходит в потенциальную энергию или упругую энергию, накапливаемую пружиной. В продолжение следующей четверти периода движение происходит против приложенной силы, и пружина отдает поглощенную энергию. Итак, при малых скоростях работа возмущающей силы переходит в упругую энергию и никакая ее часть не превращается в тепло. При резонансной частоте  $\lambda = \frac{\pi}{2}$  вели-

чина рассеянной энергии за один период равна  $\pi P_0 \delta_0$ . В таком случае возмущающая сила равна и противоположна

силе затухания, так что затухание происходит как раз за счет рассеяния энергии. Сила упругости пружины равна тогда силе инерции, но противоположна ей по фазе, а следовательно, она находится в одной фазе с перемещением. Каждая из этих сил должна совершить работу за четверть периода, приводя, главным образом, к накоплению энергии, которая, однако, отдается обратно в течение следующей четверти периода. Итак, работа силы упругости периодически поглощается в виде упругой энергии пружины, а работа силы инерции — в виде кинетической энергии движущейся массы.

Сила затухания имеет амплитуду  $c(\delta)_{\max} = c\omega\delta_0$  и отличается по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  от перемещения  $\delta_0$ . Следовательно, энергия рассеяния за один период вследствие затухания равна  $\pi c\omega\delta_0^2$ . Работа же, совершаемая возмущающей силой за один период, есть  $\pi P_0\delta_0$ , и эта величина должна равняться рассеиваемой энергии, связанной с затуханием, т.е.:

$$\pi P_0\delta_0 = \pi c\omega\delta_0^2. \quad (4.28)$$

Это уравнение показано на рис. 4.4, где по оси абсцисс обозначены амплитуды, а по оси ординат — величины работы за один период, причем одна кривая соответствует работе силы  $P_0$ , а другая — работе силы затухания. В точке пересечения кривых возникает энергетическое равновесие, и соответствующая амплитуда  $\delta_0$  есть та амплитуда, которая устанавливается сама собой. А именно, если в некоторый момент времени амплитуда делается больше, то рассеяние энергии будет больше, чем приток, что повлечет за собой уменьшение кинетической энергии системы до тех пор, пока не будет достигнута амплитуда при указанном равновесии.

Итак, сила сопротивления на единицу объема тела пропорциональна скорости перемещения:

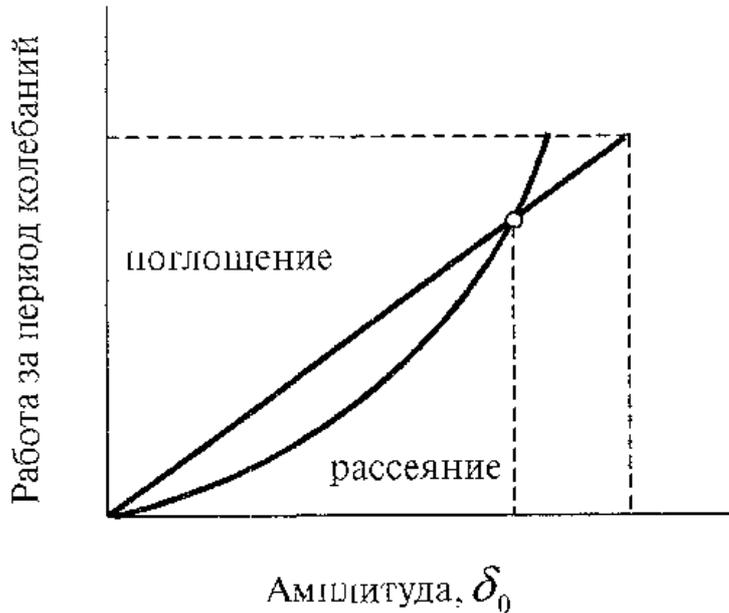


Рис. 4.4. Диаграмма работы, совершаемой за один период гармонической силой и вязким сопротивлением при разных амплитудах [3]

$$f_d = -c\dot{\delta}, \quad (4.29)$$

где  $c$  – эмпирический коэффициент демпфирования.

Определим выражение для матрицы демпфирования КЭ. Работа, совершаемая силой сопротивления в  $i$ -м конечном элементе, равна:

$$A_c = - \int_{\Omega_e} \delta^T c_i \delta d\Omega_e. \quad (4.30)$$

Так как  $\delta = N_i(x')y_i$  ( $y_i$  – вектор узловых перемещений  $i$ -го конечного элемента), то (4.30) преобразуется к виду:

$$A_c = -y_i \left( c_i \int_{\Omega_e} N_i^T N_i d\Omega_e \right) \dot{y}_i. \quad (4.31)$$

Отсюда, сила сопротивления в  $i$ -м КЭ равна:

$$f_{ci} = \left( c_i \int_{\Omega_e} N_i^T N_i d\Omega_e \right) \dot{y}_i. \quad (4.32)$$

Матрица демпфирования в конечном элементе имеет вид:

$$C_i = c_i \int_{\Omega_e} N_i^T N_i dy_i. \quad (4.33)$$

Диссипация энергии в конструкции при ее колебаниях складывается из суммы энергий, поглощенных на каждой форме собственных колебаний [15]. Демпфирование по собственной частоте можно определить измерением логарифмического декремента затухания для соответствующей формы собственных колебаний. В общем случае необходимо в отдельном КЭ учитывать  $\bar{n}$  значений коэффициентов демпфирования, если  $\bar{n}$  – число степеней свободы, ( $i = 1, 2, 3, \dots, \bar{n}$ ).

Помимо изложенного способа, матрицу демпфирования можно определить в виде линейной комбинации матриц масс и жесткости [2]:

$$C = \alpha M + \beta K, \quad (4.34)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – константы, определяемые по двум экспериментальным значениям коэффициентов демпфирования, определенным для двух различных частот собственных колебаний.

При переходе в глобальную систему координат матрица демпфирования  $C_i$  вычисляется в местной системе координат  $i$ -го КЭ. Преобразование матрицы демпфирования каждого КЭ проводится аналогично матрице жесткости:

$$\bar{C}_i = L_i^T C_i L_i, \quad (4.35)$$

где  $L_i$  – матрица направляющих косинусов углов.

## 4.4. Численное решение динамической задачи

### 4.4.1. Уравнение динамического равновесия системы

С учетом изложенного выше, уравнение динамического равновесия системы запишем в виде:

$$\{F_i\} + \{F_d\} + \{F_r\} = \{P(t)\}, \quad (4.36)$$

где  $\{F_i\}$ ,  $\{F_d\}$  – обобщенные силы инерции и демпфирования системы;  $\{F_r\}$  – обобщенные упругие силы системы;  $\{P(t)\}$  – обобщенный вектор внешних сил;  $\{F_r\}$  – нелинейная функция обобщенных перемещений системы  $\{\delta\}$ .

В общем случае обобщенные векторы  $\{F_i\}$  и  $\{F_d\}$  являются функциями обобщенных ускорений, скоростей и нелинейных перемещений  $\{\delta\}$ .

Рассмотрим случай, когда обобщенные векторы инерции и демпфирования системы не зависят от перемещений. Тогда для системы конечных элементов уравнение движения примет вид:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + \{F_r(\{\delta\})\} = \{P(t)\}, \quad (4.37)$$

где  $[M]$  – матрица масс системы;  $[C]$  – матрица демпфирования;  $\{\delta\}$ ,  $\{\dot{\delta}\}$ ,  $\{\ddot{\delta}\}$  – узловые перемещения, скорости и ускорения системы.

Численное интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений (4.37) при заданных начальных условиях выполним методом прямого интегрирования.

### 4.4.2. Прямое численное интегрирование нелинейного уравнения движения. Метод Ньюмарка (Newmark-β)

Прямое интегрирование уравнений движения методом Ньюмарка предполагает итерационную процедуру модифицированного метода Ньютона–Рафсона. Для конечно-элементной системы в целом в момент времени  $t$  известны

узловые перемещения  $\{\delta\}$ , скорости  $\{\dot{\delta}\}$  и ускорения  $\{\ddot{\delta}\}$ , для которых выполняется равенство:

$$[M]\{\ddot{\delta}\}_t + [C]\{\dot{\delta}\}_t + \{F_r(\{\delta\}_t)\} = \{P(t)\}_t. \quad (4.38)$$

Необходимо определить узловые перемещения, скорости и ускорения в момент времени  $t+\Delta t$ , для которого также должно выполняться равенство

$$[M]\{\ddot{\delta}\}_{t+\Delta t} + [C]\{\dot{\delta}\}_{t+\Delta t} + \{F_r(\{\delta\}_{t+\Delta t})\} = \{P(t)\}_{t+\Delta t}. \quad (4.39)$$

Вычтя из (4.38) (4.39) и разложив полученное выражение в ряд Тейлора, получим уравнения движения в приращениях. Полагая  $\Delta t$  малым и пренебрегая слагаемыми со степенью  $\Delta\{\delta\}^2$  и выше, получим:

$$[M]\Delta\{\ddot{\delta}\} + [C]\Delta\{\dot{\delta}\} + [K_T]\Delta\{\delta\} = \Delta\{P(t)\}, \quad (4.40)$$

где  $\Delta\{\delta\} = \{\delta\}_{t-\Delta t} - \{\delta\}_t$  — приращение узловых перемещений;

$\Delta\{\dot{\delta}\} = \{\dot{\delta}\}_{t+\Delta t} - \{\dot{\delta}\}_t$  — приращение узловых скоростей;

$\Delta\{\ddot{\delta}\} = \{\ddot{\delta}\}_{t+\Delta t} - \{\ddot{\delta}\}_t$  — приращения узловых ускорений;

$[K_T]$  — матрица касательной жесткости системы конечных элементов, вычисленных в момент времени  $t$ .

Уравнение (4.39) с учетом (4.40) можно записать в виде:

$$[M]\{\ddot{\delta}\}_{t+\Delta t} + [C]\{\dot{\delta}\}_{t+\Delta t} + \{F_r(\{\delta\}_t)\} + [K_T]\Delta\{\delta\} = \{P(t)\}_{t+\Delta t},$$

или

$$(4.41)$$

$$[M]\{\ddot{\delta}\}_{t+\Delta t} + [C]\{\dot{\delta}\}_{t+\Delta t} + [K_T]\Delta\{\delta\} = \{P(t)\}_{t+\Delta t} - \{F_r(\{\delta\}_t)\}.$$

Уравнение (4.41) представляет собой линеаризованное уравнение (4.39) в момент времени  $t+\Delta t$ . Учитывая аналогию с уравнениями движения линейной системы, решение для приращений перемещений, скоростей и ускорений в

(4.41) для момента времени  $t+\Delta t$  может быть получено путем прямого интегрирования.

В методе Ньюмарка [18] вводятся константы  $a_0, \dots, a_7$ , вычисляемые по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{2\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\beta}{2\Delta t^2}, \quad a_2 = \frac{1}{2\Delta t^2}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad a_4 = \frac{\beta}{\alpha} - 1,$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\beta}{\alpha} - 2 \right), \quad a_6 = \Delta t(1 - \beta), \quad a_7 = \beta\Delta t,$$
(4.42)

где  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры метода Ньюмарка.

Согласно методу Ньюмарка, векторы узловых ускорений и узловых скоростей в момент времени  $t+\Delta t$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \{\ddot{\delta}\}_{t+\Delta t} &= a_0 \{\delta\} - a_2 \{\dot{\delta}\}_t - a_3 \{\ddot{\delta}\}_t, \\ \{\dot{\delta}\}_{t+\Delta t} &= \{\dot{\delta}\}_t + a_6 \{\ddot{\delta}\}_t + a_7 \{\ddot{\delta}\}_{t+\Delta t}. \end{aligned}$$
(4.43)

Подставив (4.43) в (4.41) получим:

$$[K]\Delta\{\delta\} = \{\dot{R}\}_{t+\Delta t},$$
(4.44)

где эффективная матрица жесткости и эффективный вектор нагрузки определяются в виде:

$$[K] = [K_T] + a_0[M] + a_1[C];$$
(4.45)

$$\begin{aligned} \{\dot{R}\}_{t+\Delta t} &= \{P\}_{t+\Delta t} + [M] \left( a \{\dot{\delta}\}_t + a_3 \{\ddot{\delta}\}_t \right) + \\ &+ [C] \left( a_4 \{\dot{\delta}\}_t + a_5 \{\ddot{\delta}\}_t \right) - \left\{ F_r \left( \{\delta\}_t \right) \right\}. \end{aligned}$$
(4.46)

Получив решение уравнения (4.43), можно определить узловые перемещения в момент времени  $t+\Delta t$ :

$$\{\delta\}_{t+\Delta t} = \{\delta\}_t + \Delta\{\delta\}. \quad (4.47)$$

Полученное решение линеаризованного уравнения движения (4.41) при его подстановке в нелинейное уравнение (4.39) не будет обращать его в равенство. При этом образуется невязка вектора сил  $\Delta\{\psi\}$ , определяемая по формуле:

$$\Delta\{\psi\} = \{P\}_{t+\Delta t} - \left( [M]\{\ddot{\delta}\}_{t+\Delta t} + [C]\{\dot{\delta}\}_{t+\Delta t} + \left\{ F_r(\{\delta\}_{t+\Delta t}) \right\} \right). \quad (4.48)$$

Прямое численное интегрирование нелинейного уравнения движения проведем неявным методом Ньюмарка в сочетании с итерационным модифицированным методом Ньютона–Рафсона. Начальные приближения значений ускорений, скоростей и перемещений на первой итерации вычислим по формулам (4.43) и (4.44). Получив приближенное решение, далее проводим корректировку невязки  $\Delta\{\psi\}$  к заданному критерию сходимости значению, так как на практике из-за погрешностей вычисления невозможно получить нулевой вектор  $\Delta\{\psi\}$ . Критерий сходимости устанавливается либо по допускаемой погрешности вектора  $\Delta\{\psi\}$ , либо по допускаемой разнице между значением  $\Delta\{\psi\}$  на соседних итерациях.

Алгоритм прямого численного интегрирования уравнений движения может быть принят следующим образом. Для момента времени  $t$  известны начальные условия  $\{\delta\}$ ,  $\{\dot{\delta}\}$ ,  $\{\ddot{\delta}\}$ , удовлетворяющие уравнению (4.38).

Вычисляем матрицу касательной жесткости:

$$[K_T]_t = \left[ K_T(\{\delta\}_t) \right],$$

и вектор упругих сил системы:

$$\{F_r\}_t = \left\{ F_r(\{\delta\}_t) \right\}.$$

Используя аппроксимации метода Ньюмарка, для моментов времени  $t$  и  $\Delta t$  по формулам (4.45), (4.46) вычислим эффективную матрицу жесткости  $[K]$  и вектор эффективной нагрузки  $\{\hat{R}\}_{t+\Delta t}$ . Из решения (4.44) получим начальные условия приращений перемещений  $\Delta\{\delta\}^0$  (верхний индекс означает номер итерации по методу Ньютона–Рафсона).

Из (4.47) получим узловые перемещения  $\{\delta\}_{t+\Delta t}$ , из уравнений (4.43) получим узловые скорости  $\{\dot{\delta}\}_{t+\Delta t}$  и узловые ускорения  $\{\ddot{\delta}\}_{t+\Delta t}$ .

Подставив полученные  $\{\delta\}_{t+\Delta t}$ ,  $\{\dot{\delta}\}_{t+\Delta t}$ ,  $\{\ddot{\delta}\}_{t+\Delta t}$  в (4.48), вычислим  $\Delta\{\psi\}^k$ . Если полученный вектор удовлетворяет условию сходимости, то начинаем новый шаг по времени ( $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ ) и переходим ко второму шагу алгоритма.

Если условие сходимости не удовлетворено, то вычисляем корректирующую поправку приращений перемещений  $\Delta\{S\}^k$  по формуле:

$$\Delta\{S\}^k = [K]^{-1} \Delta\{\psi\}^k, \quad (4.49)$$

где  $[K]$  – эффективная матрица жесткости, вычисляемая на третьем шаге. Используя поправку, корректируем приращения перемещений по формуле:

$$\Delta\{\delta\}^{k+1} = \Delta\{\delta\}^k + \Delta\{S\}^k. \quad (4.50)$$

Переходим к следующей итерации для момента времени  $t+\Delta t$ . Шаги алгоритма с 4 по 7 повторяются до тех пор, пока условия сходимости не будут удовлетворены (шаг 5). Подобная итерационная система называется модифицированным методом Ньютона–Рафсона, поскольку эффективная матрица жесткости в выражении (4.49) вычисляется

только один раз на начальной итерации и остается постоянной на всем временном шаге. Это снижает вычислительные затраты, но приводит к линейной скорости сходимости итерационной схемы по сравнению с квадратичной скоростью сходимости полного метода Ньютона Рафсона.

#### **4.5. Особенности динамического расчета железобетонных конструкций МКЭ**

Принципиальным вопросом при моделировании процесса динамического деформирования железобетона с трещинами МКЭ является способ определения трещинообразования в бетоне и учета арматуры в конечном элементе. Описание армирования КЭ может быть проведено по трем схемам:

- выделение арматуры в виде конечных элементов, имеющих связи с бетонными блоками;
- суперпозиция матриц жесткости бетона и арматуры в КЭ;
- распределение арматуры по объему КЭ.

Учет образования трещин в бетоне при расчете железобетонных конструкций МКЭ осуществляется двумя способами. Согласно первой схеме, трещина появляется на границе между КЭ [13]. По второй схеме, трещина появляется внутри КЭ, при этом изменение физико-механических характеристик КЭ в связи с появлением трещины распространяется на весь объем [8, 9, 10, 11, 14, 17]. Наиболее распространена вторая схема образования и развития трещины в железобетоне. Физические соотношения, определяющие напряжения и деформации бетона и арматуры рассматриваются в пределах отдельного КЭ. При этом на шаге счета свойства бетона с трещиной и арматуры усредняются. Таким образом, при расчете по данной схеме на любой стадии динамического деформирования рассматри-

вается непрерывное тело, состоящее из отдельных КЭ, деформативные свойства которых идентичны железобетону. Свойства реального железобетонного КЭ в процессе деформирования определяются сцеплением арматуры с бетоном, наличием трещин в бетоне, скоростью деформирования, интенсивностью и временем действия нагрузки и др.

#### 4.5.1. Методика расчетов

Рассмотрим изгибаемые, внецентренно-сжатые и сжатые железобетонные конструкции на действие кратковременной динамической нагрузки интенсивностью  $P(t)$ . Алгоритм расчета предполагает анализ напряжений и деформаций, учитывающий плоское напряженное состояние конструкций. Динамическая нагрузка может быть равномерно распределена по поверхности или приложена в виде сосредоточенного импульса, направление которого может изменяться.

Исходными зависимостями являются диаграммы «напряжение–деформация» для бетона и арматуры. В процессе расчета изменение напряженно-деформированного состояния бетона на различных стадиях нагружения рассматривается по главным площадкам на основании полученных экспериментально динамических диаграмм  $\sigma$ – $\varepsilon$  бетона.

Рассматриваются следующие стадии деформирования железобетонного элемента: упруго-пластическая без трещин (I), упруго-пластическая с трещинами (II), пластическая стадия при текучести арматуры (III), пластическая стадия с нарастанием необратимых деформаций сжатого бетона, характеризуемая динамическим сопротивлением бетона на нисходящей ветви диаграммы «напряжение–деформация» (IV).

До образования трещины железобетон рассматривается как нелинейно упругий ортотропный материал с осями ор-

тогтропии, совпадающими с направлением действия главных напряжений  $\sigma_{1,d}$  и  $\sigma_{3,d}$ .

Матрица свойств материала принимается в виде (3.32) с учетом армирования (3.33). На основании анализа экспериментальных исследований бетона при высокоскоростном растяжении зависимость  $\sigma_{bt,d} - \varepsilon_{bt,d}$  принята линейной. Секущий модуль упругости бетона на главной площадке с растягивающими напряжениями принимается равным начальному модулю упругости.

По главным площадкам со сжимающими напряжениями изменение секущего модуля упругости бетона для всех стадий устанавливается на основании динамической диаграммы «напряжение–деформация» бетона, учитывающей эффект косвенного армирования и скорость деформирования (2.42):

$$E'_{b,d} = \frac{\sigma_{b,d}}{\varepsilon_{b,d}}.$$

Соппротивление арматуры при динамическом деформировании принято по критерию Дж. Кемпбелла. За пределом динамической текучести стали закон деформирования принят в виде:

$$\sigma(t) = \sigma_y \left[ \frac{(\alpha + 1) E_s t_o}{\sigma_y} \dot{\varepsilon} \right]^{\frac{1}{\alpha + 1}}, \quad (4.51)$$

где  $\dot{\varepsilon} \geq \frac{\sigma_y}{(\alpha + 1) E_s t_o}$ , или по формуле В.А. Кузьменко

(2.22), при необходимости легко трансформируемой в диаграмму Прандтля.

Важным моментом в нелинейном анализе динамического деформирования железобетона является процесс трещинообразования. Появление трещины характеризует переход элемента в стадию II динамического деформирования. Образование и развитие трещины в КЭ осуществляет-

ся нормально к направлению главного растягивающего напряжения в бетоне. При этом критерием образования трещины является достижение в бетоне КЭ на главной площадке предельных деформаций на растяжение. Максимальные деформации бетона при растяжении приняты  $\varepsilon_{bt,d}^u = 0,3\text{‰}$ .

Образование трещины в бетоне корректируется с учетом того, что сопротивление растяжению в бетоне снижается при появлении сжимающих напряжений на взаимно перпендикулярной площадке. В расчете это отражается путем введения критерия динамической прочности бетона в области «сжатие–растяжение». С учетом влияния косвенного армирования на повышение прочности бетона при сжатии критерий прочности можно представить в виде:

$$1 + \frac{\sigma_{t,d}}{R_{b,red} K_{v,b}} \geq \frac{\sigma_{n,d}}{R_{bt} K_{v,bt}}, \quad (4.52)$$

где  $\sigma_{t,d}$  — главные сжимающие напряжения при динамическом нагружении, имеющие в расчете знак «минус»;  $\sigma_{n,d}$  — главные растягивающие напряжения, имеющие в расчете знак «плюс»;  $R_{d,red} = R_b \cdot \mu_{cir} R_{s,cir}$  — приведенная прочность бетона.

При удовлетворении условия (4.52), фиксируется образование трещины в бетоне при деформациях  $\varepsilon_{n,d} = \frac{\sigma_{n,d}}{E_b} < \varepsilon_{bt,d}^u$ .

Угол наклона площадки с максимальным растягивающим напряжением в бетоне к горизонтальной плоскости (угол наклона трещины) можно получить из третьего уравнения (3.52) путем замены деформаций на напряжения, индексы  $n$  на  $x$  и  $t$  на  $y$  и приравнивая  $\tau_{nt}$  к нулю:

$$2\alpha = \arctg \left( \frac{2\tau_{bxy}}{\sigma_{bx} - \sigma_{by}} \right). \quad (4.53)$$

Угол  $\alpha$ , определенный для момента трещинообразования, в последующем расчете считается известным для рассматриваемого КЭ. Коэффициенты матрицы упругости для стадии (II) и в дальнейшем принимаются в виде (3.62).

Сопротивление полос бетона между трещинами оценивается как при динамическом одноосном сжатии на основании диаграммы  $\varepsilon_b - \sigma_b$ .

В динамическом расчете не учитывается снижение модуля деформаций бетона для участков между трещинами, которое имеет место при статическом нагружении вследствие ползучести бетона при длительном действии нагрузки, а также растягивающих усилий, возникающих в бетоне в направлении, перпендикулярном трещине, от растянутой арматуры, пересекающей полосу, и других факторов.

Если на обеих главных площадках действуют растягивающие напряжения, то условие образования трещины можно принять в виде  $\varepsilon_{bt} \geq \varepsilon_{bt,d}^u$ . При этом трещина совпадает с направлением главной площадки, по которой деформации растянутого бетона первыми достигнут предельной величины. В этом случае коэффициенты матрицы свойств материала принимаются в виде (3.62) и сопротивление бетона на участке между трещинами не учитывается, т.е. модуль упругости  $E'_{bt} = 0$ .

Коэффициенты  $\varphi_{sb}$ , учитывающие неравномерность деформаций арматуры в сечении с трещиной и на участке между ними, входят в выражение, определяющее матрицу податливости, и могут быть приняты в виде кусочно-линейной аппроксимации в функции деформаций арматуры.

Останавливаясь на некоторых особенностях применения матрицы упругости КЭ, заметим, что в элементах с трещиной нормального отрыва реализуется кинематический механизм, и сопротивление по берегам трещины отсутствует. Поэтому в расчете условно принято, что при из-

менении угла наклона трещины от 0 до  $-60^\circ$  и от 0 до  $60^\circ$  реализуется сдвиговой механизм, а при изменении угла наклона трещины от  $-60^\circ$  до  $-90^\circ$  и от  $60^\circ$  до  $90^\circ$  – кинематический. При сдвиговом механизме движения трещины матрица податливости для элемента с трещинами принимается с коэффициентами (3.62). В случае реализации кинематического механизма коэффициенты (3.46) и (3.63) вычисляются при  $A=\mu_{sx}$ ,  $B=\mu_{sy}$ .

Угол наклона трещины  $\alpha$ , определенный по формуле (4.53), в момент ее образования может быть положительным или отрицательным. Если он положителен, то откладывается от горизонтальной оси в третьей четверти декартовой системы координат и во второй четверти, если он отрицателен.

В случае, если КЭ без трещины разрушается от раздробления бетона (стадия IV), т.е. нарушается:

$$\left| \frac{\sigma_{t,d}}{R_{b,red} K_{v,b}} \right| \leq 1, \quad (4.54)$$

что происходит в железобетонном элементе в условиях «сжатие–сжатие» ( $\sigma_{t,d} < 0$  и  $\sigma_{n,d} < 0$ ). Постепенное выключение бетона из работы описывается ниспадающей ветвью диаграммы «напряжение–деформация» бетона. Однако если на обеих главных площадках элемента нарушается условие (4.54), то фиксируется раздавливание бетона. В этом случае, если в элементе отсутствует арматура, то побочные элементы матрицы упругости  $[d]$  (3.30) принимаются равными нулю, а диагональным элементам присваивается бесконечно малое значение. Если в элементе имеется арматура, то считается, что она теряет устойчивость, и в дальнейшем сопротивление конструкции динамическому воздействию не учитывается.

В процессе активного сопротивления конструкции вследствие перераспределения усилий возможна локальная

разгрузка отдельных элементов. Началом разгрузки (стадия II–IV) считаем снижение уровня деформаций в бетоне по главной площадке. Коэффициенты матрицы податливости элемента принимаются в виде (3.62), при этом коэффициенты матрицы жесткости остаются фиксированными на момент начала разгрузки.

Методика расчета железобетонных конструкций, находящихся в условиях плоского напряженного состояния, реализована на основе метода КЭ. В нелинейном анализе динамического сопротивления железобетона для дискретизации сплошной среды используем различные типы КЭ (Гл. III). Процедура итерационного расчета реализована на основе метода Newmark- $\beta$ .

Расчет ведется поэтапно, с корректировкой жесткости для каждого КЭ на очередном шаге счета по времени. На первом шаге матрица жесткости формируется для отдельных КЭ при условии, что арматура и бетон являются упругими и их деформативные свойства описываются начальными модулями упругости ( $E_{s,d}$ ,  $E_{b,d}$ ). После формирования матрицы жесткости, масс и вектора приращения внешней нагрузки, из решения системы динамического равновесия в приращениях (4.9) определяем вектор приращения узловых перемещений для первого шага счета по времени. Приращения ускорения и скорости для первого шага счета определяются при начальных условиях  $t=0$ ,  $\{\dot{u}\}_t=0$  и  $\{\ddot{u}\}_t=0$  (п. 4.4.2). Используя полученные значения узловых перемещений, для каждого элемента определим деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ . По ним, используя матрицу упругости, найдем напряжения в бетоне  $\sigma_{bx}$ ,  $\sigma_{by}$ ,  $\tau_{bxy}$  на площадках, перпендикулярных осям  $x$  и  $y$ , и в арматуре  $\sigma_{sx}$ ,  $\sigma_{sy}$ ,  $\sigma_{sv}$ . А также в соответствии с (3.52) определим напряжения в бетоне по главным площадкам.

Сопротивление железобетонной конструкции внешнему воздействию происходит до некоторого предела, после

чего она разрушается. За предельное состояние будем считать такое, при котором в бетоне возникли предельные деформации при сжатии. Они устанавливаются в зависимости от скорости деформирования и процента косвенного армирования и определяются по (2.36), составляя от 3 до 10‰. При расчете конструкций в упругой стадии по предельному состоянию 16 (СНиП II-11-77\*) за критерий окончания расчета принято время окончания действия нагрузки  $\Theta$ .

В процессе расчета проверяется сходимость и устойчивость полученного решения путем варьирования частоты разбиения конструкции на конечные элементы и изменения шага интегрирования по времени.

#### **4.5.2. Оценка достоверности и точности результатов расчетов**

Рассмотрим результаты численного расчета в сопоставлении с опытными величинами, позволяющими оценить точность метода и его возможности. Рассмотрим конструкции при плоском деформированном состоянии, нагруженные как статической, так и кратковременной динамической нагрузкой. Анализ железобетонных конструкций учитывает их упругую и упругопластическую работу. Рассмотрена стадия трещинообразования и разрушения. В процессе расчета проверяется сходимость и устойчивость полученного решения путем варьирования частоты разбиения конструкции на конечные элементы и изменения шага интегрирования по времени.

#### **4.5.3. Расчет железобетонной заземленной консольной пластины. Анализ сходимости решения**

Рассмотрим консольную высокую балку. Расчетная схема балки-стенки показана на рис. 4.5. Статическая сила  $P=1,14$  кН приложена к свободному торцу конструкции и

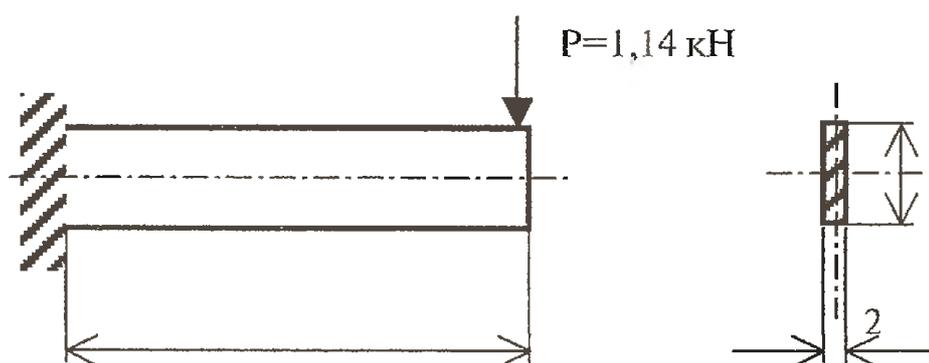


Рис. 4.5. Консольная балка-стенка

действует сверху вниз. Балка выполнена из однородного материала с модулем упругости  $E=2,1 \cdot 10^5$  МПа и коэффициентом Пуассона  $\nu=0,3$ . Аналитическое решение этой задачи по формулам сопротивления материалов дает максимальный прогиб  $U_u=0,99$  мм. Результаты расчета с различной плотностью дискретизации сведены в табл. 4.1–4.3. При одинаковом числе узловых неизвестных расхождение расчетных данных с аналитическим решением составило: для элемента Sisodija [19] – 0,3%, для конечного элемента с двумя степенями свободы в узле [16] – 0,4%, для элемента В.Ф. Свойского [12] – 0,3%.

Приведенные в табл. 4.1–4.3 результаты говорят о хорошем соответствии численных расчетов аналитическому решению.

Таблица 4.1. Прямоугольный элемент с двумя степенями свободы в узле [16]

Сетка	Количество элементов	Число неизвестных	Прогиб, мм
10×6	60	154	–0,9861
20×6	120	294	–0,9937
20×10	200	462	–0,9944
		Точное решение	–0,99

Таблица 4.2. Прямоугольный элемент с тремя степенями свободы в узле [12]

Сетка	Количество элементов	Число неизвестных	Прогиб, мм
1×4	4	30	-0,9213
3×10	30	132	-0,9792
3×20	60	252	-0,981
6×20	120	441	-0,991
		Точное решение	-0,99

Таблица 4.3. Прямоугольный элемент с тремя степенями свободы в узле [19]

Сетка	Количество элементов	Число неизвестных	Прогиб, мм
1×4	4	30	-0,8878
3×10	30	132	-0,9752
3×20	60	252	-0,9796
6×20	120	441	-0,993
		Точное решение	-0,99

#### 4.5.4. Расчет железобетонной балки на действие импульсивной нагрузки

В качестве тестового примера приняты результаты экспериментов, проведенные на гидропульсаторе И.К. Белобровым [6]. Балка прямоугольного сечения 12 см на 24 см,  $h_0=21,5$  см, с расчетным пролетом 112 см. Продольная арматура класса А-III,  $2\varnothing 22$  мм;  $\mu_s=0,58$ ;  $R_{sd}=540$  МПа,  $R_{sw,d}=377$  МПа – коэффициенты армирования в продольном направлении. Бетон класса В40 ( $R_{bd}=29$  МПа,  $R_{bt,d}=2,1$  МПа). Масса единицы площади  $0,306 \cdot 10^{-6}$  Н·с<sup>2</sup>/мм<sup>3</sup>. Изменение динамической нагрузки во времени принято с некоторым приближением на основании данных об изменении опорной реакции. При этом в работе [6] отмечается, что обоб-

щенная величина сил инерции, полученная при испытаниях, была незначительной и не превышала 10–15%.

Следовательно, характер развития опорной реакции балки и ее сопротивления близки между собой. Расчетная схема балки показана на рис. 4.6.

Решение было проведено с делением балки на 20, 30 и 40 КЭ. Результаты расчетов при разделении на 30 и 40 КЭ близки между собой. На рис. 4.7 показана расчетная схема трещинообразования в сравнении с экспериментальной. На рис. 4.8, 4.9 приведены эпюры нормальных и касательных напряжений, а также углы наклона главных площадок и характер распределения главных напряжений.

Полученная расчетом картина трещинообразования и механизм разрушения балки позволяют отметить совпаде-

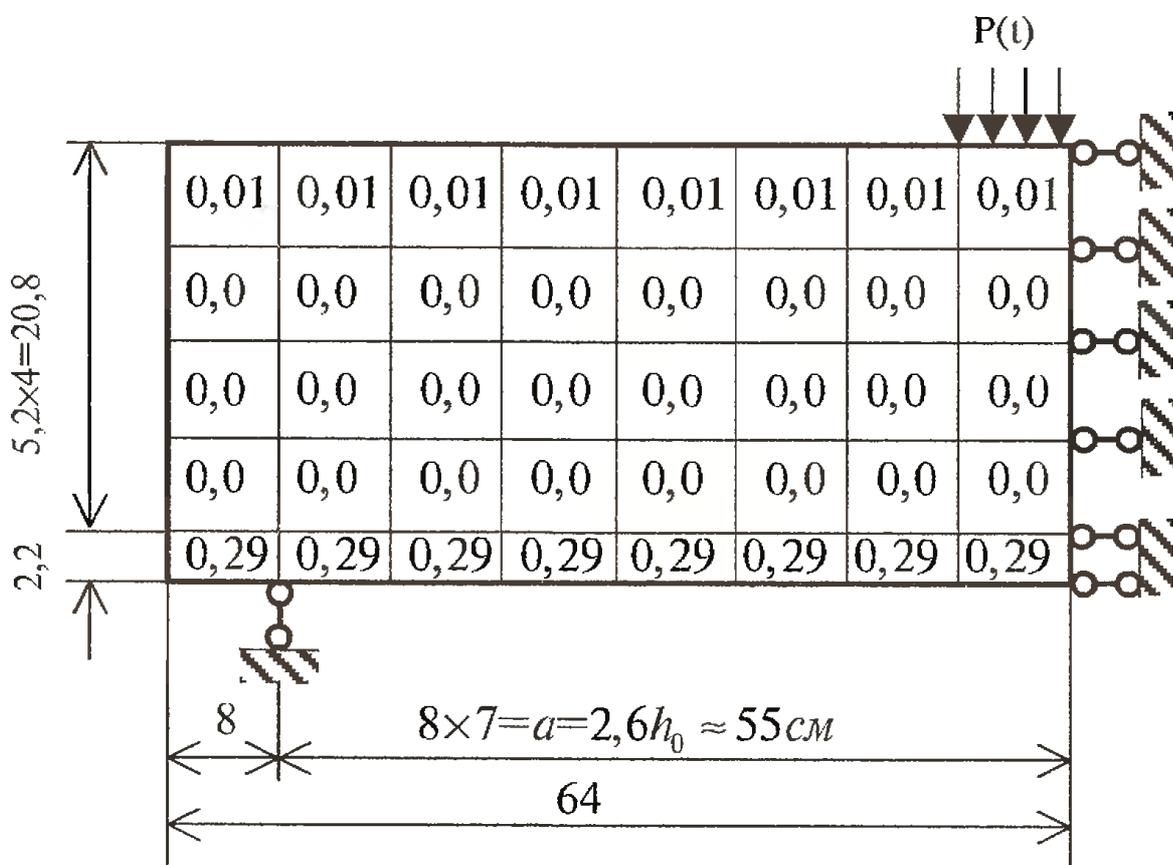


Рис. 4.6. Расчетная схема балки

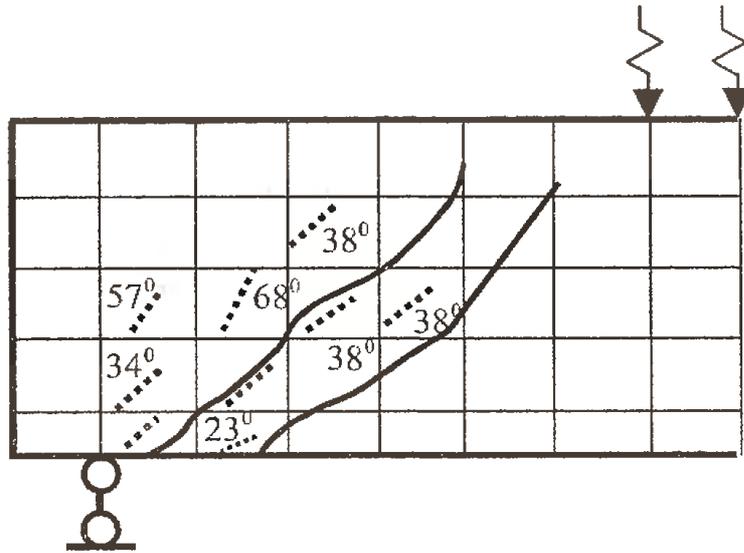


Рис. 4.7. Картина трещинообразования,  $t=0,052$  с  
 — эксперимент [6],  
 ..... теория [5]

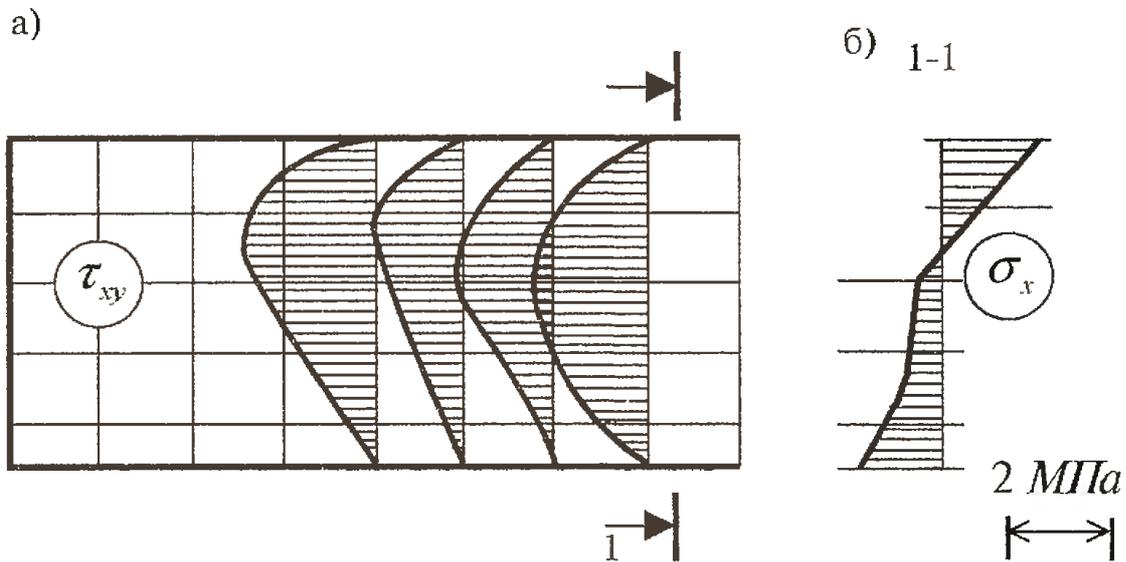


Рис. 4.8. Эпюры напряжений: а) касательных; б) нормальных,  $t=0,031$  с [5]

ние моментов появления первых трещин, мест их образования и направление.

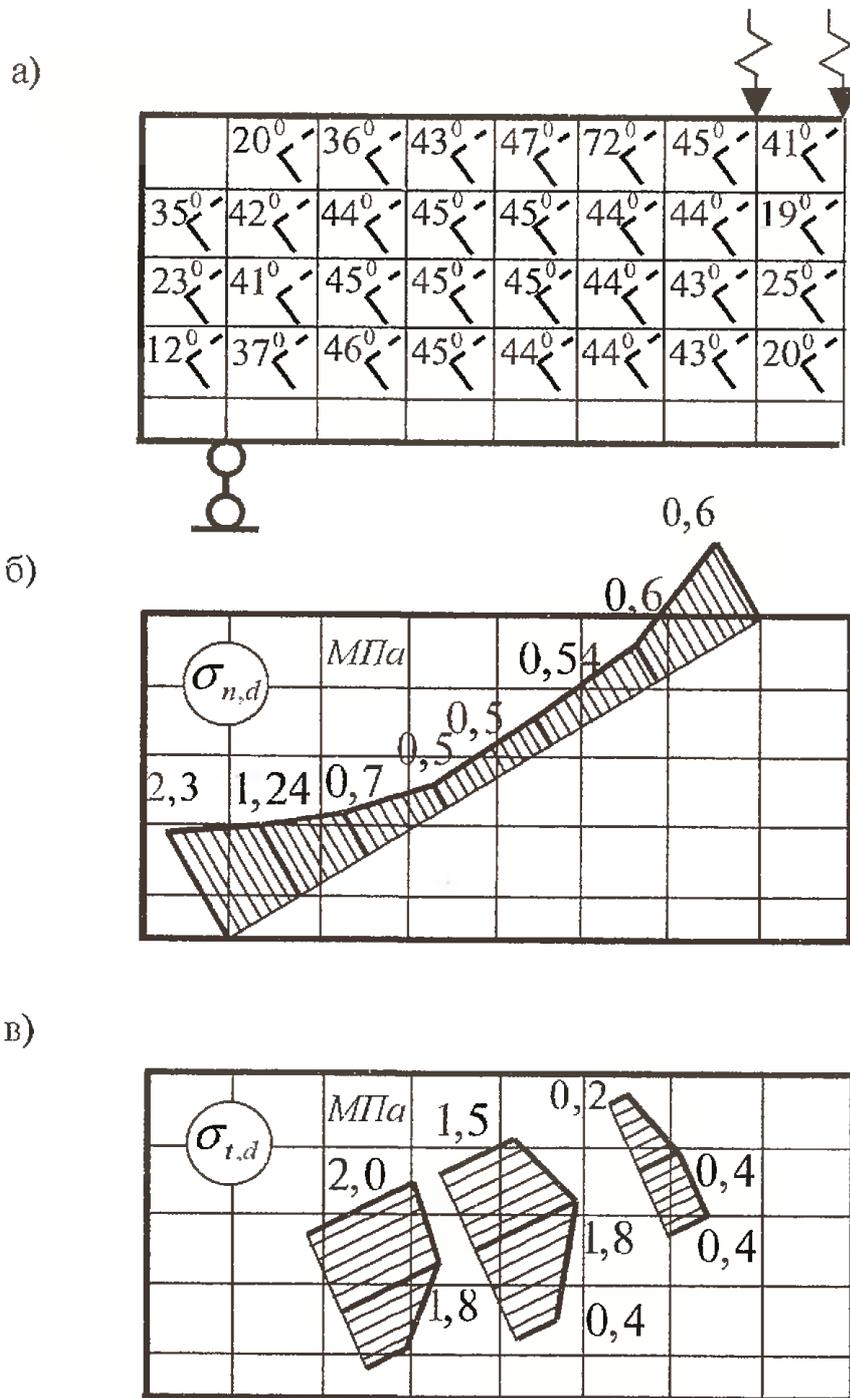


Рис. 4.9. Результаты расчета высокой балки: а) углы наклона площадок главных напряжений и характер их распределения; б) эпюры нормальных напряжений; в) эпюры касательных напряжений,  $t = 0,031$  с [5]. ——— площадка, на которой действуют сжимающие напряжения; - - - площадка, на которой действуют растягивающие напряжения

Эпюры касательных напряжений  $\tau_{xy}$  показаны на рис. 4.8 а. Характер нормальных напряжений  $\sigma_x$  в процессе динамического нагружения балки практически не меняется (рис. 4.8 б), что связано со значительным запасом по прочности нормальных сечений по сравнению с наклонными.

Угол наклона главной площадки, по которой действуют сжимающие напряжения, к горизонтальной оси перед образованием первой наклонной трещины в основном составляет от  $30^\circ$  до  $45^\circ$ . Эпюры главных напряжений построены на линии, соединяющей место приложения нагрузки с наружной гранью опоры. Расчеты показали, что основная часть балки находится в области «сжатие–растяжение», рис. 4.9 б, в. В то время как в зоне приложения силы и у опорной площадки бетон испытывает двухосное сжатие. В соответствии с картиной распределения главных напряжений наиболее нагруженная часть конструкции находится в зоне опоры и испытывает растягивающие напряжения до 2 МПа, близкие к предельным, в сочетании со сжимающим напряжением, что вызвало появление наклонной трещины.

#### 4.5.5. Расчет высокой железобетонной балки с проемами в опорной зоне

Анализ высокой железобетонной балки с проемом в приопорной зоне проведен в сравнении с экспериментальными данными, полученными при испытании на копровой установке [7].

Балка двутаврового сечения с отношением  $\frac{h}{l_0} = \frac{1}{2}$ , высота сечения  $h=500$  мм, толщина стенки  $b=70$  мм,  $b'_f=280$  мм,  $h'_f=100$  мм. Балка армирована в растянутой зоне одним стержнем  $\varnothing 25$ , АIII, в сжатой зоне — тремя стержнями  $3\varnothing 6$ , АI. По наклонным сечениям установлены хомуты  $1\varnothing 6$ , АI,

с шагом 100 мм. В опорной зоне балки был устроен прямоугольный проем. Нагрузка прикладывалась через траверсу. Пролет среза  $a=1,14 h_0$ .

Полученная в опытах диаграмма сопротивления образца была аппроксимирована линейными отрезками и использована для расчетов (рис. 4.10).

Расчеты выполнены с делением симметричной части балки на 147 КЭ. Шаг счета принят  $\Delta t=0,5$  мс. На рис. 4.11 показаны изолинии главных напряжений на момент времени  $\Delta t=45$  мс, предшествующий появлению первых трещин. Анализ напряженного состояния показал, что основная часть конструкции находилась в состоянии «растяжение—сжатие».

Наибольшая концентрация напряжений возникла в нижней угловой зоне проема, расположенной ближе к опоре (рис. 4.12). На этом участке растягивающие напря-

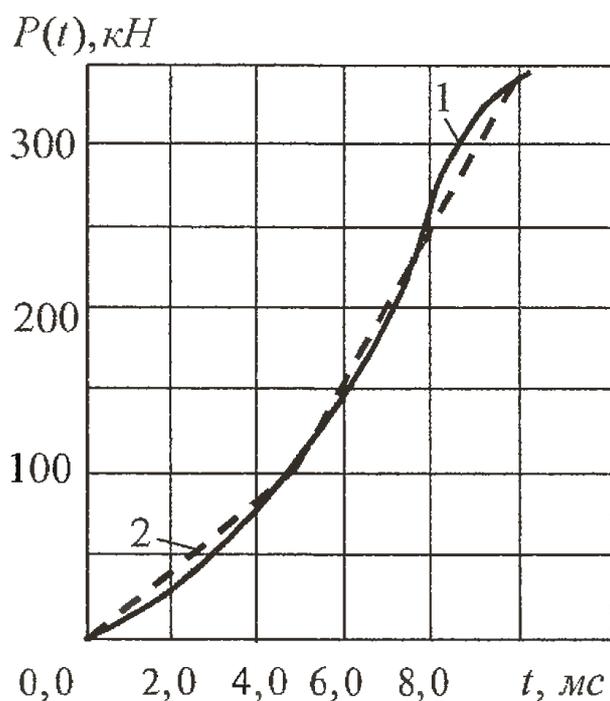


Рис. 4.10. Динамическое сопротивление балки с проемом, изменение динамической нагрузки во времени: 1 — опыт, 2 — расчет [5]

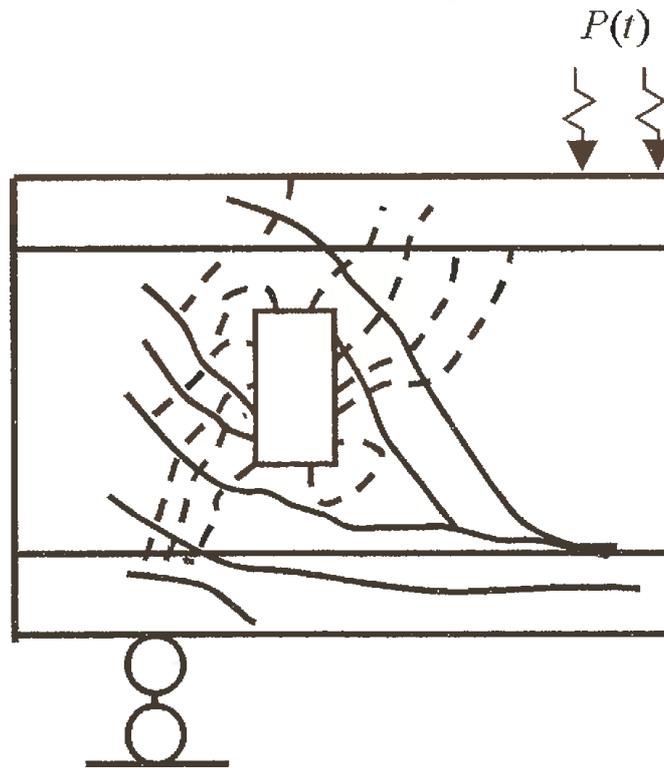


Рис. 4.11. Изолинии главных напряжений [5]:

—  $\sigma_{mt}$ ; - - -  $\sigma_{mc}$

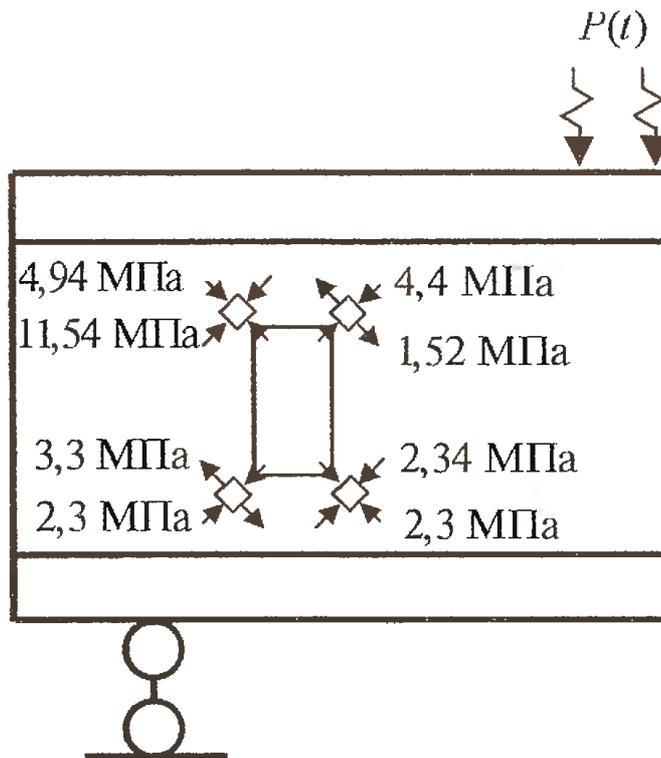


Рис. 4.12. Величины главных напряжений ,  $t=4,5$  мс [5]

жения составили 2,3 МПа, что близко к временному динамическому сопротивлению на растяжение для данного класса бетона. В этом же месте и появились первые трещины.

На следующем этапе деформирования наблюдалось развитие трещинообразования по критическому направлению, формируясь в критическую трещину. В верхней, ближней к опоре, угловой зоне проема, перед появлением трещины наблюдалась значительная концентрация сжимающих напряжений. Сжимающие напряжения по направлению наклонной сжатой полосы, огибающей верхний угол проема, перед появлением трещин в конструкции были равными 11,54 МПа, что составляет треть от динамической призмной прочности бетона. В предельной стадии сопротивления конструкции наблюдалось раздавливание бетона в этой зоне (рис. 4.13).

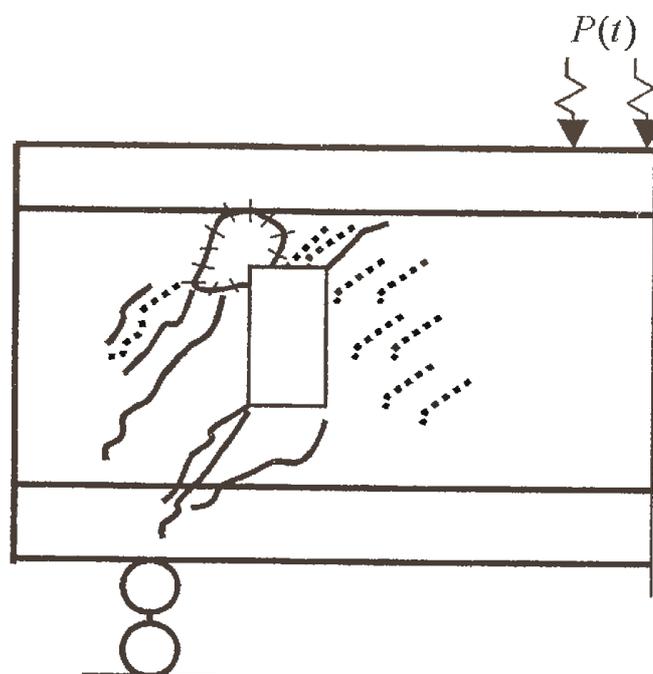


Рис. 4.13. Предельное состояние конструкции [5]:

— опыт;  
 ..... теория

Развитие касательных напряжений перед появлением трещин ( $t=4,0$  мс) и при появлении трещин ( $t=7,5$  мс) на плоскости срединной поверхности показано на рис. 4.14.

Распределение касательных напряжений показывает, что по высоте стенки они имеют колебательный характер вследствие нестационарного нагружения, особенно это проявляется в средней части пролета среза. До момента появления первых трещин значения касательных напряжений составили  $0,2-5,0$  МПа (штриховая линия на рис. 4.14). На стадии появления значительных неупругих деформаций ( $t=7,5$  мс) касательные напряжения в отдельных сечениях достигали величины  $9,0$  МПа. При этом их наибольшие значения возникли на участках сопряжения с верхней массивной полкой конструкции, а также в стенке под проемом.

Развитие деформаций арматуры, установленное в опыте, удовлетворительно согласуется с теоретическим расчетом. При пересечении трещиной арматуры наблюдался ин-

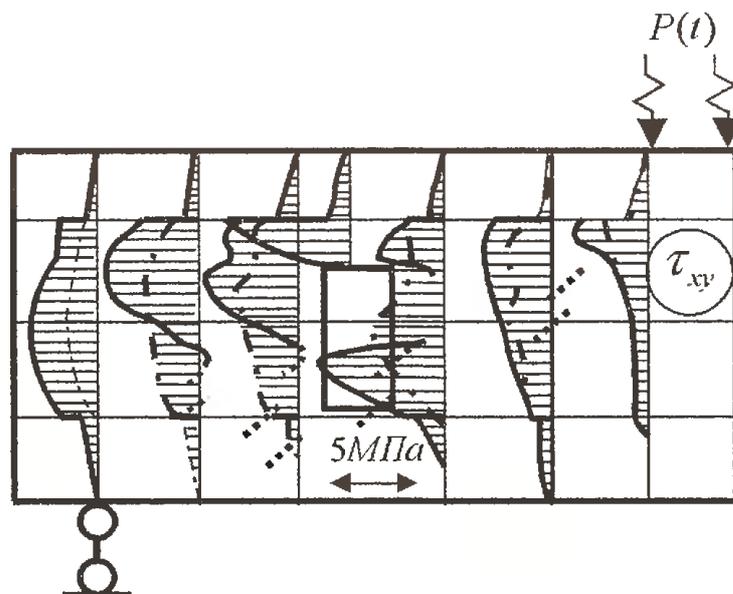


Рис. 4.14. Распределение касательных напряжений в стадии упруго-пластических деформаций железобетона:

— · —  $t=4,0$  мс; —  $t=7,5$  мс; ······ трещины

тенсивный рост деформаций стали без перераспределения усилий на соседние участки. Картина деформаций арматуры хорошо согласуется с результатами расчета, где пересечение трещиной арматуры приводило к интенсивному развитию деформаций хомутов, значения которых превысили физический предел текучести стали.

Проведенные расчеты показали, что развитие неупругих деформаций железобетона в значительной степени влияет на распределение деформаций в бетоне и арматуре. Выполненные по предложенной методике расчеты удовлетворительно описывают напряженно-деформированное состояние конструкций на различных стадиях деформирования с учетом образования и развития трещин в бетоне.

#### 4.5.6. Расчет модели защитной оболочки АЭС на действие воздушной ударной волны

Метод использован в расчетах составной оболочки вращения на действие ВУВ. Расчетная схема представлена треугольными плоскими КЭ (рис. 4.15).

Изменение нагрузки от действия ударной волны во времени принято по треугольному закону.

Распределение нагрузки по поверхности оболочки во

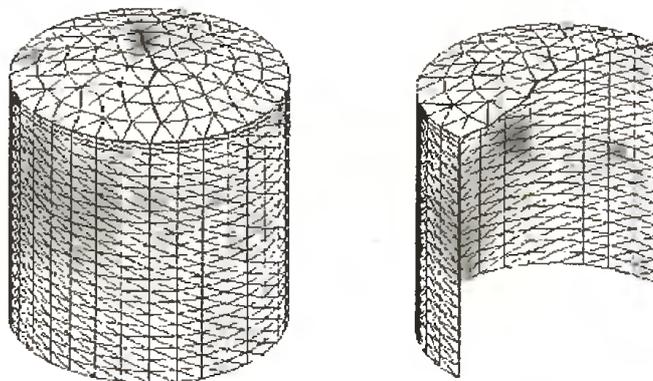


Рис. 4.15. Расчетная схема составной оболочки вращения в программной системе COMPASS [1]

времени показано на рис. 4.16 (цв. вклейка). По мере продвижения ударной волны схема нагрузки изменяется. Сочетания схем, описывающих взрывное воздействие, даны в табл. 4.4.

Таблица 4.4. Сочетания нагрузок во времени

Время, мс	Коэффициенты сочетаний для отдельных схем				
	Схема 1	Схема 2	Схема 3	Схема 4	Схема 5
0,5	1,0	-	-	-	-
1,0	1,0	1,0	-	-	-
1,5	1,0	1,0	1,0	-	-
2,0	1,0	1,0	1,0	1,0	-
2,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Схема нагрузки получена по результатам экспериментов и изменялась с продвижением ВУВ. Давление на фронте составило 51 кПа. Результаты расчетов представлены деформированными схемами (рис. 4.17, цв. вклейка) и диаграммами перемещений (рис. 4.18, цв. вклейка), на которых видны изменения форм оболочки в процессе нагружения, включающие локальные деформации и общие формы движения.

Номера диаграмм (П1, П2, П3, П4) на рис. 4.18 (цв. вклейка) соответствуют номерам преобразователей перемещений, обозначенных на экспериментальных схемах (гл. 1.3). Номера кривых соответствуют: 1 – направлению по оси X, 2 – по оси Y, 3 – по оси Z.

Внутренние усилия показаны в виде изополей касательных сил, действующих в плоскости срединной поверхности оболочки на рис. 4.19 (цв. вклейка). Определены также изгибающие моменты (рис. 4.20, цв. вклейка) и поперечные силы (рис. 4.21, цв. вклейка).

Сопоставление результатов упругих расчетов с экспери-

ментальными данными показало хорошее совпадение. По перемещениям разница составила 4,3 и 9%, по деформациям – до 12%.

#### 4.5.7. Расчет модели энергоблока АЭС на действие воздушной ударной волны

Расчетная схема модели реакторного отделения была составлена с учетом проведенных экспериментов (рис. 4.22). Пространственная конструкция составлена из треугольных КЭ. Схемы нагрузки на поверхностях модели составлены по данным экспериментов и выполнены в соответствии с продвижением воздушной ударной волны (рис. 4.23, 4.24, цв. вклейка).

Результаты расчетов представлены в виде деформированных схем, показанных на рис. 4.25 (цв. вклейка), и диаграмм перемещений, отражающих последовательность движений характерных узлов расчетной схемы (рис. 4.26, цв. вклейка).

При построении диаграмм перемещений выбраны характерные узлы расчетной схемы. Узел 3740 находится на верхнем обресе фронтальной стены обстройки, узел 1836 – на верхнем обресе боковой стены обстройки, узел 5451 –

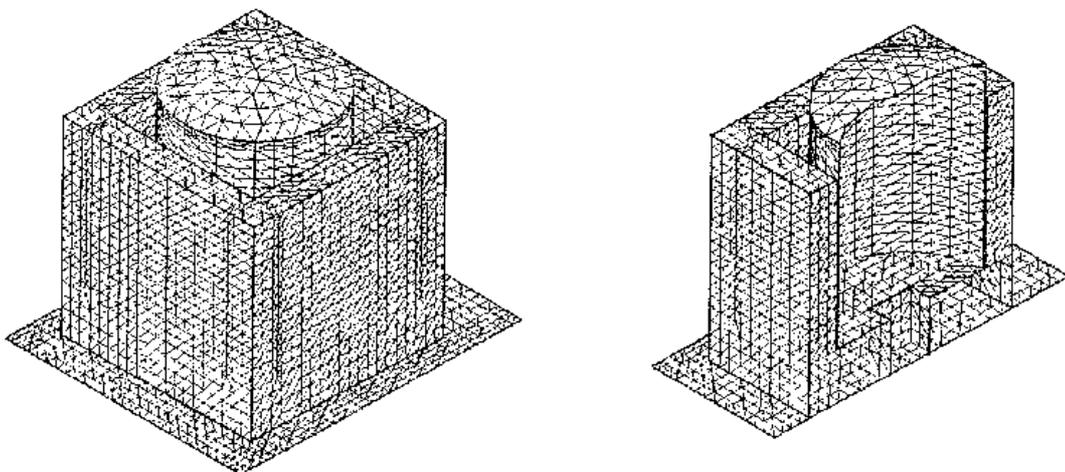


Рис. 4.22. Расчетная схема модели энергоблока в программной системе COMPASS [1]

Таблица 4.5. Сочетания нагрузок в различные моменты времени

Время, с	Коэффициенты сочетаний для отдельных загружений				
	Схема 1	Схема 2	Схема 3	Схема 4	Схема 5
0,00	1,0	-	-	-	-
1,23	0,8482	1,0	-	-	-
2,45	0,7357	0,9048	1,0	-	-
3,68	0,6518	0,7619	0,8553	1,0	-
4,91	0,8214	0,8762	0,6842	0,9091	1,0

по месту сопряжения купола и цилиндра составной оболочки вращения.

Анализ внутренних усилий в конструкциях модели проведен по картинам изополей касательных сил, показанных на рис. 4.27 (цв. вклейка), а также поперечных сил и моментов, которые соответствуют формам движения и разрушений, полученных в экспериментах.

Результаты расчетов хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований.

Экспериментально полученные картины деформаций внешней поверхности обстройки и соответствующие им диаграммы перемещений при  $\Delta P_{\phi} = 51$  кПа показаны на рис. 4.28 а. Здесь же (рис. 4.28 б) приведены диаграммы перемещений, полученные в опытах (обозначены сплошными линиями) и по результатам расчетов (обозначены пунктиром).

Сопоставление экспериментальных форм движения (рис. 4.28 а) с расчетными деформированными схемами, показанными на рис. 4.25 (цв. вклейка), свидетельствует об их удовлетворительной согласованности. Это подтверждается также и результатами сравнения диаграмм перемещений с данными расчета. Сопоставление результатов эксперимента с результатами расчетов проведено также по величинам деформаций. В фиксированные моменты времени

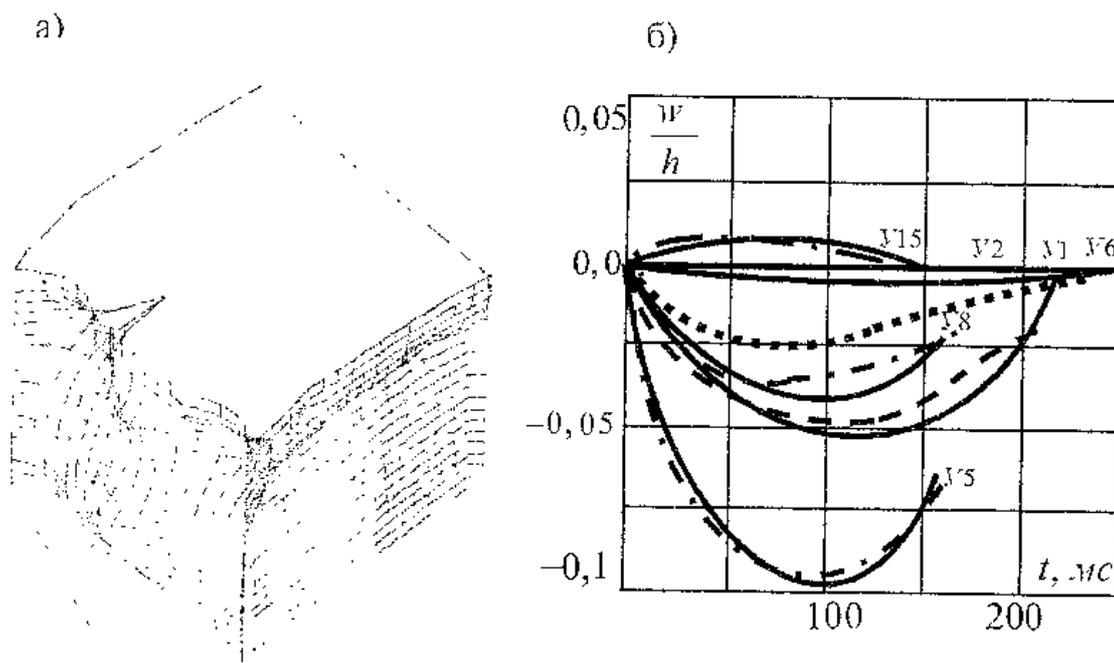


Рис. 4.28. Сравнение результатов экспериментов и расчетов при  $\Delta P_{\phi} = 51$  кПа: а) экспериментальная деформированная схема обстройки; б) диаграммы перемещений

сравнивались величины деформаций, снятые с экспериментальной диаграммы, с деформациями, полученными путем деления расчетной величины продольной силы (рис. 4.27, цв. вклейка) на площадь сечения и модуль упругости бетона. Разница значений не превысила 12%.

Расхождения значений между расчетными и экспериментальными перемещениями для упругой работы находятся в пределах 9%.

## ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 4

1. *Бездев В.В., Буклемишев А.В.* Программная система COMPASS. – Иркутск: ИГТУ, 2000. – 112 с.
2. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 444 с.

3. *Ден-Гартог Дж.П.* Теория колебаний. — М.-Л.: ОГИЗ, ГОСТЕХИЗДАТ, 1942. — 464 с.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 544 с.
5. *Кумняк О.Г., Копаница Д.Г.* Динамика защитной оболочки реакторного отделения АЭС при действии ударной волны внешнего взрыва // Вестник ТГАСУ. — 1999. — №1. — С. 109–120.
6. *Новое о прочности железобетона* / Под ред. К.В. Михайлова. — М.: Стройиздат, 1977. — 272 с.
7. *Попов Н.Н., Кумняк О.Г., Плевков В.С.* Вопросы динамического расчета железобетонных конструкций. — Томск: Изд-во ТГУ, 1990. — 288 с.
8. *Попов Н.Н., Расторгуев Б.С., Кумняк О.Г.* Расчет железобетонных элементов на кратковременные динамические нагрузки с учетом реальных свойств материалов // Строительная механика и расчет сооружений. — 1979. — №3. — С. 7–11.
9. *Программный комплекс «Мираж 4.3»*. — К.: НИИАСС Госкомградостроительства Украины, 1996.
10. *Расторгуев Б.С.* Упрощенная методика получения диаграмм деформирования стержневых элементов в стадии с трещинами // Бетон и железобетон. — 1993. — №5. — С. 22–24.
11. *Сахновский К.В.* Железобетонные конструкции. — М.: Госстройиздат, 1950. — 839 с.
12. *Свойский Ф.М.* Несовместные конечные элементы для расчета листовых пространственных конструкций. Прикладные проблемы прочности и пластичности. — Горький, 1986. — С. 59–70.
13. *Смолянин А.Г.* Математическое моделирование динамического разрушения балок и оболочек из железобетона при ударе: Дис. ... канд. техн. наук. — М., 1985. — 129 с.

14. *СНиП 2.03.01-84\**. Бетонные и железобетонные конструкции / Минстрой России. – М.: ГП ЦНП, 1992. – 76 с.
15. *Хечумов Р.А., Кенплер Х., Прокопьев В.И.* Применение метода конечных элементов к расчету конструкций. – М.: Изд-во АСВ, 1994. – 351 с.
16. *Clough R.W.* The finite element method in structural mechanics. Chapter 7 of Stress Analysis Wiley. – 1965. – P. 91.
17. *Dilger W.H., Koch R. and Kowalczyk R.* Ductility of Plain and Confined under Different Strain Rates // J. of the Amer. Concrete Ins. – 1984. – Vol. 81. – No. 1. – P. 73–81.
18. *Newmark N.M.* Method of Computation for Structural Dynamic // ASSE, Journal of Engineering Mechanics Division. – 1959. – Vol. 85. – P. 67–94.
19. *Sisodija R.G., Cheung Y.K. and Ghalla.* New finite elements with applications to box girder bridges // Proc. Of the Institution of Civil Engineers (London). Supplement Paper №74795. – 1972. – P. 207–225.

## ГЛАВА 5

# РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ БЕТОННЫХ И ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С МОДЕЛЬНЫМИ СНАРЯДАМИ

### Введение

Исследования явлений, возникающих при высокоскоростном ударе и взрыве, экспериментальными методами без глубокого теоретического анализа часто не дают необходимого результата, несмотря на большие материальные и технические затраты. Инженерные методы также не отвечают в полной мере запросам практики ввиду ограниченности сферы их применения.

Широкое применение математических методов на базе современных ЭВМ привело к появлению нового эффективного метода исследований сложных физических процессов — вычислительного эксперимента, который в наиболее развитой форме включает в себя следующие этапы:

- формализацию исследуемого явления, выделение наиболее существенных его сторон, что приводит к определенной физической и математической модели;
- разработку численного метода, реализующего математическую модель;
- программирование и формальную отладку программы;
- проведение многовариантных расчетов и обработку их результатов;
- сравнение результатов расчета с данными физических

(натурных или лабораторных) экспериментов и других теоретических исследований.

В дальнейшем, если это необходимо, производится уточнение физической и математической модели, модифицирование численного метода, усовершенствование программы, и соответствующие этапы вычислительного эксперимента повторяются вновь.

Основная трудоемкость при компьютерном моделировании высокоскоростного удара состоит в построении системы определяющих уравнений, адекватно описывающих поведение среды в широком диапазоне изменения физических параметров — деформаций, напряжений, скоростей деформаций, температур. В полной теории удара необходимо учитывать пластическое течение и упругое деформирование, плавление и затвердевание, испарение и конденсацию, кинетику фазовых переходов и химические превращения, изменения микроструктуры материала в процессе разрушения и обратное влияние структурных изменений на физико-механические характеристики и напряженно-деформированное состояние соударяющихся тел. Теоретических моделей, в полной мере учитывающих все указанные факторы, в настоящее время нет. Объясняется это, однако, не ограниченными возможностями математического моделирования, а большой неопределенностью наших знаний о реальных свойствах материалов (термодинамических, прочностных, реологических), не позволяющих корректно формулировать такие модели. На практике используют разнообразные модели, в той или иной степени учитывающие перечисленные выше физические процессы.

Несмотря на то, что в настоящее время посвящено довольно много работ математическому моделированию процессов удара твердых тел по различным мишеням (монолитным, многослойным, разнесенным и т.д.), выполненным из металлов, керамики, композиционных материалов

[1–4], вопрос о расчете пробивания твердыми телами железобетонных плит остается открытым.

В отечественной литературе очень мало работ посвящено исследованию влияния арматуры на результаты ударного взаимодействия тел с бетонными преградами. В [5] содержатся данные экспериментальных и теоретических исследований, направленных на создание физико-математической модели железобетона, которая может быть использована при решении прикладных задач ударно-проникающего взаимодействия. Эксперименты проводились с телами цилиндрической формы с оживальной головной частью. Диаметр используемых тел варьировался в диапазоне 24–115 мм. Скорость взаимодействия тел с преградами изменялась в диапазоне 100–650 м/с, а угол встречи —  $0^{\circ}$ – $40^{\circ}$  (от нормали к поверхности преграды). Преграды представляли собой бетонные и железобетонные плиты толщиной от 24 до 400 мм. На основании проведенных экспериментальных исследований установлено, что отсутствие армирования слабо влияет на характер местного разрушения преграды (размер и форму отверстия). Однако, при этом имеют место общие разрушения преграды (в виде трещин, выходящих на боковые поверхности плит), так как отсутствует армирующая сетка, препятствующая растрескиванию всей конструкции преграды. Обмеры профилей каверн, как в случае с армированием, так и без него, также не показывают различий в характере местных разрушений бетонных и железобетонных преград. Во всех случаях образуются откольные воронки с лицевой и тыльной сторон. Диаметр воронки на лицевой поверхности преграды составляет в среднем 4–6 диаметров ударника, а на тыльной поверхности 6–8 диаметров. Поверхность откола представляет собой искаженную коническую поверхность, которая выходит на свободную поверхность преграды под углом  $30$ – $45^{\circ}$ .

Проведенные экспериментальные исследования пока-

зали, что армирование бетонной преграды улучшает ее несущую способность, препятствуя общим разрушениям, но не оказывает заметного влияния на характер местного разрушения. В работе представлены результаты расчета взаимодействия жесткого индентора с бетонными плитами. Решение задачи проведено в двумерной осесимметричной постановке численным методом М.Л. Уилкинса [6]. Использовался феноменологический подход к проблеме динамического разрушения бетона. Сделана оценка влияния армирования бетона на характер взаимодействия тела с преградой. Арматура моделировалась ячейками, жестко закрепленными в начальном положении. Положение «замороженных» ячеек определялось конструкцией и расположением в преграде армирующих сеток. Размер этих ячеек подбирался из условия равенства площади сечения арматуры и площади ячеек. Такой подход завышает влияние арматуры из-за допущения об абсолютной ее жесткости и не позволяет правильно копировать конструкцию сеток. Однако он позволяет приблизительно определить степень влияния армирования при проникании в отдельный фрагмент сетки.

В результате проведенных исследований было показано, что расположение армирующей сетки около свободной поверхности несколько увеличивает сопротивление преграды прониканию. Однако эффективность применения армирования невелика (даже по результатам оценок, завышающих ее влияние), а с увеличением глубины заложения армирования сетки эта эффективность снижается еще больше. В работе на основе экспериментальных и теоретических исследований делается вывод, что ожидать значительного влияния армирования бетона на процесс проникания тел в типовые железобетонные преграды не приходится.

В [7] представлено краткое описание методики расчета деформирования железобетонных конструкций с учетом упругопластического деформирования арматуры и анизо-

тропии прочностных свойств бетона. Методика реализована в рамках программного комплекса DANCO [8].

Программный комплекс DANCO предназначен для решения в трехмерной постановке задач нестационарного деформирования сложных пространственных конструкций, состоящих из ветвящихся оболочечных элементов, стержневых элементов и недеформируемых твердых тел, при контактном взаимодействии оболочечных и стержневых элементов между собой и твердыми телами. Составной частью программного комплекса DANCO является блок деформирования железобетонных элементов. С целью проверки корректности модели железобетона, реализуемой в рамках программного комплекса DANCO, в РФЯЦ – ВНИИЭФ проведены специальные эксперименты и выполнено сравнение результатов расчета с результатами экспериментов. В качестве опытных образцов использовались стандартные железобетонные изделия (прямой брус, прямоугольная плита). При изготовлении образцов использовался легкий бетон М200 и стальная горячекатаная арматура.

Проведены следующие эксперименты:

- изгиб железобетонного бруса при динамическом нагружении;
- железобетонная прямоугольная плита под действием импульсной нагрузки.

Сравнение представленных результатов расчетов с экспериментальными данными показывает их хорошее согласие, что свидетельствует о корректности предлагаемой методики расчета железобетонных конструкций. Однако этот комплекс не может быть использован для решения задач удара.

В данном разделе предлагается методика, позволяющая рассчитывать в полной трехмерной постановке ударное взаимодействие твердых деформируемых тел с конструкциями, содержащими слои бетона и железобетона.

В нем излагается математическая модель динамики деформирования твердого тела с учетом разрушения. Различают динамическое разрушение пластичных и хрупких материалов. Отрывное разрушение пластичных материалов рассматривают как процесс роста и слияния пор в пластически деформированном материале. Локальным критерием отрывного разрушения при таком подходе является критическая величина относительного объема пустот. Локальным критерием сдвигового разрушения – предельная величина удельной работы пластических деформаций. При выполнении критерия разрушения материал моделируется некоторой сыпучей средой, работающей на сжатие и сдвиг, но не выдерживающей растягивающих напряжений. Использовано два подхода к проблеме хрупкого разрушения:

- феноменологический, когда критерии прочности выражают в виде инвариантных связей критических значений макрохарактеристик процессов деформирования – напряжений и деформаций;
- подход, основанный на разработке физико-математической модели, описывающей деформирование и разрушение хрупких материалов в условиях удара и взрыва.

При феноменологическом подходе постоянные, определяемые через пределы прочности материала при растяжении, сжатии и сдвиге, уточняются путем привязки к экспериментальным данным по динамическому нагружению. В рамках феноменологического подхода проведен расчет ударного взаимодействия цилиндрического ударника с прямоугольной бетонной плитой. Проведено сравнение результатов вычислительного эксперимента с данными поставленного специально эксперимента.

Второй подход реализован при расчете деформирования и разрушения высокопрочных керамик в условиях высокопрочного удара.

Кроме того, излагается физико-математическая модель

поведения песчаного грунта в условиях удара и взрыва. Представлены результаты математического моделирования динамики соударения модельного снаряда с конструкциями из прямоугольных бетонных плит и песчаного грунта и результаты математического моделирования процессов ударного взаимодействия стального цилиндрического ударника с железобетонной стеной обстройки реакторного отделения АЭС.

## 5.1. Математическая модель динамики деформируемого твердого тела

### 5.1.1. Универсальные уравнения механики сплошной среды

Универсальными уравнениями, описывающими любые движения всех сплошных сред, являются уравнения неразрывности, импульсов, моментов и энергии. В настоящей работе из рассмотрения исключаются полярные среды, поэтому из уравнения моментов следует симметрия тензора напряжений Коши [9]:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^T .$$

Предполагается, что отсутствуют массовые силы, подвод тепла и приток нетепловых видов энергии, отличных от работы механических сил [2].

При этих предположениях уравнения неразрывности, импульсов и энергии для материального объема  $V$  сплошной среды, ограниченного поверхностью  $\Sigma$ , записываются в виде [9]:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{u} dV = \int_{\Sigma} \bar{n} \cdot \hat{\sigma} dS, \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{\bar{u} \cdot \bar{u}}{2} + \varepsilon \right) dV = \int_{\Sigma} \bar{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot \bar{u} dS,$$

где  $t$  — время;  $\rho$  — плотность;  $\bar{u}$  — вектор скорости;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $\bar{n}$  — единичный вектор внешней нормали к площадке.

При рассмотрении деформации элемента среды удобно выделить компоненты напряжений, связанные с изменением его объема и формы, то есть представить тензор напряжений в виде суммы шаровой и девиаторной частей [10,11]:

$$\hat{\sigma} = -p\hat{g} + \hat{s}.$$

Аналогично вводится девиаторная часть тензора скоростей деформаций:

$$\hat{e} = \hat{d} - \frac{1}{3}(\hat{d} : \hat{g})\hat{g}.$$

В приведенных выше соотношениях  $p = -\frac{1}{3}\hat{\sigma} : \hat{g}$  — давление;  $\hat{g}$  — метрический тензор;  $\hat{s}$  — девиатор тензора напряжений;  $\hat{e}$  — девиатор тензора скоростей деформаций;  $\hat{d} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^T)$  — тензор скоростей деформаций.

Указанные скалярные, векторные и тензорные величины являются функциями пространственных координат  $\bar{y}$  и времени  $t$ .

Система уравнений (5.1) замыкается с помощью определяющих соотношений, которые учитывают физические свойства конкретной среды.

### 5.1.2. Определяющие соотношения теории пластического течения

При построении модели пластического тела принимается ряд предположений [11, 12], основу для которых дают обширные экспериментальные исследования.

В сложном напряженном состоянии переход материала в пластическое состояние определяется условием, представляющим в пространстве напряжений гладкую и выпуклую поверхность, уравнение которой для идеально пластических тел можно записать в виде:

$$F(\hat{\sigma}) = 0,$$

где  $F$  — четная функция относительно компонент тензора напряжений, которая выбрана так, что условие  $F < 0$  определяет упругое состояние, а  $F = 0$  — состояние пластического течения.

Для изотропного материала имеет место:

$$F(I_1, J_2, J_3) = 0,$$

где  $I_1 = \hat{\sigma} : \hat{g}$  — первый инвариант тензора напряжений;

$J_2 = \frac{1}{2} \hat{s}^2 : \hat{g}$  — второй инвариант девиатора тензора напряжений;

$J_3 = \frac{1}{3} \hat{s}^3 : \hat{g}$  — третий инвариант девиатора тензора напряжений.

Предполагается, что тензор скоростей деформаций может быть представлен в виде суммы упругой  $\hat{d}^e$  и пластической  $\hat{d}^p$  составляющих:

$$\hat{d} = \hat{d}^e + \hat{d}^p.$$

В качестве основного принципа, положенного в основу построения теории пластичности, принимается принцип минимума работы истинных напряжений на приращениях

пластических деформаций [12]. Тогда для определения пластической составляющей тензора скоростей деформаций в процессе пластического нагружения ( $F=0$ ,  $dF=0$ ) получится следующее дифференциальное соотношение:

$$\hat{d}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \hat{\sigma}},$$

где  $\lambda$  – некоторая положительная скалярная величина. Она равна нулю в упругой области ( $F < 0$ ) и при упругой разгрузке из пластического состояния ( $F=0$ ,  $dF=0$ ).

Учитывая, что:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \hat{\sigma}} = \hat{g}, \quad \frac{\partial J_2}{\partial \hat{\sigma}} = \hat{s}, \quad \frac{\partial J_3}{\partial \hat{\sigma}} = \hat{s} \cdot \hat{s} - \frac{2}{3} J_2 \hat{g},$$

получим:

$$\hat{d}^p = \lambda \left[ \frac{\partial F}{\partial I_1} \hat{g} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \hat{s} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \left( \hat{s} \cdot \hat{s} - \frac{2}{3} J_2 \hat{g} \right) \right].$$

Для описания упругой составляющей девиатора тензора скоростей деформаций  $\hat{e}^e = \hat{e} - \hat{e}^p$  используется зависимость [13]:

$$\hat{e}^e = \frac{\hat{s}^J}{2\mu},$$

где  $\mu$  – модуль сдвига;  $\hat{e}^p = \hat{d}^p - \frac{1}{3} (\hat{d}^p : \hat{g}) \hat{g}$  – пластическая составляющая девиатора тензора скоростей деформаций;

$\hat{s}^J = \frac{d\hat{s}}{dt} + \hat{s} \cdot \hat{w} - \hat{w} \cdot \hat{s}$  – коротационная производная девиатора

тензора напряжений в смысле Яуманна – Нолла [14], удовлетворяющая принципу материальной объективности;

$\hat{w} = \frac{1}{2} (\nabla \bar{u}^T - \nabla \bar{u})$  – тензор вихря.

Выделяя девиаторную часть тензора  $\hat{d}^p$ , находим иско-  
мое определяющее уравнение:

$$\hat{e} = \frac{\hat{s}^J}{2\mu} + \lambda \left[ \frac{\partial F}{\partial J_2} \hat{s} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \left( \hat{s} \cdot \hat{s} - \frac{2}{3} J_2 \hat{g} \right) \right].$$

Задание функции  $F(I_1, J_2, J_3)$  позволяет сформулировать  
конкретный вид определяющих соотношений. Принимая,  
в частности, условие текучести Мизеса–Шлейхера:

$$F = J_2 - f(p) = 0,$$

где  $f$  – неубывающая функция своего аргумента  $p = -\frac{1}{3} I_1$ ,  
получаем [15]:

$$2\mu \left[ \hat{d} - \frac{1}{3} (\hat{d} : \hat{g}) \hat{g} \right] = \hat{s}^J + \lambda_1 \hat{s}, \quad (5.2)$$

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{2\mu \hat{s} : \hat{e} - f'(p) \frac{dp}{dt}}{2f(p)} & \text{при } J_2 = f(p), \quad 2\mu \hat{s} : \hat{e} > f'(p) \frac{dp}{dt} \\ 0 & \text{при } J_2 < f(p) \text{ или } J_2 = f(p), \quad 2\mu \hat{s} : \hat{e} \leq f'(p) \frac{dp}{dt}. \end{cases}$$

Для ряда практически важных материалов (например,  
металлов, некоторых пластмасс) в условиях динамических  
нагрузок можно принять:

$$f = \frac{1}{3} \sigma_s^2,$$

для сыпучих сплошных сред (например, грунтов) обычно  
полагают:

$$f = \frac{1}{3} (Y_0 + kp)^2,$$

здесь  $\sigma_s$  — предел текучести при простом растяжении в условии текучести Губера–Мизеса;  $Y_0, k$  — коэффициенты сцепления и трения в условии текучести Кулона.

### 5.1.3. Уплотнение пористых сред в ударных волнах

Неоднородная пористая среда рассматривается как двухкомпонентный композиционный материал, состоящий из твердой фазы — матрицы, и включений — пор. Относительно геометрических характеристик пор предполагается, что их форма близка к сферической, а функция распределения по размерам такова, что они описываются некоторым общим для всего ансамбля пор характерным размером.

Считается, что материал матрицы однороден и изотропен, а поры распределены в нем равномерно по всем направлениям.

Таким образом, внутренняя структура пористого материала определяется относительным объемным содержанием пор и их характерным размером.

Удельный объем пористой среды  $v$  представляется в виде суммы удельного объема пор  $v_p$  и удельного объема матрицы  $v_m$ :

$$v = v_p + v_m.$$

Пористость материала характеризуется объемом пустот в единице объема:

$$\xi = \frac{v_p}{v},$$

либо параметром:

$$\alpha = \frac{v}{v_m},$$

которые связаны очевидными зависимостями:

$$\alpha = \frac{1}{1-\xi}, \quad \xi = 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

При описании механического поведения микронесоднородной пористой среды будем моделировать ее некоторой эквивалентной, макроскопически однородной средой. В этом случае необходимо определить уравнение состояния эквивалентной однородной среды и ее эффективные упругие и прочностные характеристики, учитывающие свойства матричного материала, геометрические параметры пор и их взаимодействие между собой.

Эффективные значения физических характеристик входят в определяющие соотношения (5.2) и связывают осредненные по материалу поля, образованные полевыми тензорами пористой среды. При вычислении эффективного модуля сдвига и предела текучести используются известные точные и приближенные решения для ряда частных моделей композиционных материалов со сферическими включениями [16, 17], а также различные эмпирические зависимости [18]. Например, согласно [19]:

$$\mu(\alpha) = \frac{\mu_m}{\alpha} \left( 1 - \frac{6c_0^2 \rho_0 + 12\mu_m}{9c_0^2 \rho_0 + 8\mu_m} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right), \quad (5.3)$$

$$\sigma_s(\alpha) = \frac{\sigma_{sm}}{\alpha},$$

где  $\mu_m$ ,  $\sigma_{sm}$ ,  $\rho_0$  — модуль сдвига, предел текучести, начальная плотность материала матрицы соответственно;  $c_0$  — объемная скорость звука в невозмущенном материале матрицы.

Термодинамическое уравнение состояния пористого материала зависит от  $\alpha$ . Если известно уравнение состояния матричного материала, то уравнение состояния пористой среды получается на основе  $p$ - $\alpha$ -модели [20]. Суть данной модели состоит в том, что если пренебречь поверхностной энергией пор и давлением содержащегося в них

газа, то уравнение состояния пористого материала имеет тот же вид, что и для материала матрицы, а давление в пористом материале  $p$  и давление в материале матрицы  $p_m$  связаны соотношением:

$$p = \frac{p_m}{\alpha}.$$

Таким образом, если уравнением состояния матричного материала является:

$$p_m = p_m(\rho_m, \varepsilon),$$

то уравнение состояния этого материала, содержащего поры, будет иметь вид:

$$p = \frac{p_m(\alpha\rho, \varepsilon)}{\alpha}, \quad (5.4)$$

где  $\rho = \frac{\rho_m}{\alpha}$  — плотность пористого материала;  $\rho_m$  — плотность материала матрицы.

В зависимостях (5.3), (5.4) появляется дополнительный структурный параметр  $\alpha$ , поэтому для полного математического описания процесса уплотнения пористой среды необходимо ввести кинетическое уравнение, описывающее его эволюцию. При выводе этого уравнения привлекаются модельные построения [21], основанные на предположении, что поведение исходной среды с пористостью  $\alpha_0$  и характерным размером пор  $a_0$  при динамическом нагружении аналогично поведению отдельной сферической частицы радиуса  $b_0$  из матричного материала, в центре которой находится сферическая пора радиуса  $a_0$ . Причем внешний радиус полый сферической частицы  $b_0$  выбирается таким образом, что отношение общего объема частицы с порой к объему матричного материала равно  $\alpha_0$ . Предполагая, что материал матрицы несжимаем и описывается упруго-идеальнопластической моделью с условием текучести Гу-

бера–Мизеса, можно получить дифференциальное уравнение второго порядка, определяющее изменение пористости при динамическом сжатии:

$$\tau_1^2 \sigma_{sm} Q_1 \left( \alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) = \alpha p - p_c(\alpha) \quad \text{при} \quad p > \frac{p_c(\alpha)}{\alpha}, \quad (5.5)$$

$$p_c(\alpha) = \begin{cases} \frac{4\mu_m(\alpha_0 - \alpha)}{3\alpha(\alpha - 1)} & \text{при} \quad \alpha_0 \geq \alpha > \alpha_1 \\ \frac{2}{3}\sigma_{sm} \left\{ 1 - \frac{2\mu_m(\alpha_0 - \alpha)}{\sigma_{sm}\alpha} + \ln \left[ \frac{2\mu_m(\alpha_0 - \alpha)}{\sigma_{sm}(\alpha - 1)} \right] \right\} & \text{при} \quad \alpha_1 \geq \alpha > \alpha_2, \\ \frac{2}{3}\sigma_{sm} \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} & \text{при} \quad \alpha_2 \geq \alpha \geq \alpha_{00} > 1, \end{cases}$$

$$Q_1 \left( \alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) = -\frac{d^2\alpha}{dt^2} \left[ (\alpha - 1)^{-1/3} - \alpha^{-1/3} \right] + \\ + \frac{1}{6} \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \left[ (\alpha - 1)^{-4/3} - \alpha^{-4/3} \right],$$

$$\tau_1^2 = \frac{\rho_0 \alpha_0^2}{3\sigma_{sm}(\alpha_0 - 1)^{2/3}}, \quad \alpha_1 = \frac{2\mu_m \alpha_0 + \sigma_{sm}}{2\mu_m + \sigma_{sm}}, \quad \alpha_2 = \frac{2\mu_m \alpha_0}{2\mu_m + \sigma_{sm}},$$

где  $\alpha_{00}$  – остаточная пористость.

В процессе схлопывания поры выделяются три стадии. Сначала весь окружающий пору материал деформируется упруго, затем при  $\alpha = \alpha_1$  начинается пластическое течение прилегающего к полости материала, и при  $\alpha = \alpha_2$  весь окружающий пору материал переходит в пластическое состояние.

При условии  $\sigma_{sm} \ll \mu_m$  изменение пористости в течение первых двух фаз незначительно, что имеет место практически для всех материалов. Если считать, что пористость сохраняет постоянное значение до тех пор, пока весь окружающий пору материал не перейдет в пластическое состояние, то уравнение (5.5) упрощается и принимает вид:

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0 \text{ при } p \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_{sm}}{\alpha} \ln \frac{\alpha}{\alpha-1},$$

$$\tau_1^2 \sigma_{sm} Q_1 \left( \alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) = \alpha p - \frac{2}{3} \sigma_{sm} \ln \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$\text{при } p > \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_{sm}}{\alpha} \ln \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

При расчете ударно-волнового уплотнения сыпучей пористой среды реальный материал, представленный твердыми частицами, между которыми действуют силы сухого трения, и пустотными промежутками, моделируется сферической частицей радиуса  $b_0$  из матричного материала, удовлетворяющего условию текучести Кулона, в центре которой находится сферическая пора радиуса  $a_0$ . Тогда из решения задачи о деформировании одиночной поры под действием изотропного напряжения можно получить кинетическое уравнение, описывающее изменение пористости в сыпучем материале. При пренебрежении упругой и упруго-пластической стадиями затекания поры рассматривается процесс, когда весь материал вокруг нее находится в пластическом состоянии.

Вводится сферическая система координат  $(r, \Theta, \varphi)$  с центром в полости, текущий радиус которой обозначен через  $a$ . Пусть на расстоянии  $b$  от центра полости действует напряжение:

$$\sigma_r = -p_m = -\alpha p,$$

где

$$\alpha = \frac{b^3}{b^3 - a^3}, \quad \alpha_0 = \frac{b_0^3}{b_0^3 - a_0^3}. \quad (5.6)$$

Система уравнений в сферических координатах в предположении несжимаемости материала матрицы записывается следующим образом:

$$\rho_0 \frac{du_r}{dt} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\Theta}{r}, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} = 0, \quad (5.8)$$

$$\sigma_r - \sigma_\Theta = Y_0 + kp_m \equiv Y_0 - k(\sigma_r + 2\sigma_\Theta)/3. \quad (5.9)$$

Граничные условия, заданные на внешней и внутренней границах сферической частицы с порой, имеют вид:

$$\sigma_r(b, t) = -\alpha p, \quad \sigma_r(a, t) = 0.$$

Дважды интегрируя (5.8), получим:

$$u_r = \frac{dr}{dt} = \frac{C(t)}{r^2}, \quad r^3 - r_0^3 = -B(t),$$

где

$$B(t) = -3 \int_0^t C(t) dt.$$

Используя граничные точки, можно записать:

$$a^3 - a_0^3 = b^3 - b_0^3 = -B(t).$$

Отсюда и из (5.6) следует:

$$B(t) = a_0^3 \frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0 - 1}.$$

Определим функцию:

$$C(t) = -\frac{\dot{B}(t)}{3} = \frac{a_0^3}{3(\alpha_0 - 1)} \frac{d\alpha}{dt},$$

и найдем ускорение:

$$\frac{du_r}{dt} = \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\dot{C}(t)}{r^2} - 2 \frac{C^2(t)}{r^5}.$$

Тогда уравнение (5.7) с учетом (5.9) примет вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{6k\sigma_r}{(3-2k)r} = \rho_0 \left[ \frac{\dot{C}(t)}{r^2} - 2 \frac{C^2(t)}{r^5} \right] - \frac{6Y_0}{(3-2k)r}.$$

Решением этого уравнения является:

$$\sigma_r = \frac{\rho_0(3-2k)C^2(t)}{(6-k)r^4} - \frac{\rho_0(3-2k)\dot{C}(t)}{(3+4k)r} + \frac{Y_0}{k} + E(t)r^{6k/(3-2k)}.$$

Из граничного условия при  $r=a$  имеем:

$$\frac{\rho_0(3-2k)C^2(t)}{(6-k)a^4} - \frac{\rho_0(3-2k)\dot{C}(t)}{(3+4k)a} + \frac{Y_0}{k} + E(t)a^{6k/(3-2k)} = 0.$$

Отсюда:

$$E(t) = \frac{\rho_0(3-2k)\dot{C}(t)}{(3+4k)a^{(3+4k)/(3-2k)}} - \frac{\rho_0(3-2k)C^2(t)}{(6-k)a^{2(6-k)/(3-2k)}} + \frac{Y_0}{ka^{6k/(3-2k)}},$$

и

$$\sigma_r = \frac{\rho_0(3-2k)C^2(t)}{(6-k)r^4} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^{\frac{2(6-k)}{3-2k}} \right] - \frac{\rho_0(3-2k)\dot{C}(t)}{(3+4k)r} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^{\frac{3+4k}{3-2k}} \right] + \frac{Y_0}{k} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^{\frac{6k}{3-2k}} \right].$$

Удовлетворяя граничному условию при  $r=b$ , находим:

$$\frac{\rho_0(3-2k)\dot{C}(t)}{(3+4k)b} \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{3+4k}{3-2k}} \right] - \frac{\rho_0(3-2k)C^2(t)}{(6-k)b^4} \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{2(6-k)}{3-2k}} \right] = \alpha p + \frac{Y_0}{k} \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{6k}{3-2k}} \right],$$

или окончательно, учитывая, что:

$$\frac{b^3}{a^3} = \frac{\alpha}{\alpha-1}, \quad \frac{b^3}{a_0^3} = \frac{\alpha}{\alpha_0-1},$$

получим:

$$Y_0 \tau_2^2 Q_2 \left( \alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) = \alpha p + \frac{Y_0}{k} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{2k}{3-2k}} \right], \quad (5.10)$$

где

$$Q_2 \left( \alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) = \frac{3-2k}{(3+4k)\alpha^{1/3}} \frac{d^2\alpha}{dt^2} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{3+4k}{3(3-2k)}} \right] -$$

$$\frac{3-2k}{3(6-k)\alpha^{4/3}} \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{2(6-k)}{3(3-2k)}} \right],$$

$$\tau_2^2 = \frac{\rho_0 a_0^2}{3Y_0(\alpha_0 - 1)^{2/3}}.$$

Уравнение (5.10) используется для определения  $\alpha$  при условии:

$$p > \frac{Y_0}{k\alpha} \left[ \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{2k}{3-2k}} - 1 \right].$$

Предположим, что члены, содержащие  $\dot{\alpha}$  и  $\ddot{\alpha}$ , малы, тогда из (5.10) следует:

$$p = \frac{Y_0}{k\alpha} \left[ \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{2k}{3-2k}} - 1 \right]. \quad (5.11)$$

На рис.5.1 приведена в соответствии с уравнением (5.11) диаграмма нагрузки–разгрузки сыпучего материала в переменных давлении–пористость. На начальном участке 1–2 сжатие материала осуществляется без изменения  $\alpha$ , т.к. упругая и упругопластическая стадии схлопывания пор не рассматриваются. При дальнейшем увеличении давления по закону (5.11) (участок 2–3) сыпучий материал необратимо уплотняется ( $\alpha$  уменьшается). Из точки 3 материал разгружается до  $p=0$  (точка 4) при постоянной пористости. Последующее растяжение матричного материала происхо-

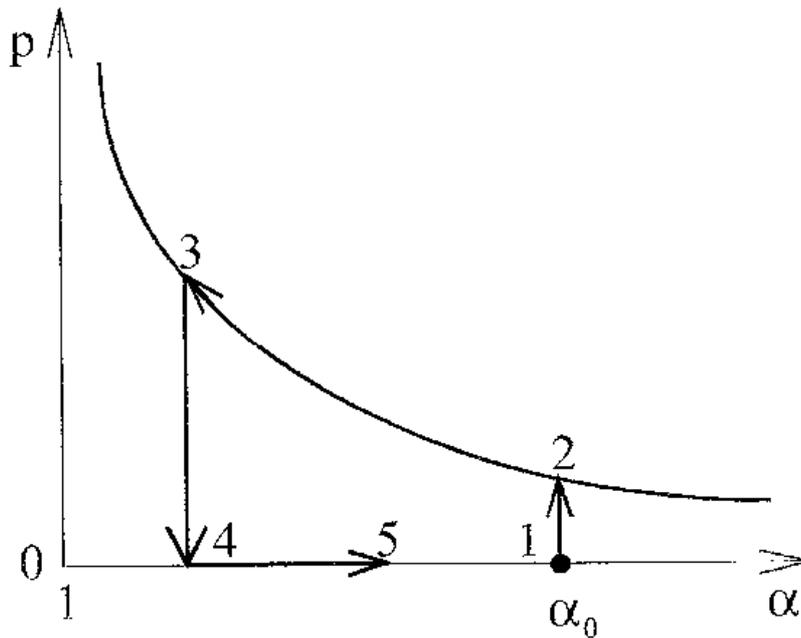


Рис. 5.1. Диаграмма нагрузки сыпучего материала в переменных давление—пористость

дит при нулевом давлении, т.к. он не выдерживает растягивающих усилий. Его объем увеличивается только за счет увеличения объема пустот, т.е.  $\alpha$ .

#### 5.1.4. Уравнения состояния

Для расчетов ударно-волновых явлений без фазовых переходов используется уравнение состояния в калорическом виде [22]:

$$p_m = p_m(\rho_m, \varepsilon).$$

Конкретный вид этого уравнения для твердых тел может быть задан в различной форме.

При построении полуэмпирических уравнений состояния традиционным является разделение давления и внутренней энергии на холодные  $p_x, \varepsilon_x$  и тепловые составляющие [22–24]. Если температура не слишком высока и электронным возбуждением можно пренебречь, уравнение состояния записывается в форме Ми–Грюнайзена:

$$p_m(\rho_m, \varepsilon) = p_x(\rho_m) + \gamma(\rho_m) \rho_m [\varepsilon - \varepsilon_x(\rho_m)].$$

Задача при этом сводится к определению кривой холодного сжатия:

$$p_x(\rho_m) = \rho_m^2 \frac{d\varepsilon_x}{d\rho_m}, \quad (5.12)$$

и коэффициента Грюнайзена  $\gamma(\rho_m)$ .

В [27] для описания поведения вещества в широком диапазоне изменения давления и температуры, охватывающем различные агрегатные состояния материала, предполагается зависимость коэффициента Грюнайзена не только от плотности, но и от внутренней энергии, а в качестве опорной кривой используется изэнтропа сжатия:

$$p_s(\rho_m) = \rho_m^2 \frac{d\varepsilon_s}{d\rho_m}.$$

Предложенное в [27] интерполяционное широкодиапазонное уравнение состояния, содержащее небольшое количество легко определяемых параметров, имеет вид:

$$p_m(\rho_m, \varepsilon) = p_s(\rho_m) + \gamma(\rho_m, \varepsilon) \rho_m [\varepsilon - \varepsilon_s(\rho_m)], \quad (5.13)$$

$$\varepsilon_s(\rho_m) = \begin{cases} \frac{3c_0^2}{\psi_1 - 4} \left\{ \frac{3}{\psi_1} \exp[\psi_1(1 - \delta^{1/3})] - \delta^{-1} + \frac{\psi_1 - 3}{\psi_1} \right\} & \text{при } \delta > 1, \\ \frac{9c_0^2}{2\psi_2^2} \left\{ \exp[\psi_2(1 - \delta^{1/3})] - 1 \right\}^2 & \text{при } \delta \leq 1 \end{cases}$$

$$\gamma(\rho_m, \varepsilon) = \frac{2}{3} + \frac{k_1}{\delta} + \left( \gamma_0 - k_1 - \frac{2}{3} \right) \frac{1 + \psi_3 L_1 \delta^2}{(1 + L_1 \delta^2)^2} \cdot \frac{\ln(1 + \delta)}{\ln 2},$$

где  $k_1 = \left(\psi_4 - \frac{2}{3}\right) \left(1 + \frac{2}{\psi_4}\right)^{-1}$ ;  $\delta = \frac{\rho_0}{\rho_m}$ ;  $L_1 = \frac{\varepsilon\psi_1(\psi_1 - 4)}{3c_0^2(\psi_1 - 3)}$ ;  $\psi_1, \psi_2,$

$\psi_3, \psi_4$  — константы материала матрицы;  $\gamma_0$  — термодинамический коэффициент Грюнайзена.

Приведенное уравнение состояния не учитывает плавление материала явным образом. Кривая плавления должна быть задана дополнительным соотношением. На основе критерия Линдемана такая зависимость записывается в виде (область равновесия кристаллической и жидкой фаз в переменных «энергия—плотность» заменяется линией) [2,28]:

$$\varepsilon_n(\rho_m) = \varepsilon_s(\rho_m) + \frac{3R_\mu}{A} \exp[\gamma_0(1-\delta)] \{T_{n0} \exp[\gamma_0(1-\delta)] \delta^{2/3} - T_0\},$$

где  $R_\mu$  — универсальная газовая постоянная;  $A$  — атомный вес;  $T_{n0}$  — температура плавления на начальной изохоре;  $T_0 = 293$  °К.

Граница двухфазной области «жидкость—пар» задается следующими формулами.

Для свинца [29]:

$$\frac{\rho_m}{\rho_k} = 1 - \left[1 - \left(\frac{\rho_m}{\rho_k}\right)^{0,96}\right]^{0,5} \quad \text{при } \rho_m < \rho_k,$$

$$\frac{\rho_m}{\rho_k} = 1 + 2,2 \left(1 - \frac{3}{1 - \ln \frac{\rho_m}{\rho_k}}\right)^{0,5} \quad \text{при } \rho_m \geq \rho_k;$$

для стали и алюминия:

$$\frac{\rho_m}{\rho_k} = 1 - \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho_k}\right)^{0,5} \quad \text{при } \rho_m < \rho_k,$$

$$\frac{\rho_m}{\rho_k} = 1 + 1,5 \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho_k}\right)^{0,6} \quad \text{при } \rho_m \geq \rho_k,$$

здесь  $p_k, \rho_k$  — давление и плотность в критической точке (для стали  $p_k=0,00825$  Мбар,  $\rho_k=2,03$  г/см<sup>3</sup>; для алюминия  $p_k=0,00447$  Мбар,  $\rho_k=0,64$  г/см<sup>3</sup>).

Влияние внутренней энергии на модуль сдвига и предел текучести учитывается следующим образом:

$$\mu(\alpha, \varepsilon) = \mu(\alpha) \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_n}\right), \quad \sigma_s(\alpha, \varepsilon) = \sigma_s(\alpha) \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_n}\right) \quad \text{при } \varepsilon < \varepsilon_n;$$

$$\mu(\alpha, \varepsilon) = 0, \quad \sigma_s(\alpha, \varepsilon) = 0 \quad \text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_n.$$

В диапазоне умеренных сжатий ударные адиабаты многих материалов хорошо описываются линейным соотношением между скоростью ударной волны  $D$  и массовой скоростью за ударной волной  $u$ :

$$D = c_0 + qu.$$

Тогда из условий на поверхности разрыва легко найти выражения для давления и внутренней энергии на ударной адиабате:

$$p_H(\rho_m) = \frac{\rho_0 c_0^2 (1 - \delta)}{[1 - q(1 - \delta)]^2}, \quad (5.14)$$

$$\varepsilon_H(\rho_m) = \frac{(1 - \delta) p_H}{2\rho_0}.$$

Ударная адиабата (5.14) используется в качестве опорной кривой при  $\gamma(\rho_m) = \frac{\rho_0 \gamma_0}{\rho_m}$  [10,19,30].

При численном моделировании ударно-волновых явлений определенное распространение получило уравнение состояния [31]:

$$p_m(\rho_m, \varepsilon) = c_0^2(\rho_m - \rho_0) + \gamma_0 \rho_m \varepsilon. \quad (5.15)$$

Для увеличения точности расчетов параметры  $c_0$ ,  $\gamma_0$  в (5.15) определяются привязкой к экспериментальной ударной адиабате.

### 5.1.5. Разрушение материалов при динамическом нагружении

С точки зрения математического моделирования проблема разрушения имеет два аспекта. Первый связан с разработкой модели и критерия разрушения, второй – с описанием механического поведения частично поврежденной или разрушенной среды [2, 19, 24, 25, 26, 33–35].

Многочисленные экспериментальные исследования [24, 32] свидетельствуют о том, что разрушение не является критическим событием мгновенной потери сплошности вещества при достижении определенной величиной предельного значения. Необходимо некоторое время, за которое параметры напряженного и деформированного состояния, достигшие некоторого критического уровня, воздействуя на структуру материала, накапливают в ней повреждения, в результате чего материал постепенно разрушается, его несущая способность падает, и наступает полное разрушение [33].

Механизм отрывного разрушения пластичных материалов определяется последовательно развивающимися процессами зарождения, роста и слияния микропор или мик-

ротрещин [32, 34, 35] в объемах, находящихся под действием растягивающих напряжений.

Модель роста сферических пор [35] основывается на предположении о существовании в материале сферических очагов разрушения и анализе динамики их роста. В качестве меры поврежденности используется скалярный параметр  $\alpha$  введенный ранее. В математическом плане модель [35] аналогична [21]. Кинетика разрушения вязкопластической среды получена в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = 0 \text{ при } p \geq -\frac{a_s}{\alpha} \ln \frac{\alpha}{\alpha-1}, \\ \tau_1^2 \sigma_{sm} Q_1 \left( \alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) = \alpha p + a_s \ln \frac{\alpha}{\alpha-1} + \\ + \frac{2}{3} \cdot \frac{\eta}{\nu} \cdot \frac{\alpha^\nu - (\alpha-1)^\nu}{(\alpha-1)^\nu \alpha^\nu} \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|^{\nu-1} \frac{d\alpha}{dt} \quad (5.16) \\ \text{при } p < -\frac{a_s}{\alpha} \ln \frac{\alpha}{\alpha-1}, \end{aligned}$$

где  $a_s$ ,  $\eta$ ,  $\nu$  – константы материала, подбираемые сопоставлением результатов численного моделирования с экспериментальными профилями скорости свободной поверхности. Моментом завершения локального макроскопического разрушения твердого тела при таком подходе является достижение пористостью критического значения  $\alpha_c$ .

Если инерционным членом  $\tau_1^2 \sigma_{sm} Q_1 \left( \alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right)$  можно пренебречь, уравнение (5.16) упрощается и принимает вид:

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\alpha - 1) \left[ \frac{3\nu}{2\eta} \left| p + \frac{a_s}{\alpha} \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right| \frac{\alpha}{1 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^\nu} \right]^{\frac{1}{\nu}}.$$

Рассмотренные выше уравнения описывают эволюцию параметра  $\alpha$  в диапазоне  $1 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_\infty$ .

Разрушение хрупких материалов (например, керамики, горных пород) происходит в результате зарождения, роста и слияния микротрещин и без появления заметных остаточных деформаций. Микроразрушения в таких материалах могут возникать при сжатии под действием девиаторных напряжений, что приводит к падению сопротивления растяжению [24–26, 36].

Максимальное упругое полураскрытие монетообразной трещины под действием растягивающего напряжения, перпендикулярного плоскости трещины, определяется соотношением [37, 38]:

$$\delta_0 = -\frac{2(1-\sigma)}{\pi\mu_m} R p_m,$$

где  $\sigma$  — коэффициент Пуассона материала матрицы;  $R$  — радиус трещины. Предполагая, что при раскрытии трещины ее берега образуют эллипсоид вращения с полуосями  $\delta_0$ ,  $R$ ,  $R$ , найдем объем трещины:

$$V_t = -\frac{8(1-\sigma)}{3\mu_m} R^3 \alpha p. \quad (5.17)$$

Пусть в процессе нагружения не происходит образования новых трещин, а деформирование материала сопровождается раскрытием изначально существующих с характерным размером  $R$ , тогда из (5.17) следует:

$$\xi_i = -\frac{8(1-\sigma)}{3\mu_m} N_0 R^3 \alpha p, \quad (5.18)$$

здесь  $\xi_i$  -- относительный объем трещин;  $N_0$  -- число трещин в единице объема.

Считая, что до момента фрагментирования поврежденного трещинами материала объем пор остается неизменным и равен  $\xi_0$ , получим:

$$\xi_i = \xi - \xi_0 = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0 \alpha}. \quad (5.19)$$

Подставляя (5.19) в (5.18), окончательно имеем:

$$p = -\frac{3\mu_m(\alpha - \alpha_0)}{8(1-\sigma)N_0\alpha_0R^3\alpha^2} \text{ при } \alpha > \alpha_0. \quad (5.20)$$

Из уравнения (5.20) следует, что с увеличением радиуса трещин рост несплошностей облегчается.

Рост трещин определяется соотношением:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt} = F_1 + F_2, \quad (5.21)$$

где

$$F_1 = \begin{cases} \frac{\alpha s_i - s_*}{\eta_1} & \text{при } \alpha s_i > s_*, \\ 0 & \text{при } \alpha s_i \leq s_*; \end{cases}$$

$$F_2 = \begin{cases} \frac{|\alpha p| - p_*}{\eta_2} & \text{при } \alpha p < -p_*, \\ 0 & \text{при } \alpha p \geq -p_*; \end{cases}$$

$$s_i = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{s} : \hat{s}} \quad - \text{интенсивность напряжений}; \quad s_* = s_0 \left(1 - \frac{R}{R_c}\right);$$

$$p_* = p_0 \left(1 - \frac{R}{R_c}\right); \quad R_c = \frac{\beta}{\sqrt[3]{N_0}}; \quad s_0, p_0, \eta_1, \eta_2, \beta \text{ — константы мате-}$$

риала.

Критерием полной фрагментации является равенство:

$$R = R_c.$$

Поврежденная или разрушенная среда математически моделируется эквивалентной однородной, сплошной средой.

Процесс разрушения сопровождается изменением структуры материала. Обратное влияние микроструктурных изменений на макроскопическое напряженно-деформированное состояние отражено в уравнении состояния (5.4) и эффективных характеристиках поврежденной среды (5.3), которые зависят от величины накопленной поврежденности.

При растяжении разрушенный материал описывается как порошок, движение которого происходит в соответствии с уравнениями для среды, лишенной напряжений. Относительное содержание пустот при этом находится из уравнения состояния пористого вещества с нулевым давлением в частицах.

Аналогично ведет себя разрушенный материал и при сжатии, если величина пористости в нем превышает критическое значение  $\alpha_{cr}$ . Переход разрушенной среды в пластическое состояние определяется условием текучести Кулона, схлопывание пор в ней — соотношением (5.10).

Предполагается также, что изменение пористости в расплавленном веществе происходит без усилий.

В качестве критерия сдвигового разрушения пластичных материалов используется критерий, основанный на предельной величине удельной работы пластических де-

формаций  $A^p$ . Приращения этой работы в единице объема в терминах некорректированных напряжений (в расчетах применяется процедура приведения напряжений к поверхности текучести [6]) вычисляются по формуле [39]:

$$dA^p = \frac{\sigma_s}{3\mu} (s_i - \sigma_s). \quad (5.22)$$

Считается, что при  $A^p = A^p$  элемент материала либо полностью разрушается, либо в нем образуются радиальные трещины, перпендикулярные окружным растягивающим напряжениям (в случаях осевой и точечной симметрии). Поведение поврежденного трещинами материала имитируется путем приведения тензора напряжений к такому виду, при котором главные окружные компоненты равняются нулю. Локальным критерием разрушения в этом случае является предельная величина относительного объема микропустот.

#### 5.1.6. Динамическое деформирование и разрушение керамики

Сравнительно малая изученность поведения высокопрочной хрупкой керамики при высокоскоростном нагружении связана с особенностями ее разрушения [24, 40, 41]. Подобные материалы под действием девиаторных напряжений могут растрескиваться практически без пластической деформации уже в фазе сжатия, что приводит к падению сопротивления растяжению. С ростом давления пластичность и пороговые напряжения разрушения увеличиваются, поэтому становится возможной пластическая деформация без растрескивания. Кроме того, высокоскоростная деформация хрупких материалов может сопровождаться дилатационными эффектами.

Ниже приводятся некоторые результаты численного ис-

следования процессов деформирования и разрушения пористой керамики из  $Al_2O_3$  [25, 26].

Удельный объем пористой среды  $v$  представляется в виде суммы удельного объема матрицы  $v_m$ , удельного объема пор  $v_p$  и удельного объема  $v_r$ , образующегося при раскрытии трещин:  $v = v_m + v_p + v_r$ . Пористость материала характеризуется относительным объемом пустот:  $\xi = \xi_p + \xi_r$ . Здесь  $\xi_p = v_p/v$ ,  $\xi_r = v_r/v$  — относительные объемы пор и трещин.

В качестве опорной кривой используется ударная адиабата (5.14). Текучесть материала определяется условием Кулона. Уравнение, описывающее изменение параметра  $\alpha$  при сжатии, имеет вид (5.10), при растяжении — (5.20). Закон роста радиуса трещины задается соотношением (5.21). Слияние дефектов наступает, когда радиус трещин в элементарном объеме материала достигает критического значения  $R_c$ .

При проведении вычислительных экспериментов для одномерных течений использовался численный метод [6], для осесимметричных — [43].

Численные значения коэффициентов  $Y_0$ ,  $k$  в условии Кулона можно определить, сопоставляя расчетную и экспериментальную ударные адиабаты. Ударная адиабата пористой керамики может быть рассчитана с помощью следующих соотношений, которые получаются из условий на скачке, уравнения состояния и уравнения (5.10).

В упругой области:

$$\sigma_1 = \frac{p_H - \rho_0 \gamma_0 \varepsilon_H + s_1 \alpha}{\alpha - 0,5 \rho_0 \gamma_0 (\alpha_0 / \rho_0 - v)},$$

$$D^2 = \frac{\alpha_0 \sigma_1}{\rho_0 (1 - v \rho_0 / \alpha_0)}, \quad (5.23)$$

$$u_1^2 = \sigma_1 (\alpha_0 / \rho_0 - v),$$

$$\varepsilon = \sigma_1 (\alpha_0 / \rho_0 - \nu) / 2,$$

где  $s_1 = \frac{4}{3} \mu \cdot \ln \frac{\alpha_0}{\rho_0 \nu}$ ,  $\alpha = \alpha_0$ , индексом «1» обозначены пара-

метры в направлении движения ударной волны.

В пластической области:

$$\sigma_1 = \frac{p_{II} - \rho_0 \gamma_0 [\varepsilon_H - 0,5 \sigma_{1a} (v_a - \nu) - \varepsilon_a] + 2 \sigma_s \alpha / 3}{\alpha - 0,5 \rho_0 \gamma_0 (v_a - \nu)},$$

$$\sigma_1 = p + \frac{2}{3} \sigma_s,$$

$$(D - u_{1a})^2 = \frac{v_a (\sigma_1 - \sigma_{1a})}{1 - \nu / v_a},$$

$$(u_1 - u_{1a})^2 = v_a (\sigma_1 - \sigma_{1a}) (1 - \nu / v_a),$$

где

$$\sigma_s = \begin{cases} Y_0 / \alpha + kp & \text{при } Y_0 / \alpha + kp < \sigma_0 / \alpha, \\ \sigma_0 / \alpha & \text{при } Y_0 / \alpha + kp \geq \sigma_0 / \alpha; \end{cases}$$

$$p = \frac{Y_0}{k\alpha} \left[ \left( \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^{\frac{2k}{3-2k}} - 1 \right];$$

$\sigma_0$  — константа материала. Индексом « $\alpha$ » обозначены параметры упругой волны, которые находятся из (5.23) и уравнения  $s_1 = \frac{2}{3} \sigma_s$  при  $\alpha = \alpha_0$ .

Сравнение расчетной (сплошная линия) и экспериментальной [40] (точки) ударных адиабат керамики АД-85 в переменных «напряжение (ГПа) — удельный объем (см<sup>3</sup>/г)»

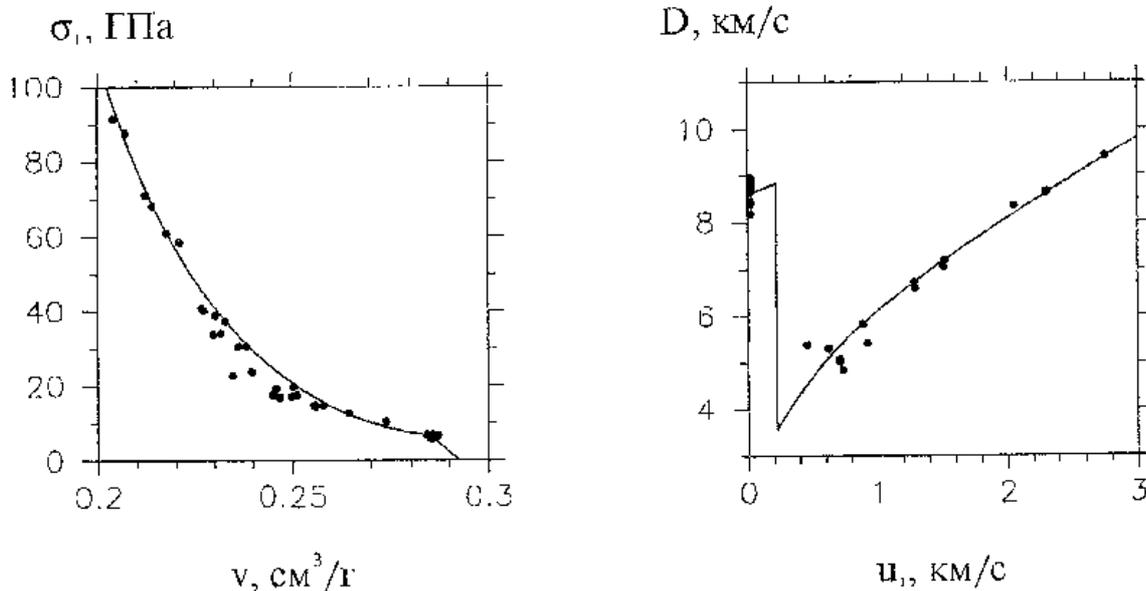


Рис. 5.2. Сравнение расчетной (сплошная линия) и экспериментальной (точки) ударных адиабат керамики АД-85 в переменных «напряжение — удельный объем» (слева) и «скорость ударной волны — массовая скорость»

(слева) и «скорость ударной волны (км/с) — массовая скорость (км/с)» приведено на рис. 5.2 ( $k=0,75$ ,  $Y_0=0,15838$  ГПа). На рис. 5.3 представлено сравнение расчетной и экспериментальной [40] ударных адиабат керамики Р-3142-1 ( $k=0,75$ ,  $Y_0=0,2407$  ГПа).

В рамках одномерной деформации проведены расчеты соударения медного диска толщиной 0,26 см с пластиной из керамики АД-85 ( $\xi_0=6,5\%$ ) толщиной 1,38 см со скоростями 60 и 360 м/с. Рис. 5.4 иллюстрирует на момент окончания расчетов ( $t=3,4$  мкс) распределения относительного объема пустот (%) по ударнику и мишени. Пунктиром отмечена контактная граница.

На рис. 5.5 представлены зависимости «напряжение (ГПа) — время (мкс)» в сечении, расположенном на расстоянии 0,88 см от поверхности контакта. По этим данным можно судить о характере разрушения мишеней. В первом варианте разрушение керамического слоя произошло по

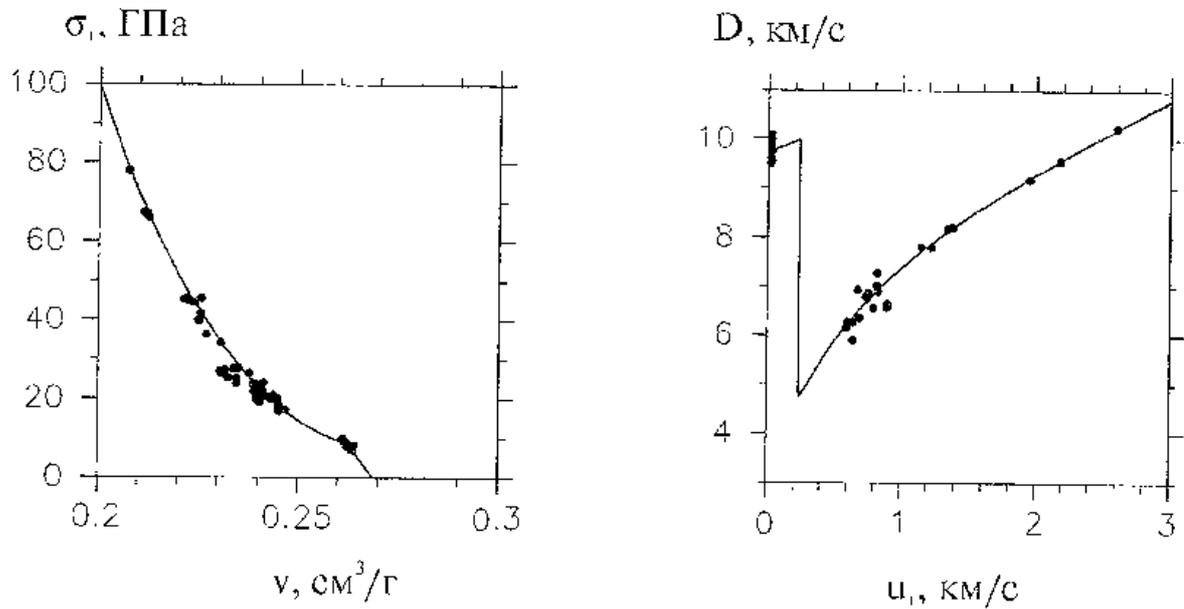


Рис. 5.3. Сравнение расчетной (сплошная линия) и экспериментальной (точки) ударных адиабат керамики Р-3142-1 в переменных «напряжение — удельный объем» (слева) и «скорость ударной волны — массовая скорость»

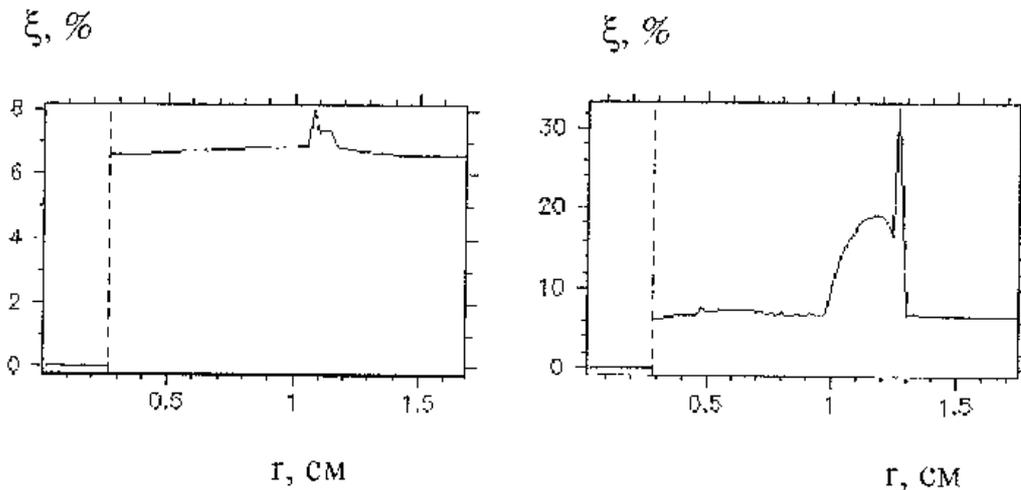


Рис. 5.4. Распределение относительного объема пустот по ударнику и мишени на момент окончания расчетов при соударении со скоростями 60 (слева) и 360 м/с

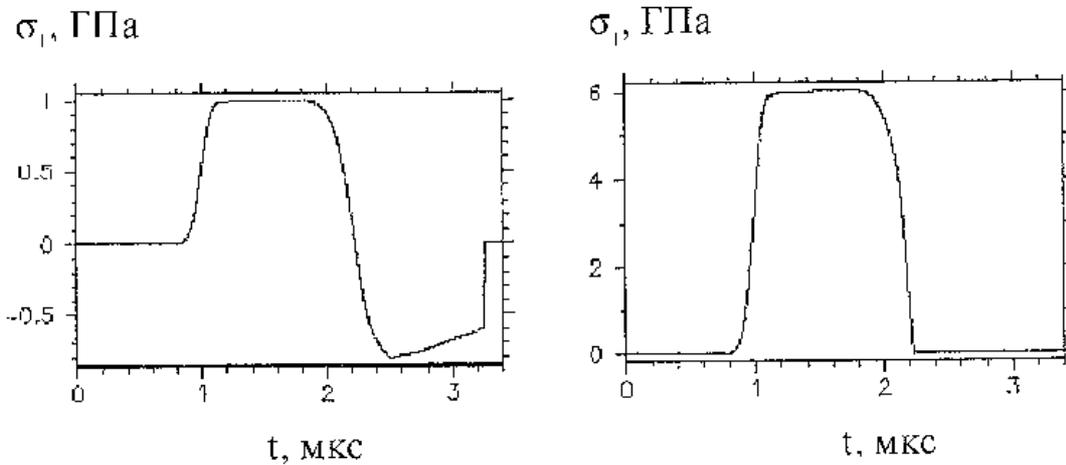


Рис. 5.5. Зависимости «напряжение–время» в сечении преграды при соударении со скоростями 60 (слева) и 360 м/с

откольному типу, во втором — при сжатии в результате действия девиаторных напряжений. Расчеты проведены при следующих численных значениях констант, которые подбирались по известной экспериментальной зависимости откольной прочности от амплитуды ударной волны [24]:  $R_0=2,5$  мкм,  $\eta_1=0,705$  ГПа·мкс,  $\eta_2=0,1$  ГПа·мкс,  $p_0=0,38$  ГПа,  $s_0=2,6$  ГПа,  $N_0=64 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$ ,  $R_c=11,6$  мкм, где  $R_0$  — характерный размер трещин.

Для верификации модели в рамках одномерной деформации проводился расчет соударения медного диска толщиной 0,25 см с двухслойной мишенью, состоящей из слоя керамики АД-85 (0,36 см) и слоя ПММА (полиметилметакрилат, или оргстекло, 1,2 см). Скорость удара 0,57 км/с. При проведении аналогичных экспериментов на контактной границе «керамика — ПММА» устанавливался манганиновый датчик давления. На рис. 5.6–5.8 ( $t_1=0,6$  мкс,  $t_2=1,5$  мкс,  $t_3=2$  мкс) представлены распределения напряжения  $\sigma_1$  (ГПа), относительного объема пустот  $\xi$  (%), массовой скорости  $u$  (км/с) по ударнику и мишени, а также зависимость напряжения  $\sigma_1$  (ГПа) от времени (мкс) в точке расположения манганинового датчика. Пунктиром отме-

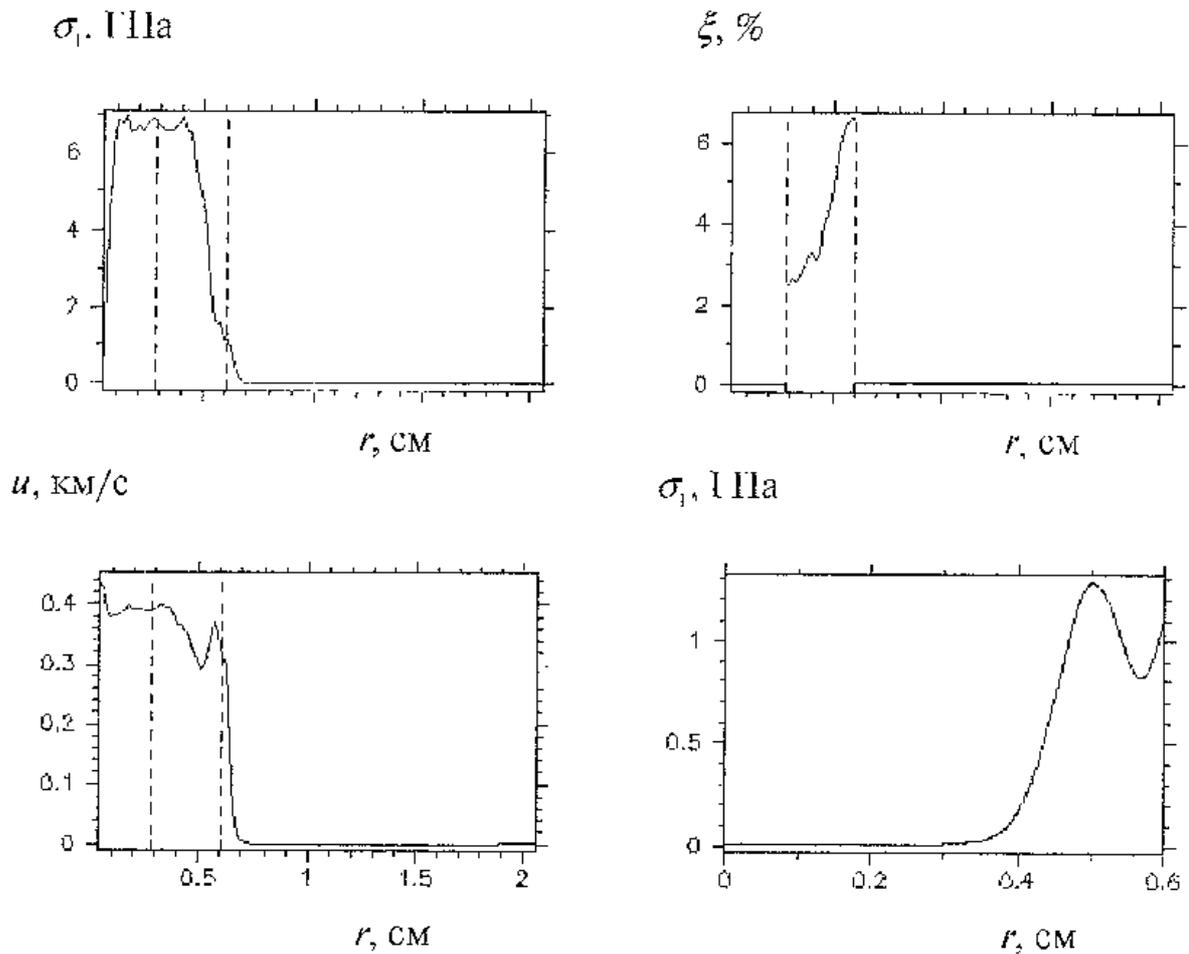


Рис. 5.6. Распределения напряжения, относительного объема пустот, массовой скорости по ударнику и мишени ( $t=0,6$  мкс) и зависимость «напряжение–время» в точке расположения датчика

чены контактные границы. Эти данные позволяют судить как о волновой картине, протекающей в ударнике и мишени, так и о процессе разрушения материалов.

Ударный фронт в керамике имеет двухволновую структуру. В первой волне, распространяющейся по невозмущенному материалу со скоростью 8,8 км/с и имеющей амплитуду 6,6 ГПа, материал дробится. Во второй, распространяющейся по разрушенному материалу ( $\approx 3,7$  км/с,  $\approx 7$  ГПа), происходит частичное схлопывание пор. Наиболее сильное затекание -

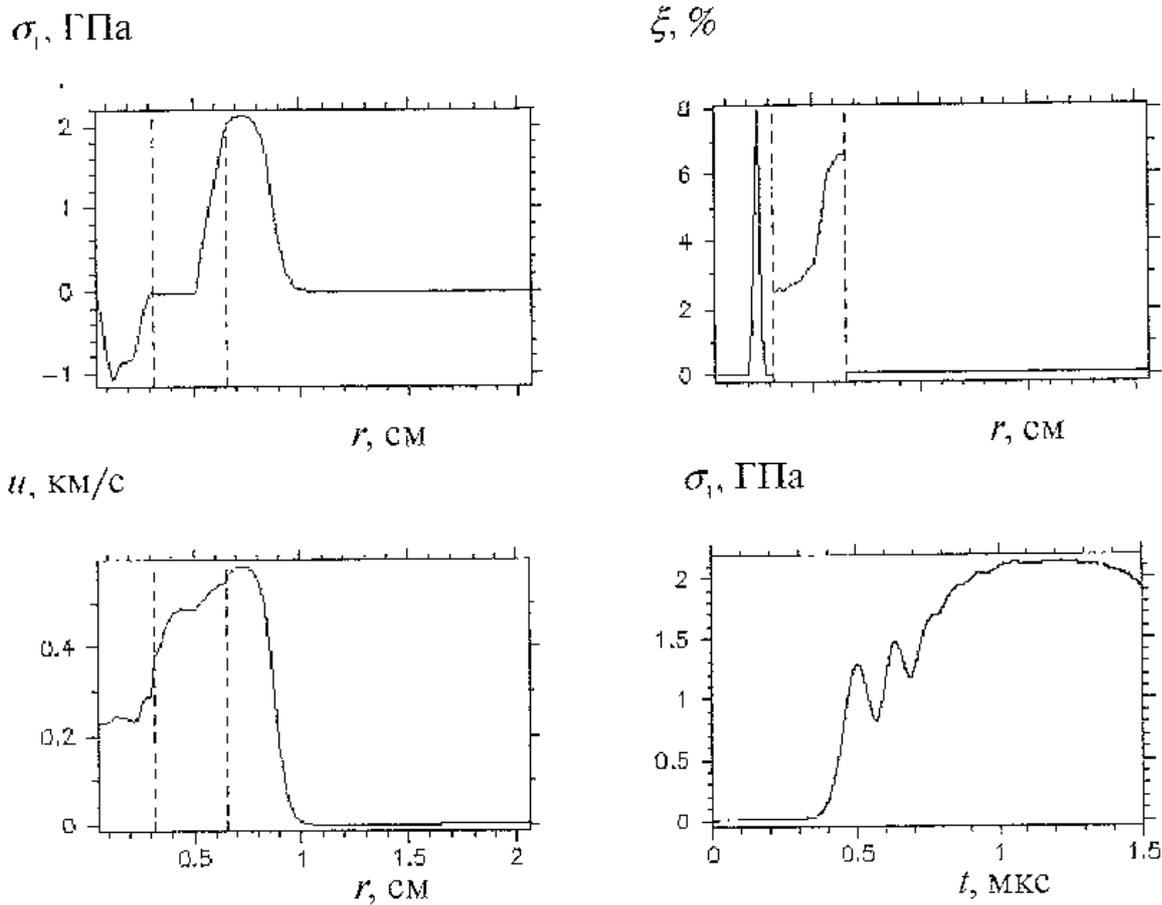


Рис. 5.7. Распределения напряжения, относительного объема пустот, массовой скорости по ударнику и мишени ( $t=1,5$  мкс) и зависимость «напряжение—время» в точке расположения датчика

порового пространства наблюдается со стороны лицевой поверхности керамического слоя. Относительный объем пустот в этой области уменьшается с 6,5 до 3%. По мере продвижения ударной волны ее интенсивность падает, в результате объем пустот в районе тыльной поверхности не понижается.

В момент времени 0,4 мкс первая ударная волна достигает поверхности раздела сред. Происходит ее расщепление на проходящую в ПММА ударную волну и волну разгрузки, отраженную в АД-85. Последующие моменты времени характеризуются взаимодействием волны разгрузки со вто-

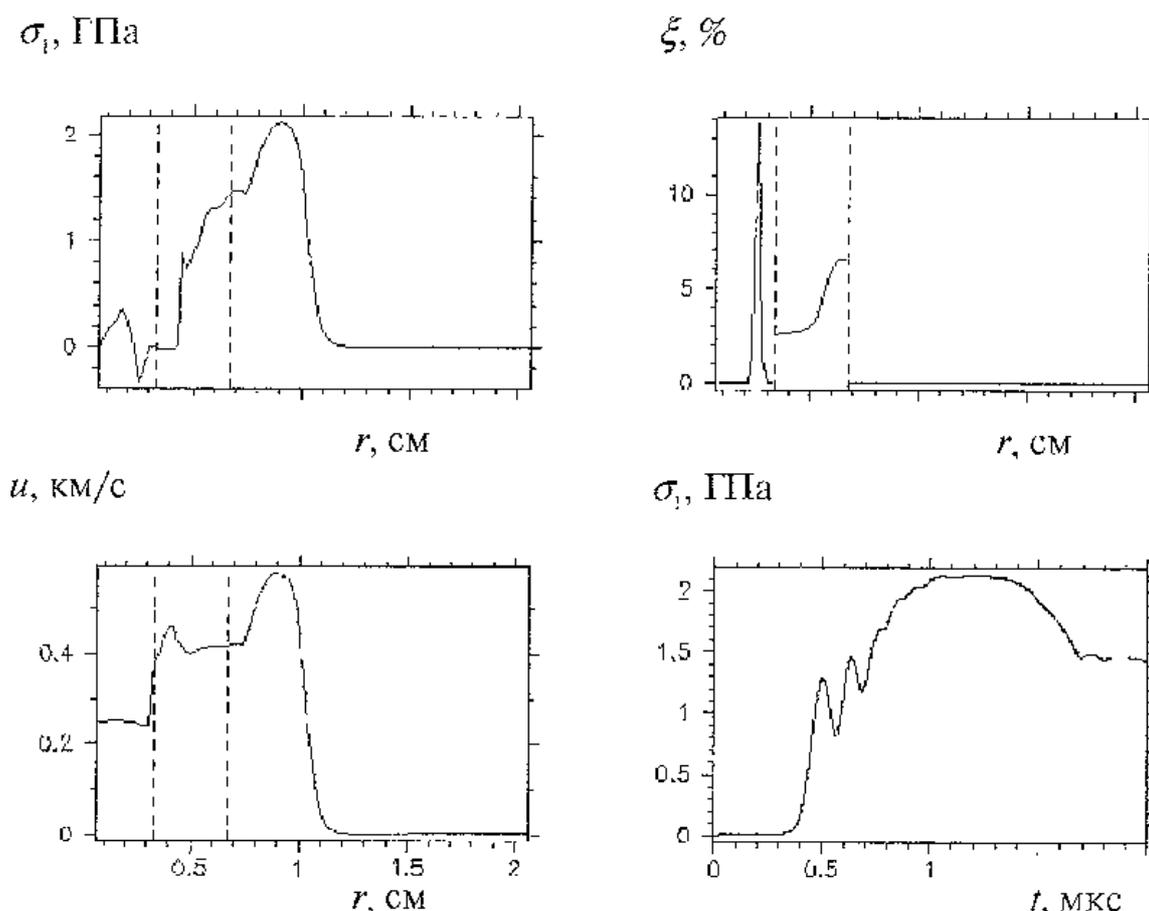


Рис. 5.8. Распределения напряжения, относительного объема пустот, массовой скорости по ударнику и мишени ( $t=2,0$  мкс) и зависимость «напряжение–время» в точке расположения датчика

рым ударным фронтом и поверхностью раздела материалов. Этот процесс хорошо прослеживается на графике «напряжение – время» (рис. 5.6).

Вторая ударная волна достигает границы «АД-85 – ПММА» через 0,8 мкс с момента удара и распадается на проходящую ударную волну с амплитудой 2,1 ГПа и отраженную волну разгрузки. В керамическом слое взаимодействие встречных волн разгрузки, распространяющихся от лицевой поверхности ударника и поверхности раздела «АД-85 – ПММА», приводит к разгрузке разрушенного

материала до  $\sigma_1=0$ . В ударнике под действием растягивающих напряжений на расстоянии 1 мм от плоскости удара происходит рост микродефектов.

Через 0,5 мкс после выхода второй ударной волны на поверхность раздела материалов этой поверхности достигает волна разгрузки, распространяющаяся от лицевой поверхности ударника. На графике  $\sigma_1(t)$  (рис. 5.7) этому промежутку времени соответствует горизонтальная площадка  $\sigma_1=2,1$  ГПа. При этом образуются отраженная в керамический слой ударная волна и волна разгрузки, проходящая в слой ПММА. В результате на графике  $\sigma_1(t)$  (рис. 5.8) наблюдается падение напряжения с 2,1 до 1,4 ГПа.

Следует обратить внимание на то, что массовая скорость в ударнике меньше массовой скорости в мишени. Ударник на некоторое время отстает. Лицевая поверхность керамического слоя становится свободной. Поэтому ударная волна, распространяющаяся по керамическому слою в сторону, противоположную направлению удара, отражается от нее в виде волн разрежения. Последующие моменты времени характеризуются взаимодействием этих волн с поверхностью раздела материалов.

На рис. 5.9 представлено сравнение экспериментального [41] (вверху) и рассчитанного профилей «напряжение—время» в точке расположения датчика. Получено удовлетворительное согласование данных расчета с экспериментальными результатами. Данная модель применялась для анализа экспериментальных результатов по ударному взаимодействию цилиндрических ударников из ВНЖ90 ( $d_0=0,6$  см,  $l_0=6$  см) с комбинированными преградами двух типов [25, 26].

В первой мишени на лицевой стороне стального цилиндра (12 см) размещался слой керамики Р-3142-1 (0,72 см,  $\xi_0=5,6$  %). Во второй мишени на лицевую поверхность керамического слоя дополнительно устанавливалась стальная

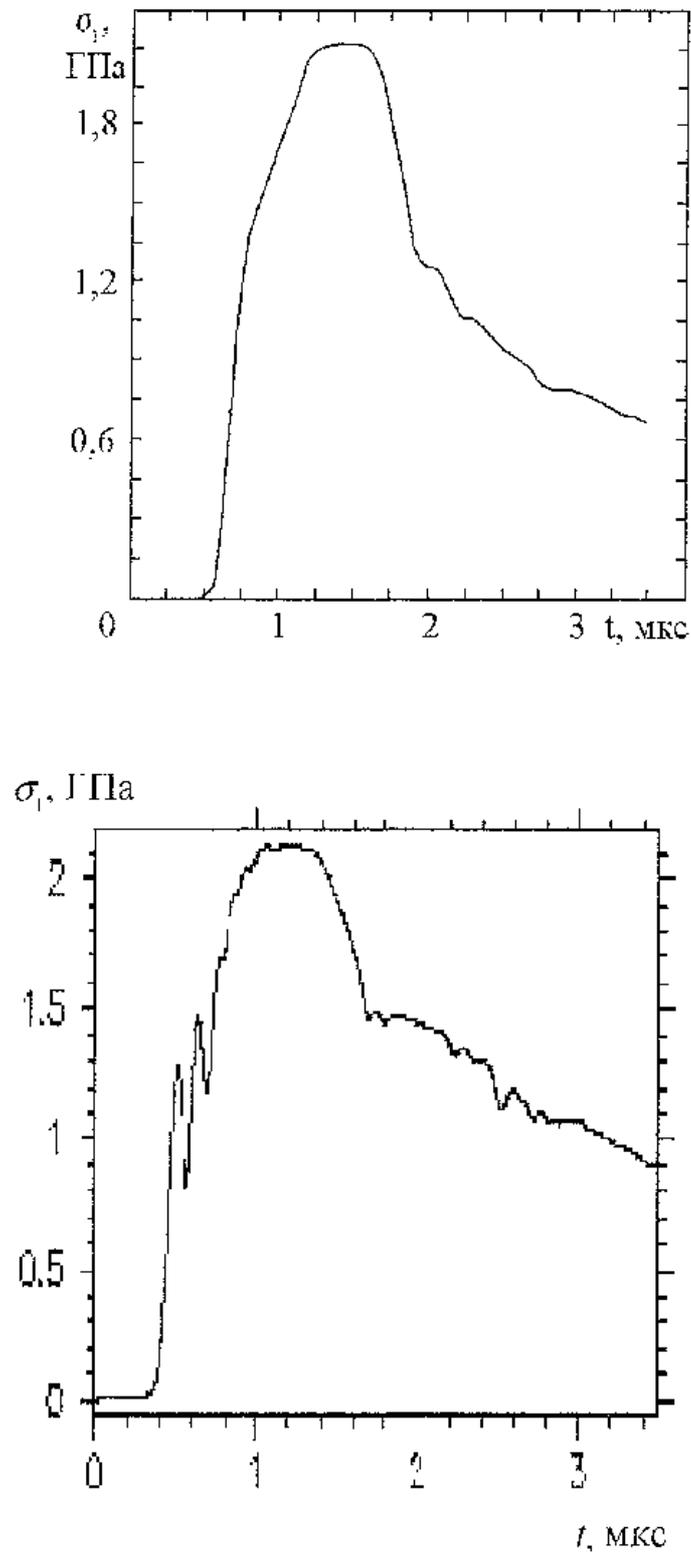


Рис. 5.9. Сравнение экспериментального (вверху) и рассчитанного профилей «напряжение–время» в точке расположения датчика

пластина (0,33 см). Результаты численного моделирования представлены на рис. 5.10, 5.11.

Рис. 5.10 иллюстрирует в два момента времени процесс ударного взаимодействия стержня с мишенью первого типа. Скорость удара  $u_0=1,381$  км/с. Области разрушенного материала отмечены точками. К моменту времени 5 мкс керамический слой полностью разрушается, и стержень проникает в стальной цилиндр через слой керамического песка. Процесс проникания заканчивается при  $t \approx 115$  мкс. Расчетная глубина кратера в стальной плите  $l=4,5$  см.

На рис. 5.11 приведены результаты расчета взаимодействия со скоростью  $u_0=1,393$  км/с стержня с мишенью второго типа. При  $t=5$  мкс лицевая стальная пластина нахо-

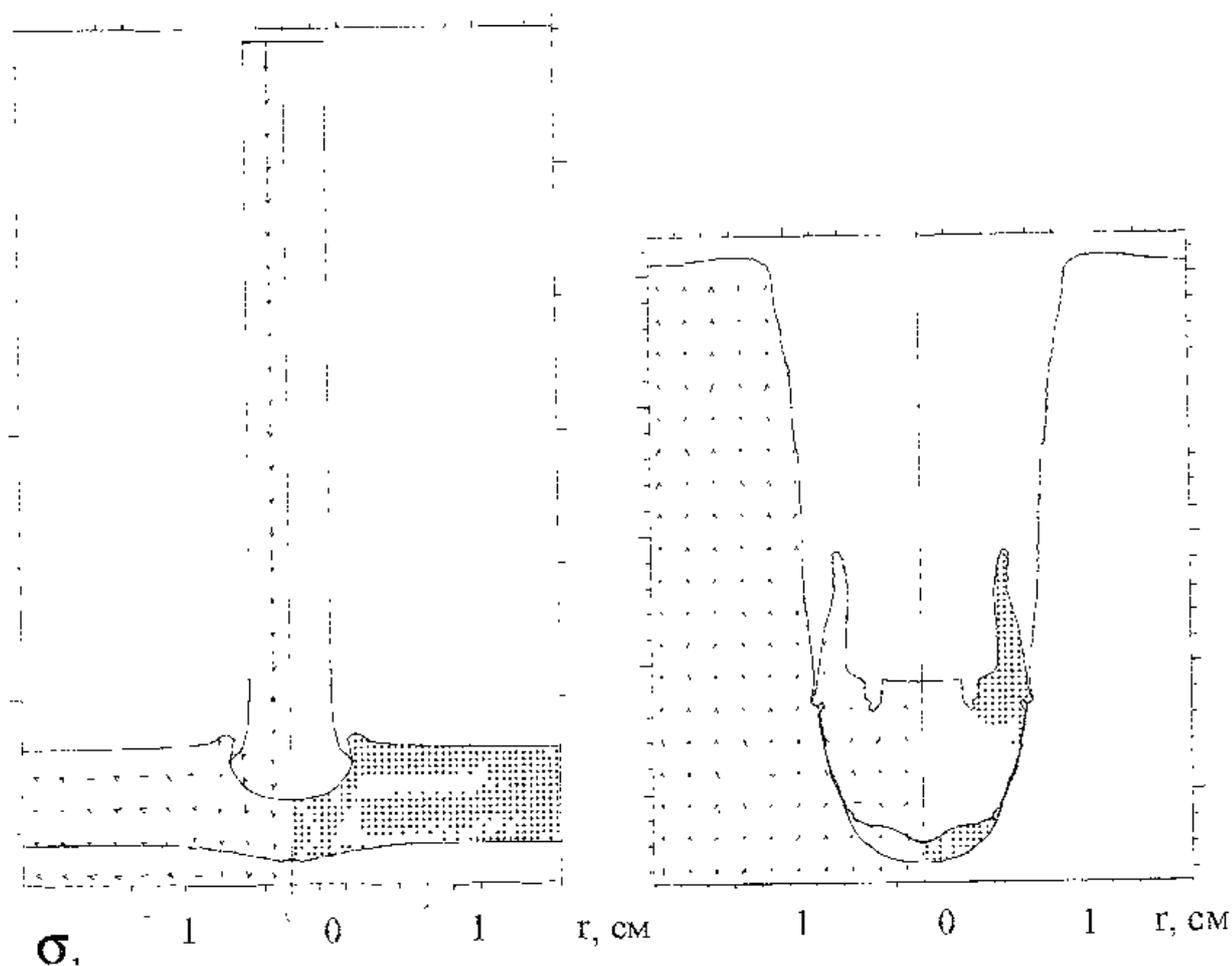


Рис. 5.10. Проникание в двухслойную преграду [25, 26]

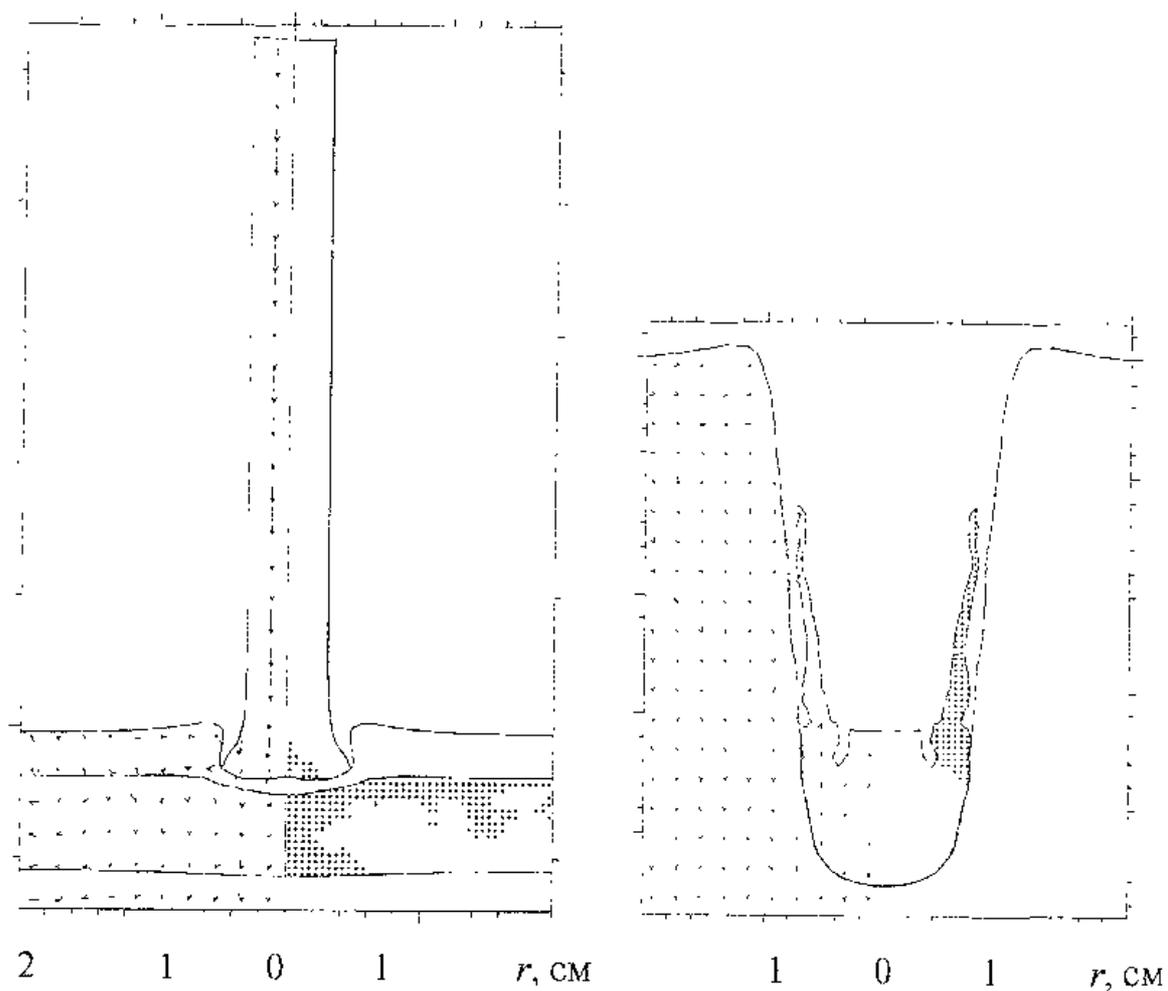


Рис. 5.11. Проникание в трехслойную преграду [25,26]

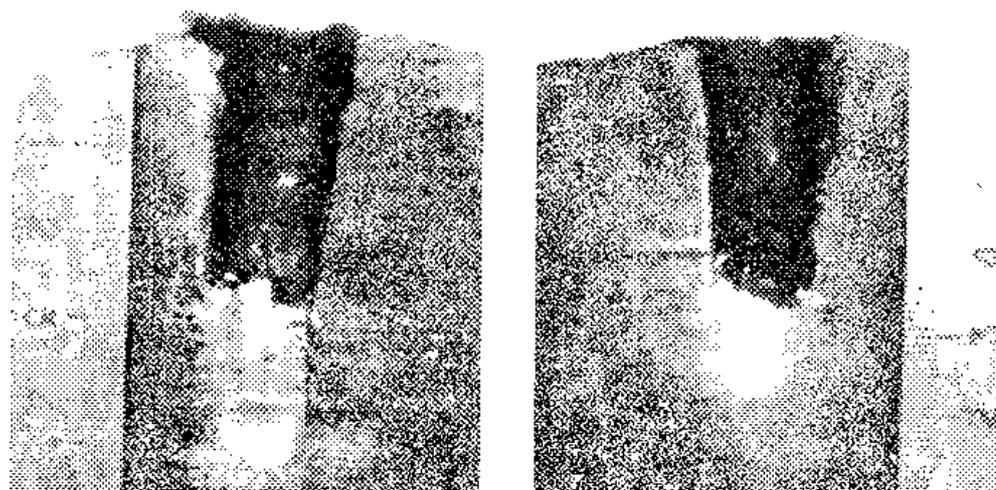


Рис. 5.12. Разрезы стальных плит для двух типов преград [25, 26]

Таблица 5.1

$u_0$ , км/с	$l$ , см	
	эксперимент	расчет
1,381	4,7	4,5
1,393	4,2	4,3

дится на пределе пробития. В окрестности оси симметрии керамический слой разрушен. Проникание ударника заканчивается к моменту времени 125 мкс,  $l=4,3$  см.

На рис. 5.12 представлены фотографии разрезов кратеров в основном стальном цилиндре для двух типов мишеней. Необходимо отметить, что при нагружении керамический слой разрушается на довольно мелкие осколки. В стальной плите формируются удлиненные кратеры, на дне которых отчетливо видны остатки ударников. Сравнение расчетных и экспериментальных данных по глубине проникания стержней приведено в таблице 5.1.

Резюмируя вышеизложенное, можно утверждать, что предложенная модель деформирования и разрушения пористой керамики при динамическом нагружении удовлетворительно описывает происходящие в ней процессы. Основное ее достоинство заключается в том, что она требует небольшого числа сравнительно легко определяемых в эксперименте параметров и довольно просто может быть реализована в существующих программах расчета напряженно-деформированного состояния и разрушения элементов конструкций при ударном и взрывном нагружении.

### 5.1.7. Феноменологический подход к проблеме динамического разрушения хрупких материалов.

#### Поведение бетона в условиях высокоскоростного удара

При выборе математической модели деформирования и разрушения хрупких материалов в условиях динамического

нагружения необходимо исходить из точности описания физики процесса, учитывая при этом, что модель не должна быть чрезвычайно громоздкой и требовать экспериментального определения большого количества констант. Однако для многих материалов, среди которых и бетон, не удастся пока построить модель динамического разрушения, подобную изложенной выше для керамики. Объясняется это не ограниченными возможностями математического моделирования, а большой неопределенностью знаний о реальных свойствах материалов. В такой ситуации для расчета хрупкого разрушения используется феноменологический подход, когда критерии прочности выражают в виде инвариантных связей критических значений макрохарактеристик процессов деформирования – напряжений и деформаций [26, 42]. При этом постоянные, определяемые через пределы прочности материала при растяжении, сжатии и сдвиге, уточняются путем привязки к экспериментальным данным по динамическому нагружению.

В связи с верификацией данного подхода к динамическому разрушению проведены экспериментальные исследования по нагружению плиты из мелкозернистого бетона стальными ударниками при скорости соударения 130–700 м/с [26]. Бетон имел состав: одна часть цемента марки 400, 2 части мелкого песка. Время выдержки смеси составило 30 суток. Толщина плит до 200 мм. Ударники представляли собой цилиндры диаметром  $d_0=0,76$  см, массой 8,1 г.

Соударение осуществлено под углом  $90^\circ$  к лицевой поверхности плиты. Ударник при проникании во всех представленных случаях остается практически недеформированным. На рис. 5.13 приведена фотография лицевой поверхности бетонной плиты после удара стальным цилиндром со скоростью 370 м/с. Диаметр откола равен  $4,6d_0$ . На рис. 5.14 представлен график изменения глубины про-

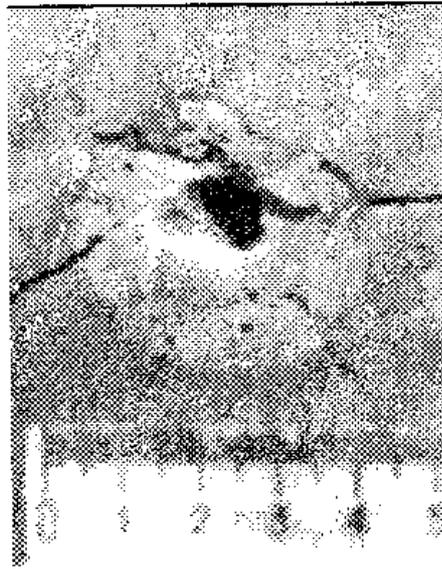


Рис. 5.13. Лицевая поверхность бетонной плиты после удара стальным цилиндром со скоростью 370 м/с [26]

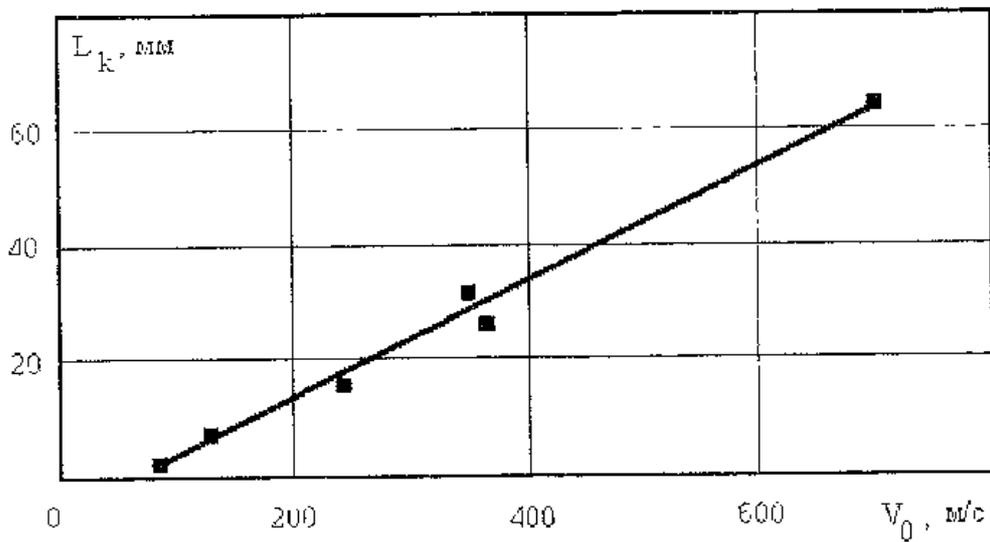


Рис. 5.14. Зависимость глубины проникания ударников в бетон от скорости удара [26]

никания  $L_k$  ударников в бетон в зависимости от скорости удара  $V_0$ .

Полученные экспериментальные данные недостаточны

для определения всех параметров изложенной выше модели деформирования и разрушения хрупких материалов. В связи с этим принята следующая модель поведения бетона при динамическом нагружении. Бетон при динамическом нагружении до разрушения описывается моделью линейно-упругого тела, обладающего физико-механическими свойствами бетона. После разрушения – это упруго-пластическое изотропно упрочняющееся тело с физико-механическими свойствами гранулированной среды. Сопротивление сдвиговым деформациям такой среды во много раз меньше, чем в бетоне до разрушения, и она не может сопротивляться растягивающим напряжениям.

Для разрушенного бетона в (5.1) предел текучести зависит от давления и определяется по формуле:

$$\sigma_s = \sigma_{\min} + \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})k_1 p}{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + k_1 p},$$

где  $k_1=0,82$ ,  $\sigma_{\min}=0,0077$  ГПа,  $\sigma_{\max}=0,0216$  ГПа.

В качестве условия прочности используется критерий, предложенный для бетона в [44]:

$$3J_2 = [AI_1 + B] \left\{ 1 - (1 - C) \left[ 1 - \frac{J_3}{2} \left( \frac{J_2}{3} \right)^{-3/2} \right] \right\}, \quad (5.24)$$

где  $I_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  – первый инвариант тензора напряжений, второй и третий инварианты девиатора напряжений соответственно;  $A = R_c - R_p$ ;  $B = R_c R_p$ ;  $C = \frac{3T_c^2}{R_c R_p}$ ;  $R_c$ ,  $R_p$ ,  $T_c$  – пределы прочности при одноосном сжатии, растяжении и чистом сдвиге соответственно.

Поверхность (5.24) для изотропных материалов должна отвечать условию выпуклости (в соответствии с постулатом Друккера и Хилла), которое

накладывает следующие ограничения на расчетные параметры:

$$0,530 \leq \frac{T_c}{\sqrt{R_c R_p}} \leq 0,577.$$

Численные значения  $A$ ,  $B$ ,  $C$  определяются через пределы прочности бетона при растяжении, сжатии и сдвиге, полученные при динамическом нагружении [45].

В рамках данного подхода с использованием численного метода конечных элементов [46] разработана методика расчета высокоскоростного взаимодействия металлических ударников произвольной формы с бетонной плитой в полной пространственной постановке. С помощью ее был повторен приведенный выше эксперимент по соударению стального цилиндрического ударника с бетонной плитой при скоростях удара 244 и 370 м/с. Расчеты проведены при следующих параметрах модели бетона:

$$\mu_0 = 17 \text{ ГПа}; \rho_0 = 2,2 \text{ г/см}^3; q = 1,51; \gamma_0 = 2;$$

$$c_0 = 0,233 \text{ см/мкс}; R_c = 0,0924 \text{ ГПа}; R_p = 0,1 R_c; C = 0,85.$$

На рис. 5.15 и рис. 5.16 приведены результаты расчета в виде изометрических проекций сечения ударника и плиты плоскостью симметрии, иллюстрирующие картину разрушения бетона в момент полной остановки ударника. Качественно картина взаимодействия цилиндрического ударника с бетонной плитой совпадает с экспериментальными данными: форма кратера, наличие лицевого откола, недеформируемый ударник. Отклонение расчетной глубины кратера от экспериментальной составляет 4 и 12% при скорости удара 244 и 370 м/с соответственно. Наблюдается удовлетворительное согласование расчета с экспериментом. Это позволяет ставить и решать более сложные задачи, например расчет наклонного соударения.

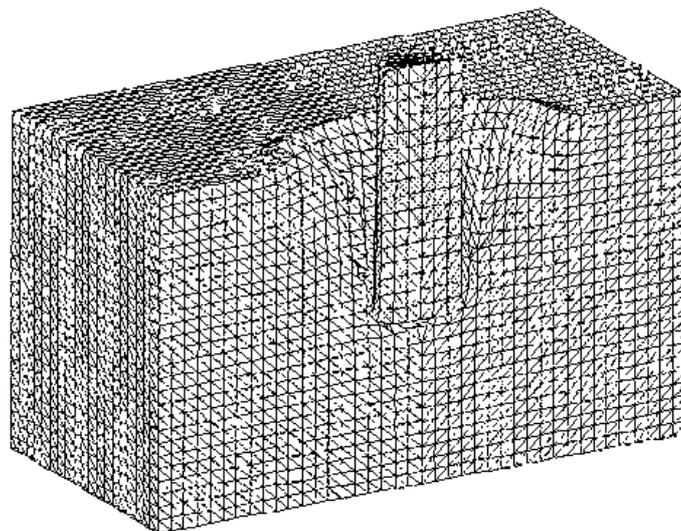


Рис. 5.15. Картина разрушения в бетонной плите. Скорость удара 244 м/с

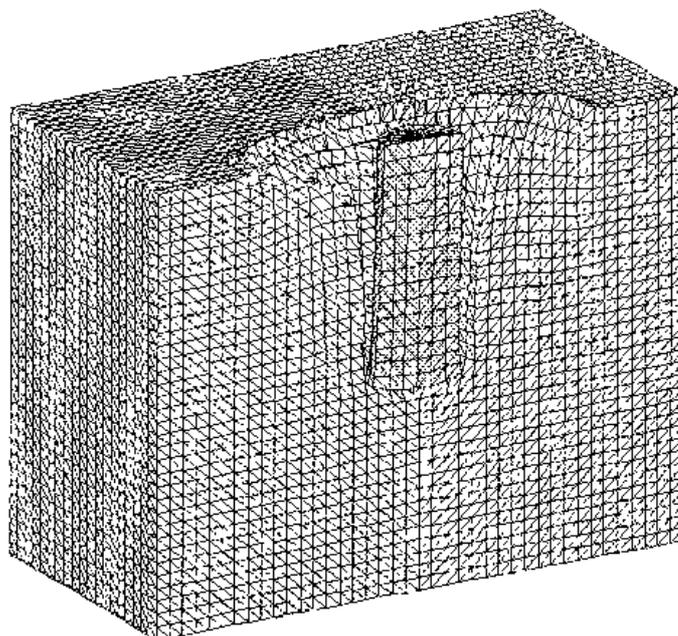


Рис. 5.16. Картина разрушения в бетонной плите. Скорость удара 370 м/с

На рис. 5.17 приведен результат расчета соударения стального ударника с бетонной плитой со скоростью 300 м/с при ударе под углом  $30^\circ$ . Картина иллюстрирует раз-

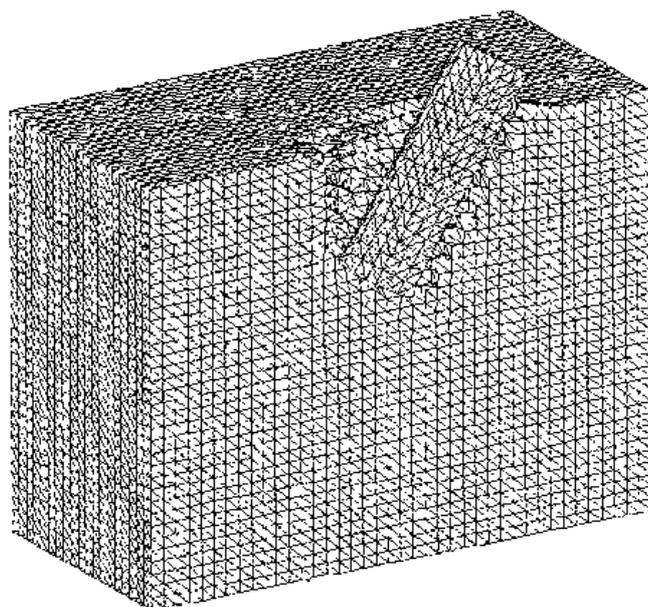


Рис. 5.17. Картина разрушения в бетонной плите при ударе стальным ударником со скоростью 300 м/с под углом 30°

рушение в бетонной плите в момент полной остановки ударника.

## **5.2. Расчет прочности конструкций из бетонных и железобетонных плит при взаимодействии с модельными снарядами**

### **5.2.1. Физико-математическая модель поведения песчаного грунта при динамическом нагружении**

Песчаный грунт задается в виде трех компонентной среды с начальной плотностью  $\rho_0$  и влажностью  $w_0$  [10, 50, 51]. Начальная плотность песчаного грунта определяется из формулы

$$\rho_0 = V_1 \rho_{10} + V_2 \rho_{20} + V_3 \rho_{30},$$

где  $v_i$  и  $\rho_{i0}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) начальные объемные концентрации и плотности воздуха, воды и кварца соответственно ( $v_1 + v_2 + v_3 = 1$ ). Плотности компонентов:  $\rho_{10} = 0,00123$  г/см<sup>3</sup>;  $\rho_{20} = 1,0$  г/см<sup>3</sup>;  $\rho_{30} = 2,65 \div 2,66$  г/см<sup>3</sup>.

Объемные концентрации компонентов определяются из выражений:

$$v_2 = \frac{w_0 \rho_0}{(1 + w_0) \rho_{20}}, \quad v_3 = \frac{\rho_0}{(1 + w_0) \rho_{30}}, \quad v_1 = 1 - v_2 - v_3.$$

В связи с тем, что произведение  $v_1 \rho_{10}$  на несколько порядков меньше  $\rho_0$  влиянием воздуха в порах можно пренебречь и рассматривать песчаный грунт как двухкомпонентный материал, состоящий из твердой фазы, представляющей собой простую смесь из воды и кварца, — матрицы, и включений — пор.

Система уравнений, описывающих движение пористой упругоэластической среды, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho dV &= 0, \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{u} dV = \int_{\Sigma} \bar{n} \cdot \hat{\sigma} dS, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho E dV &= \int_{\Sigma} \bar{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot \bar{u} dS, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\hat{e} = \frac{\hat{s}^j}{2\mu} + \lambda \hat{s}, \quad \hat{s} : \hat{s} = \frac{2}{3} \sigma_T^2,$$

где  $t$  — время;  $V$  — объем интегрирования;  $\Sigma$  — его поверхность;  $\bar{n}$  — единичный вектор внешней нормали;  $\rho$  — плотность;  $\hat{\sigma} = -p \hat{g} + \hat{s}$  — тензор напряжений;  $\hat{s}$  — его девиатор;  $p$  — давление;  $\hat{g}$  — метрический тензор;  $\bar{u}$  — вектор скорости;  $E = \varepsilon + \bar{u} \cdot \bar{u} / 2$  — удельная полная энергия;  $\varepsilon$  — удельная

внутренняя энергия;  $\hat{e} = \hat{d} - (\hat{d} : \hat{g})\hat{g}/3$  — девиатор тензора скоростей деформаций;  $\hat{s}^J = \hat{s} + \hat{s} \cdot \hat{\omega} - \hat{\omega} \cdot \hat{s}$  — производная девиатора тензора напряжений в смысле Яумашна—Полла;

$$\mu = \mu_{m0}(1 - \xi) \left[ 1 - \frac{(6\rho_{m0}c_{m0}^2 + 12\mu_{m0})\xi}{9\rho_{m0}c_{m0}^2 + 8\mu_{m0}} \right], \quad \sigma_T - \text{эффективные модуль сдвига и предел текучести соответственно;}$$

$\hat{\omega} = (\nabla \bar{u}^T - \nabla \bar{u})/2$  — тензор вихря;  $\rho_{m0}, c_{m0}, \mu_{m0}$  — константы материала. Параметр  $\lambda$  исключается с помощью условия текучести. Предел текучести материала взят в виде [47]:

$$\sigma_T = Y_{01} + \frac{k_1 p}{1 + \frac{k_1 p}{Y_{pl} - Y_{01}}}, \quad (5.25)$$

где  $Y_{01}$  — сцепление;  $k_1$  — величина, связанная с коэффициентом внутреннего трения;  $Y_{pl}$  — предельное значение сдвиговой прочности.

Для замыкания системы уравнений, описывающих движение пористой среды, необходимы уравнения состояния пористого материала и уравнения, описывающие изменение параметра  $\alpha$  как при растяжении, так и при сжатии.

Если известна зависимость скорости ударной волны  $D$  от массовой скорости  $u$  для матричного материала:

$$D = c_{m0} + q_{m0}u, \quad (5.26)$$

то уравнение состояния пористого материала имеет вид [2]:

$$p = \frac{\rho_{m0}}{\alpha} \left[ \frac{c_{m0}^2 \left( 1 - \frac{\gamma_{m0}\eta}{2} \right) \eta}{(1 - q_{m0}\eta)^2} + \gamma_{m0}\varepsilon \right], \quad (5.27)$$

где  $\eta = 1 - \rho_{m0} \frac{v}{\alpha}$ ,  $\gamma_{m0}$  — коэффициент Грюнайзена матричного материала. Коэффициенты  $c_{m0}$ ,  $q_{m0}$  линейной зависимости (5.26) можно определить через ударные адиабаты компонентов смеси  $D_i = c_{i0} + q_{i0} u_i$  ( $i=2, 3$ ).

В переменных  $(v_m, p_m)$  ударная адиабата смеси имеет вид:

$$v_m(p_m) = \sum_{i=2}^3 m_i \left\{ v_{i0} - \frac{1}{p_m} \left[ \frac{c_{i0}}{q_{i0}} \sqrt{\frac{p_m}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right]^2 \right\}, \quad (5.28)$$

где  $m_2 = \frac{w_0}{1+w_0} = \frac{V_2 \rho_{20}}{\rho_0}$  — массовая концентрация воды в песчаном грунте (весовая влажность);

$m_3 = \frac{1}{1+w_0} = \frac{V_3 \rho_{30}}{\rho_0}$  — массовая концентрация кварца в грунте ( $m_2 + m_3 = 1$ ).

Используя для смеси соотношения на ударной волне:

$$D = v_{m0} \sqrt{\frac{p_m}{v_{m0} - v_m(p_m)}}, \quad (5.29)$$

$$u = \sqrt{p_m (v_{m0} - v_m(p_m))},$$

можно построить зависимость скорости ударной волны от массовой скорости и определить коэффициенты в (5.26).

На рис. 5.18 в переменных  $v$ ,  $p$  и  $u$ ,  $D$  представлены ударные адиабаты матричного материала песка плотностью  $\rho_0 = 1,8 \text{ г/см}^3$  и влажностью 28% (кривая 3), воды (кривая 1) и кварца (кривая 2).

Константы уравнения состояния для рассмотренных материалов приведены в табл. 5.2.

Коэффициент Грюнайзена  $\gamma_{m0}$  определяется через коэффициенты  $\gamma_{i0}$ :

Таблица 5.2

материал	$\rho_{i0}$ , Г/см <sup>3</sup>	$c_{i0}$ , см/мкс	$q_{i0}$	$\gamma_0$
вода	1	0,17	1,57	2
кварц	2,66	0,368	2,12	1
смесь кварца и воды, $w_0=28\%$	1,9512	0,245	1,858	1,28

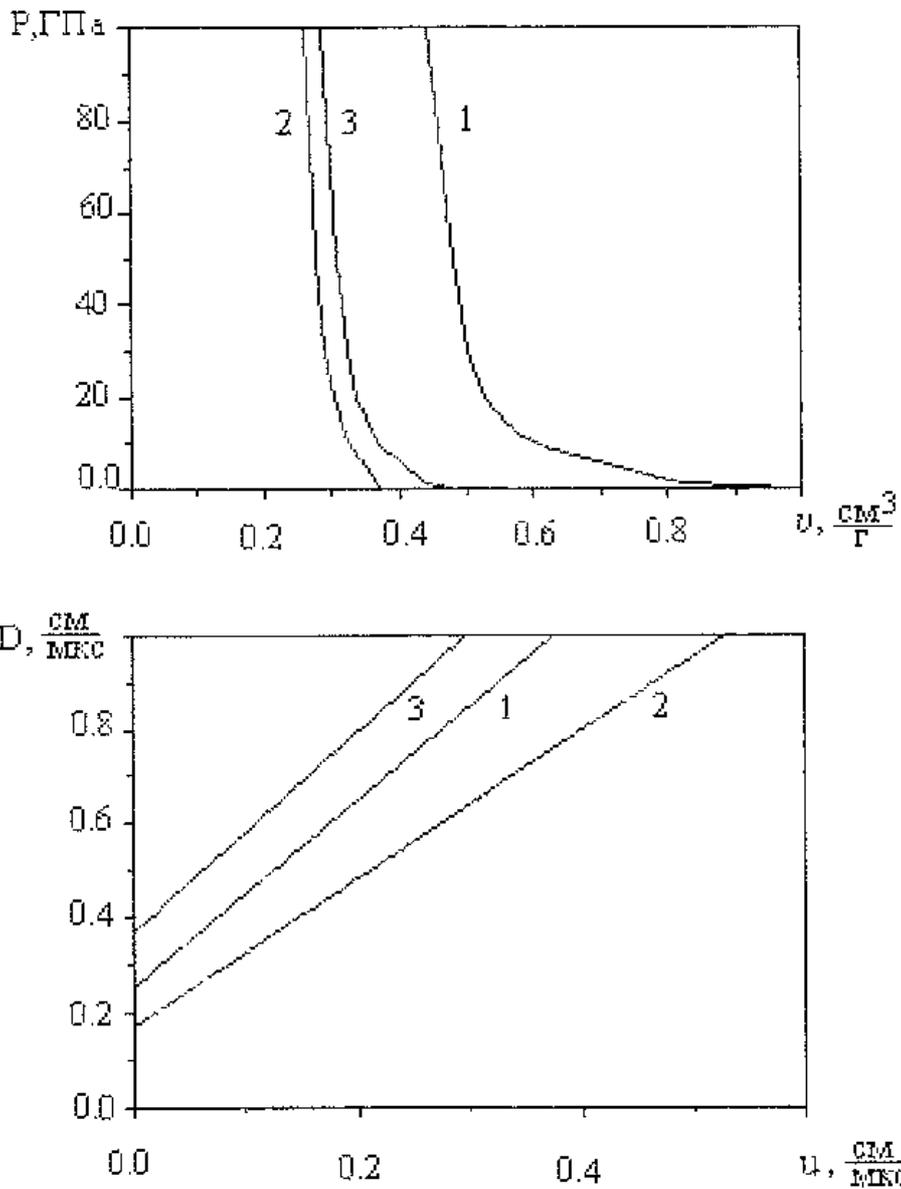


Рис. 5.18. Ударные адиабаты матричного материала песка плотностью  $\rho_0=1,8$  г/см<sup>3</sup> и влажностью 28% воды и кварца

$$\gamma_{m0} = \frac{v_{m0}}{\frac{m_2}{\rho_{20}\gamma_{20}} + \frac{m_3}{\rho_{30}\gamma_{m0}}}.$$

При выводе уравнения, описывающего изменения пористости при деформировании песка, привлекаются модельные построения, основанные на предположении о том, что поведение среды с начальной пористостью  $\alpha_0$  при динамическом нагружении аналогично поведению отдельной сферической поры радиуса  $a_0$ , окруженной сферической оболочкой из материала матрицы, пластические свойства которого удовлетворяют условию Мора–Кулона. Причем внешний радиус полый сферы выбирается таким образом, что отношение общего объема сферы к общему объему матричного материала равно начальной пористости  $\alpha_0$ . Тогда из решения задачи о деформировании одиночной поры под действием изотропного напряжения получаются кинетические уравнения для расчета уплотнения песка (5.10):

$$Y_0 \tau^2 Q(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = \alpha p + \frac{Y_0}{k} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^{\frac{2k}{3-2k}} \right],$$

где 
$$\tau^2 = \frac{\rho_{m0} a_0^2}{3(\alpha_0 - 1)^{2/3} Y_0},$$

$$Q(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = \frac{3-2k}{3+4k} \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha^{1/3}} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{3+4k}{3(3-2k)}} \right] - \frac{3-2k}{3(6-k)} \frac{\alpha^2}{\alpha^{4/3}} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{2(6-k)}{3(3-2k)}} \right],$$

$Y_0$ ,  $k$  – коэффициенты условия Мора–Кулона. Они определяются при сопоставлении экспериментальной и расчетной ударных адиабат песка. Уравнение (5.10) используется при сжатии при условии, что:

$$p > \frac{Y_0}{k\alpha} \left[ \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{2k}{3-2k}} - 1 \right].$$

В противном случае:

$$\alpha = 0 \left( 0 < p \leq \frac{Y_0}{k\alpha} \left[ \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{2k}{3-2k}} - 1 \right] \right).$$

При растяжении песок описывается как среда, лишенная напряжений. Относительное содержание пустот при этом определяется из уравнения состояния пористого вещества (5.27) с нулевым давлением в частицах. В таблице 5.3 приведены параметры модели песка.

Таблица 5.3

$\rho_{\text{в}}$ г/см <sup>3</sup>	$w_{\text{в}}$ %	$v_{\text{л}}$ %	$\rho_{\text{тв}}$ г/см <sup>3</sup>	$c_{\text{тв}}$ см/мкс	$q_{\text{тв}}$	$\gamma_{\text{тв}}$	$\mu_{\text{тв}}$ ГПа	$Y_{\text{в}}$ ГПа	$k$
1,29	0	5,15	1,95	0,368	2,12	1,0	0,073	0,1	0,75
1,80	28	7,75	1,95	0,245	1,86	1,28	0,073	0,025	0,5

Уравнения (5.24), (5.27), (5.10) при соответствующих начальных и граничных условиях образуют полную систему уравнений, описывающих поведение песчаного грунта в условиях ударно-волнового нагружения.

На рис. 5.19, 5.20 представлены в переменных  $(v, p)$  и  $(u, D)$  ударные адиабаты сухого песка плотностью

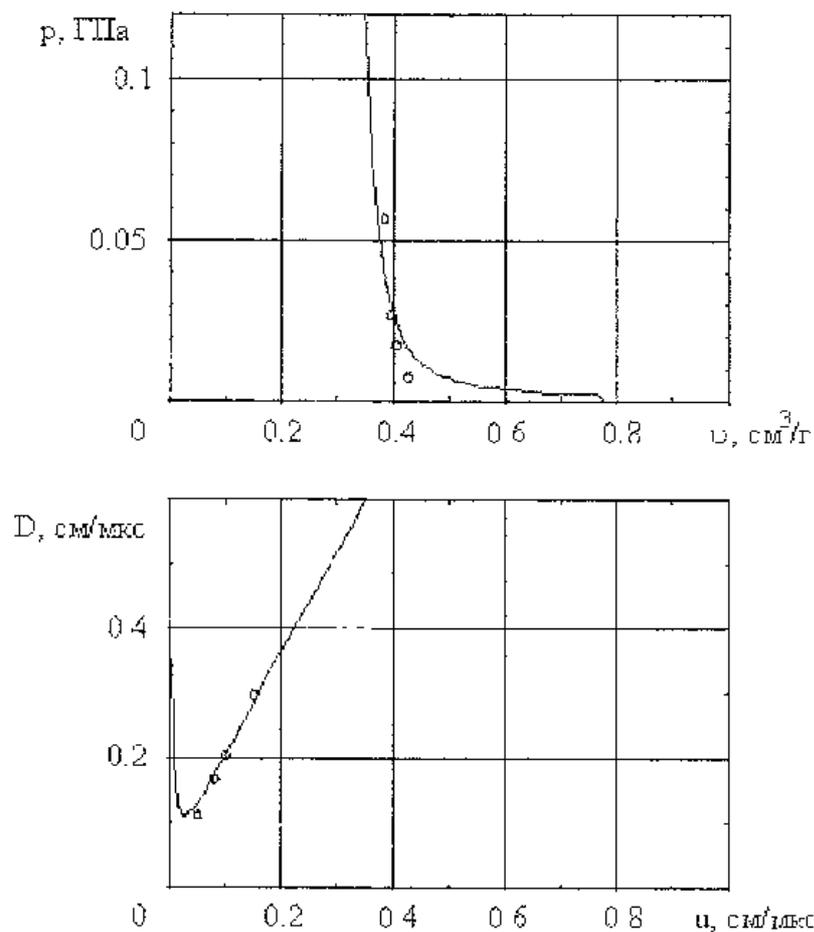


Рис. 5.19. Ударная адиабата сухого песка плотностью  $\rho_0=1,29 \text{ г/см}^3$

$\rho_0=1,29 \text{ г/см}^3$  и влажного ( $w_0=28\%$ ) песка с начальной плотностью  $\rho_0=1,8 \text{ г/см}^3$ . Диаметр песчинок  $d=0,07 \text{ мм}$ . Кружочками обозначены экспериментальные точки [48].

Ниже приводятся результаты сравнительного анализа проникания в сухой песок стальных ударников цилиндрической и звездообразной формы при ударе в нормаль. Скорость удара  $1000 \text{ м/с}$ . Масса ударников  $3 \text{ г}$ . Рассмотрено 4 варианта формы ударников: 1 – компактный цилиндрический (высота равна диаметру  $d$ ), 2 – цилиндрический высотой  $3d$ , 3 – заостренный звездообразный ударник с четырьмя лучами, размах которых равен диаметру ударника

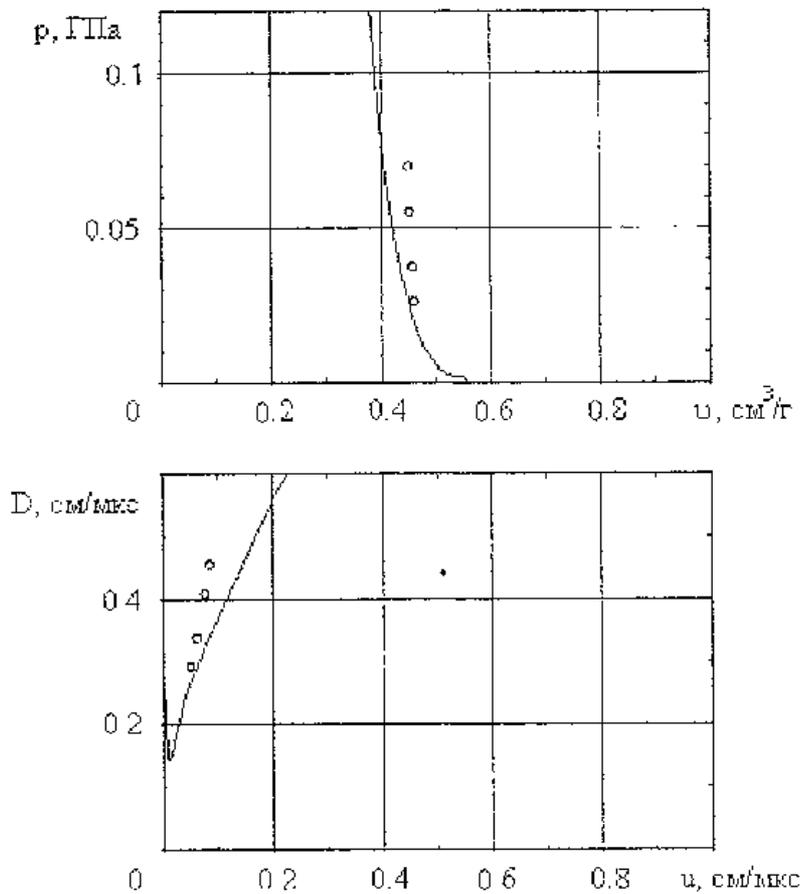


Рис. 5.20. Ударная адиабата влажного песка ( $w_0=28\%$ ) с начальной плотностью  $\rho_0=1,8 \text{ г/см}^3$ .

1, 4 – заостренный звездообразный ударник с четырьмя лучами, размах которых равен диаметру ударника 2. Решение задачи проведено в трехмерной постановке численным методом [46].

Поведение материала ударника описывается в рамках модели пористой упруго-пластической среды. Отрывное разрушение рассматривается как процесс роста и слияния пор в пластически деформированном материале под действием растягивающих напряжений. Критерием отрывного разрушения является критическая величина относительно объема пустот.

Критерисм сдвигового разрушения является предельная величина работы пластических деформаций [2].

На рис. 5.21, 5.22–5.23 (цв. вклейка) приводятся картины проникания ударников 1, 2, 4 в моменты времени 40 и 76 мкс, полученные при сечении области расчета плоскостью симметрии. На рис. 5.24 представлены зависимости падения скорости  $v$  и относительной глубины проникания ударников  $h/d$  от времени процесса.

Для рассмотренных случаев проникания характерным является формирование конусообразной каверны с вытеснением части материала на лицевую поверхность. При этом ударник контактирует с песчаной средой только головной частью. При внедрении цилиндрических ударников наблюдается деформация головной части. При этом скорость компактного ударника резко падает в начальной стадии проникания. Глубина проникания также сильно зависит от формы ударников. Очевидно, что по этому параметру звездообразные ударники имеют преимущество перед цилиндрическими при проникании в сыпучие среды.

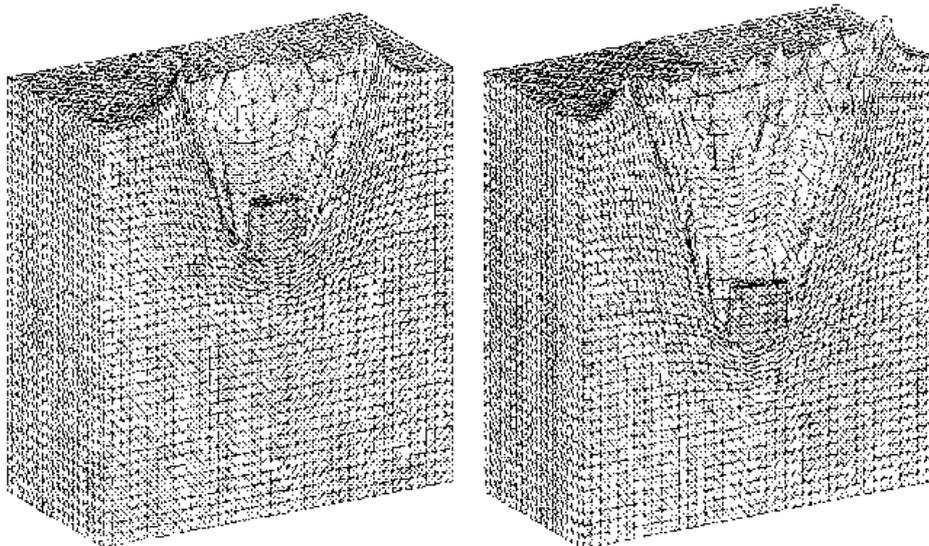


Рис. 5.21. Картины проникания в песчаный грунт компактного цилиндрического ударника со скоростью 1000 м/с в моменты времени 40 и 76 мкс

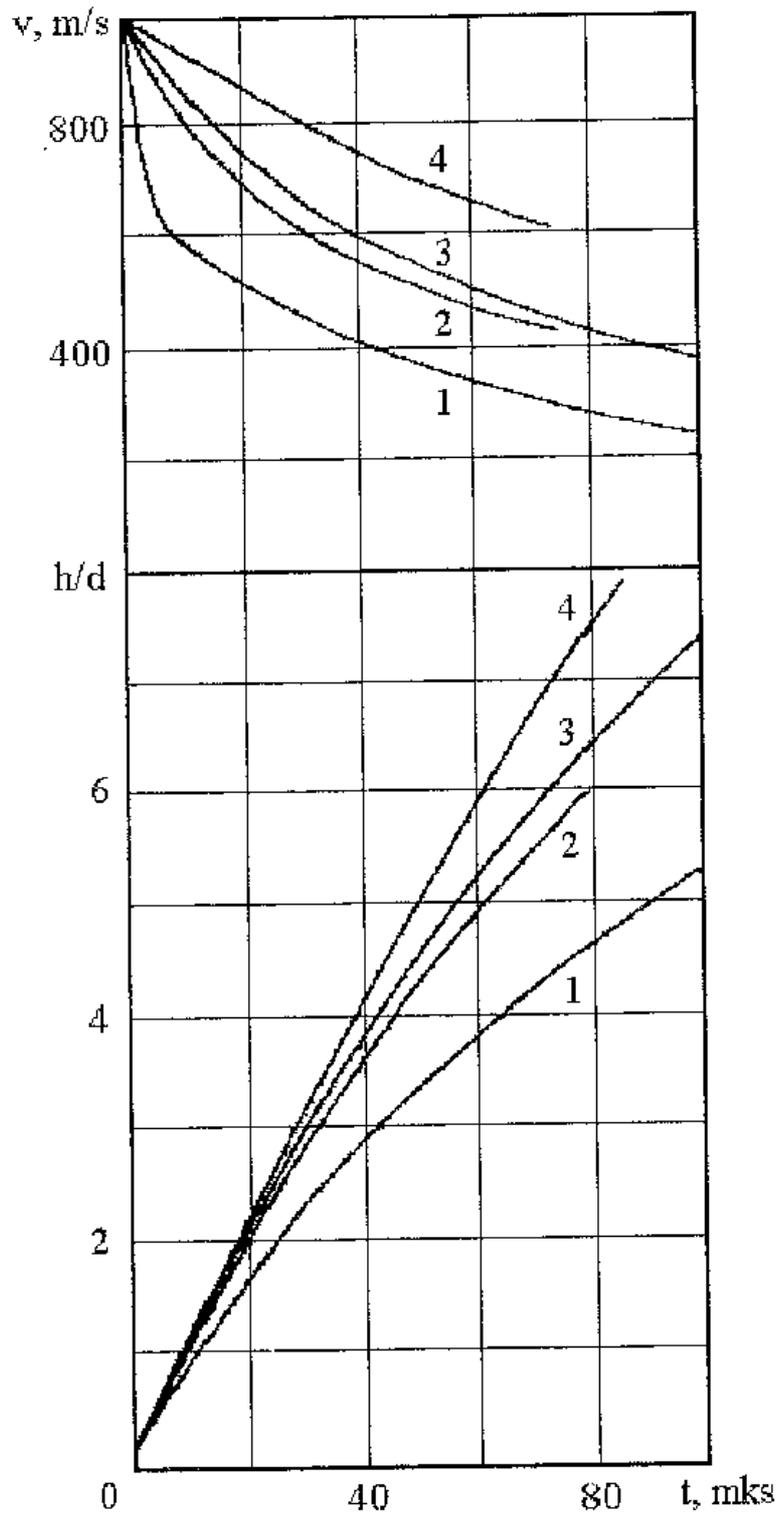


Рис. 5.24. Зависимости изменения скорости и относительной глубины проникания от времени процесса

### 5.2.2. Результаты математического моделирования соударения модельного снаряда с конструкциями из бетонных плит и песчаного грунта

При проектировании защитных конструкций подземных сооружений возникает необходимость оценки их способности противостоять интенсивным динамическим нагрузкам. Одним из эффективных подходов к решению данной проблемы является математическое моделирование процессов деформирования и разрушения таких конструкций при воздействии удара и взрыва. Рассмотрим метод расчета, позволяющий прогнозировать прочность конструкций, состоящих из слоев бетона и песчаного грунта, при внедрении в них и подрыве на различной глубине ударников, начиненных взрывчатым веществом [51].

Поведение твердого взрывчатого вещества при ударе описывается в рамках модели упруго-пластического тела с использованием гидродинамического уравнения состояния в виде (5.27). При этом считается, что детонация происходит мгновенно во всем объеме. Для расчета расширения продуктов взрыва твердых ВВ используется эмпирическое уравнение состояния [10, 49]:

$$p = A\rho^n + \gamma\rho\varepsilon,$$

где  $\gamma = \gamma_0 + c\rho$ ;  $c = \frac{\gamma_H - \gamma_0}{\rho_H}$ ;  $\rho_H$ ,  $D_H$  — плотность и скорость детонационной волны в точке Чепмена–Жуге;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия. Численные значения параметров уравнения состояния ВВ ТГ 50/50 и продуктов взрыва

представлены в таблице 5.4.

В рамках предложенной выше модели проведено решение задачи о взаимодействии стального цилиндрического ударника диаметром  $d_0 = 7,6$  мм и удлинением  $4d_0$  с двумя типами преград.

Первая преграда представляет собой двухслойную кон-

Таблица 5.4

ВВ	$\rho_{m0}$ г/см <sup>3</sup>	$\epsilon_{m0}$ см/мкс	$q_{m0}$	$\gamma_0$	$\gamma_{II}$	$n$	$A\rho_H^{n-1}/D_H^2$
ТГ 50/50	1,67	0,271	1,86	0,2	0,87	0,25	0,1173

струкцию, состоящую из слоя сухого песка толщиной  $5,6d_0$  и слоя мелкозернистого бетона толщиной  $3,68d_0$ . Во второй преграде первый и третий слой состоят из мелкозернистого бетона, между которыми располагается слой сухого песка. Толщина всех слоев одинакова и составляет  $2,98d_0$ .

На рис. 5.25 а, б (цв. вклейка) приведены сечения изометрических проекций конфигураций ударника и преграды первого типа в моменты времени 338 и 542 мкс. Скорость удара 420 м/с, угол встречи  $20^\circ$ .

При прохождении ударником песчаного слоя в нем формируется наклонная цилиндрическая каверна. Падение скорости при подходе ударника к границе раздела материалов 26%. Ударник начинает проникать сквозь слой бетона со скоростью 320 м/с. На отрезке времени до 221 мкс наблюдается резкое торможение. В этот момент времени начинается разрушение бетона. Трещина выходит на тыльную поверхность к 300-й мкс. В дальнейшем происходит фрагментация бетона у тыльной поверхности, разлет осколков и их последующее дробление. Продвижение ударника по разрушенному материалу сопровождается менее интенсивным падением скорости и его депортализацией в плоскости симметрии преграды. Время проникания ударника через преграду 542 мкс, остаточная скорость 42 м/с, угол выхода из преграды  $30^\circ$ . Ударник испытывает незначительную деформацию головной части.

При взаимодействии ударника с данными начальными условиями соударения со вторым типом преграды отмеча-

ется лишь пробитие первого слоя бетона и проникание сквозь слой песка. Затем ударник начинает внедряться в третий слой и останавливается. Деформация ударника наблюдается уже при взаимодействии с первым слоем бетона. Таким образом, пробития ударником второго типа преграды при указанных условиях не происходит.

На рис. 5.26 а, б (цв. вклейка) приведены сечения изометрических проекций конфигураций ударника и преграды второго типа в моменты времени 92 и 198 мкс. Начальная скорость ударника составляла 800 м/с, угол встречи  $20^\circ$ .

Анализ результатов расчета свидетельствует, что пробитие первого слоя бетона происходит к моменту времени 48 мкс. Скорость ударника в этот момент времени равна 512 м/с. Проникание ударника сквозь слой песка заканчивается к моменту времени 92 мкс. Скорость ударника при этом составляет 425 м/с. Последующее проникание в третий слой из бетона сопровождается интенсивным его разрушением. К моменту времени 118-й мкс отмечается фрагментация бетона на тыльной поверхности преграды и отделение от нее первых осколков, а к 198-й мкс наряду с мелкими осколками наблюдается отделение от преграды крупного куска бетона и движение его вниз. После пробития преграды скорость ударника составляет 235 м/с. Кроме этого, увеличение начальной скорости соударения с 420 до 800 м/с приводит к сильным пластическим деформациям и изменению конфигурации передней части ударника, которая принимает полусферическую форму.

Ниже приведены результаты численного расчета взаимодействия ударника аналогичной геометрии, но содержащего заряд ВВ, с преградой второго типа. Скорость удара 800 м/с, угол встречи  $20^\circ$ . Был смоделирован процесс проникания данного ударника в преграду, подрыв ВВ при приближении ударника к тыльной поверхности преграды, а также воздействие продуктов взрыва на процесс деформирования и разрушения преграды.

На рис. 5.27 а, б, в (цв. вклейка) приведены сечения изометрических проекций конфигураций ударника и преграды второго типа в моменты времени 168, 170 и 180 мкс. Красный цвет в ударнике соответствует области, занятой ВВ. Анализ результатов показывает, что пробитие первого слоя бетона происходит к моменту времени 50 мкс. Скорость ударника в этот момент времени составляет 459 м/с. Проникание ударника сквозь слой песка заканчивается к моменту времени 104 мкс, скорость падает до 363 м/с.

В связи с тем, что ударник представляет собой, по сути, стальную оболочку, заполненную ВВ, то наблюдаются значительно большие деформации головной части, нежели в предыдущем случае, кроме того, имеет место изгиб ударника, не наблюдавшийся в других вариантах расчета.

Детонация ВВ происходит в момент времени 168 мкс, когда скорость ударника составляет 191 м/с. Максимальное давление продуктов реакции ВВ составляет 26 ГПа.

На рис. 5.27 б (цв. вклейка) видно расширение продуктов разложения ВВ и вздутие стальной оболочки ударника. В дальнейшем происходит взаимодействие осколков разрушенной оболочки и продуктов реакции ВВ с материалами (песок, бетон) преграды. На рис. 5.27 в (цв. вклейка) показана конфигурация преграды к моменту времени 180 мкс. Ударник и продукты разложения ВВ на рисунке не приведены. Видно катастрофическое разрушение преграды, которое со временем станет еще большим, так как максимальное давление в продуктах реакции к данному моменту времени еще значительное и составляет приблизительно 5 ГПа.

### **5.2.3. Расчет прочности железобетонных стен обстройки реакторного отделения АЭС на действие от летящего предмета**

Рассмотрим решение следующей задачи. Стальной цилиндрический ударник массой 164,6 кг, высота которого

равна диаметру и составляет 300 мм, взаимодействует с железобетонной прямоугольной плитой толщиной  $H_0$  ( $H_0=600$  мм) со скоростью  $u_0$ .

Армирование плиты выполнено двумя сетками с ячейей  $120 \times 120$  мм арматурой класса А III диаметром 32 мм. Сетки симметрично расположены в плите относительно ее срединной поверхности с защитным слоем 30 мм.

При решении задачи возникают трудности вычислительного характера, связанные с видом армирования плиты (класс арматуры и ее диаметр) в каждом расчетном случае. Учитывая реальные размеры железобетонной плиты и шага арматуры, можно сделать вывод, что при таком подходе реализуются достаточно мелкие шаги, как по пространству, так и по времени интегрирования. Это приводит к непомерно большим затратам машинного времени.

Чтобы снизить объем вычислений, в расчетную схему вносятся изменения. В этом случае слой бетона с арматурой (рис. 5.28) заменяется в расчете упруго-пластической средой, представляющей собой гомогенную двухфазную смесь материалов железа и бетона, начальная плотность которой  $\rho_{0жс}$  определяется по формуле:

$$\rho_{0жс} = V_1 \rho_{0с} + V_2 \rho_{0б},$$

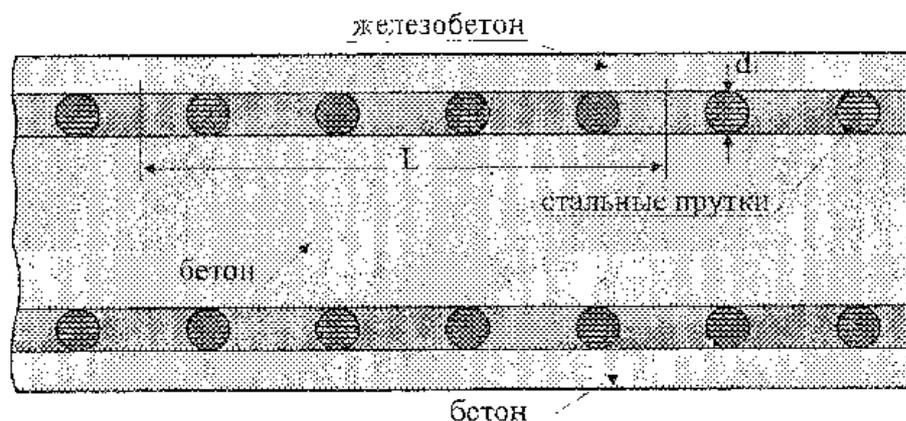


Рис. 5.28. Схема железобетона

где  $v_1, v_2, \rho_{0c}, \rho_{0б}$  - начальные объемные концентрации и плотности стали и бетона ( $v_1 + v_2 = 1$ ). Объемные концентрации определяются через площади, занятые железом и бетоном в сечении, перпендикулярном направлению прутка:

$$v_1 = \frac{\pi n d_1^2}{4L}, \quad v_2 = 1 - v_1,$$

где  $L$  - длина,  $n$  - число прутков в полосе на длине  $L$ ,  $d_1$  - диаметр прутка.

Уравнение состояния железобетона (смеси) строится аналогично тому, как было сделано для матричного материала песчаного грунта.

Уравнение состояния железобетона имеет вид:

$$p = \frac{\rho_{0жс} c_0^2 \left(1 - \frac{\gamma_0 \eta}{2}\right) \eta}{(1 - q\eta)^2} + \gamma_0 \rho_{0жс} \varepsilon,$$

где  $\eta = 1 - \rho_{0жс} v$ ;  $v$  - удельный объем смеси;  $\gamma_0$  - коэффициент Грюнайзена;  $v_{0жс} = \frac{1}{\rho_{0жс}}$ .

Коэффициенты  $c_0, q$  линейной зависимости скорости ударной волны  $D$  в смеси от массовой скорости  $u$ :

$$D = c_0 + qu,$$

определяются через ударные адиабаты компонентов смеси:

$$D_i = c_{i0} + q_{i0} u_i \quad (i=1, 2).$$

В переменных  $(v, p)$  ударная адиабата смеси имеет вид:

$$v(p) = \sum_{i=1}^2 m_i \left\{ v_{i0} - \frac{1}{p} \left[ \frac{c_{i0}}{q_{i0}} \sqrt{\frac{p}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right]^2 \right\},$$

где  $m_i = \frac{v_i \cdot \rho_{i0}}{\rho_{0ж}}$  — массовые концентрации стали ( $i=1$ ) и бетона ( $i=2$ ) в железобетоне ( $m_1 + m_2 = 1$ ,  $\rho_{10} = \rho_{0с}$ ,  $\rho_{20} = \rho_{0б}$ ).

Используя для смеси соотношения на ударной волне:

$$D = v_{0жс} \sqrt{\frac{p}{v_{0жс} - v(p)}},$$

$$u = \sqrt{p(v_{0жс} - v(p))},$$

можно построить зависимость скорости ударной волны от массовой скорости и определить коэффициенты  $c_0$  и  $q$ .

Скорость звука  $c_0$  можно рассчитать и по формуле:

$$\frac{1}{c_0} = \sum_{i=1}^2 \frac{v_i}{c_{i0}}.$$

Коэффициент Грюнайзена  $\gamma_0$  для смеси определяется из следующего соотношения:

$$\frac{v_{0жс}}{\gamma_0} = \sum_{i=1}^2 m_i \frac{v_{i0}}{\gamma_{i0}}.$$

Модуль сдвига смеси  $\mu$  и предел текучести  $\sigma$  рассчитываются по формулам:

$$\mu = \frac{1}{\frac{v_1}{\mu_1} + \frac{v_2}{\mu_2}}, \quad \sigma_s = m_1 \sigma_{s1} + m_2 \sigma_{s2},$$

где  $\mu_i$  и  $\sigma_{si}$  — соответственно модуль сдвига и предел текучести компонентов смеси.

Используемые в расчетах константы уравнений состояния и модели приведены в таблице 5.5. В отличие от бетона, который разрушается хрупко, однородная двухфазная смесь из железа и бетона разрушается так же, как пластич-

Таблица 5.5

Материал	$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	$c_0$ , км/с	$q$	$\sigma_s$ , ГПа	$\mu$ , ГПа	$a_s$ , ГПа	%	$m_1$
железо	7,85	4,57	1,49	0,328	790	0,218	2	-
бетон	2,2	2,33	1,51	-	1,7	-	2	-
смесь железа и бетона $\nu_1=0,2$	3,33	2,58	1,5	0,13	2,1	0,086	2	0,4715
смесь железа и бетона $\nu_1=0,33$	4,08	2,78	1,49	0,21	2,52	0,15	2	0,64

ные материалы. Модель вязкого разрушения пластичных материалов подробно изложена в разделе 5.1.5. Отрывное разрушение в материале рассматривается как процесс роста и слияния пор под действием растягивающих напряжений. Локальным критерием разрушения при таком подходе является предельная величина относительного объема пустот в элементе материала. В качестве локального критерия сдвигового разрушения среды используется критерий, основанный на предельной величине работы пластических деформаций  $A^p$ . Считается, что при  $A^p = A^p$  элемент материала разрушается. В нем появляются трещины, раскрытие которых происходит при возникновении растягивающих напряжений. Разрушенный материал ведет себя как гранулированная среда, которая выдерживает сжимающие и сдвиговые усилия, но не выдерживает растягивающих напряжений.

Методом компьютерного моделирования исследовалось влияние скорости удара и армирования плиты на процессы разрушения железобетонных плит. Расчет проведен для трех скоростей удара: 50, 300, 500 м/с. Результаты математического моделирования приведены в таблице 5.6.

тического моделирования представлены на рис. 5.29–5.45 (цв. вклейка).

Было рассмотрено три типа мишеней:

- бетонная плита;
- железобетонная плита со стальной арматурной решеткой;
- железобетонная плита, в которой на расстоянии 5 см от лицевой и тыльной поверхностей расположены стальные листы толщиной 1 см.

В расчетах армированные стальной решеткой и стальным листом слои заменялись однородной двухфазной смесью из стали и бетона плотностью  $2,2 \text{ г/см}^3$  и  $3,33 \text{ г/см}^3$  соответственно. Замена, например, стального листа с бетоном однородной смесью из бетона и стали, уменьшает время расчета на порядок. В то же время анализ численных результатов не выявил существенных различий в замене. На рис. 5.29 (цв. вклейка) представлены в момент времени 0,7 мс картины деформации и разрушения в плите, содержащей стальные листы, при ударе по ней стальным цилиндрическим ударником массой 164,6 кг со скоростью 500 м/с. Здесь же приведено поле давлений в ней. Для сравнения в этот же момент времени представлены на рис. 5.30 (цв. вклейка) данные расчета, в котором стальные листы с бетоном заменены однородной смесью толщиной 3 см ( $\rho_0 = 3,33 \text{ г/см}^3$ ).

В обеих плитах к данному моменту времени произошел лицевой откол и началось выкрашивание материала с тыльных поверхностей. Ударник внедрился в плиты практически на одну и ту же глубину. Расхождение между скоростью ударника в бетонной плите, армированной стальными листами, и скоростью ударника в плите, содержащей вместо стальных листов однородную смесь из стали и бетона, составляет 3,3%. Есть незначительное расхождение и в уровне возникающих напряжений. В данный момент времени обе плиты подвергнуты действию сжимающих на-

пряжений. Максимальные сжимающие напряжения достигаются на некотором расстоянии от поверхности контакта с ударником. Уровень давления в этой области в плите, армированной стальными листами,  $0,08 \text{ ГПа} < p < 0,26 \text{ ГПа}$ , а во второй –  $0,05 \text{ ГПа} < p < 0,23 \text{ ГПа}$ . Расхождение связано не только с заменой, а вызвано также использованием различной разностной сетки. Шаг по координате в первом варианте в три раза меньше, чем во втором.

При скорости удара 50 м/с (рис. 5.31, цв. вклейка) процесс взаимодействия ударника с бетонной плитой продолжится только 0,4 мс, а затем со скоростью 11 м/с ударник отскакивает от нее. Относительная глубина внедрения  $H/d_0=0,03$ .

Максимальные сжимающие напряжения достигаются в области материала, прилегающей к контактной поверхности ( $0,17 \text{ ГПа} < p < 0,29 \text{ ГПа}$ ). В ней до глубины примерно  $0,6d_0$  материал разрушен и зажат. Что касается материала ударника, то он практически разгружен. Вблизи поверхности контакта в нем действуют растягивающие напряжения, уровень которых недостаточен для роста микродефектов ( $-0,16 \text{ ГПа} < p < -0,05 \text{ ГПа}$ ).

На рис. 5.32–5.35 (цв. вклейка) представлены результаты расчета процесса ударного взаимодействия стального ударника с железобетонной плитой со скоростью 500 м/с. На них изображены в различные моменты времени картины деформации и разрушения в железобетонной плите и поля давлений в ней, по которым можно судить о волновой картине процесса.

В момент времени 0,1 мс ударник в плите достиг первого армированного слоя бетона. По плите в сторону тыльной свободной поверхности распространяется ударный фронт, за которым давление достигает величины 0,73 ГПа. Ударная волна к этому моменту распространилась от поверхности контакта с ударником на расстояние, равное

диаметру ударника  $d_0$ . От лицевой свободной поверхности вглубь ударно-сжатого бетона распространяются волны разгрузки, понижающие уровень сжимающих напряжений. Скорость ударника упала до 446 м/с. Относительная глубина внедрения  $H/d_0=0,14$ .

Пробитие первого армированного слоя происходит к моменту времени 0,3 мс. На этот момент ударная волна в бетоне, достигнув второго армированного слоя, расщепилась на проходящую в армированный слой и отраженную в бетон ударные волны, что привело к увеличению уровня сжимающих напряжений в бетоне. Ударная волна во втором армированном слое при выходе на поверхность раздела с бетоном расщепляется на проходящую в бетон ударную волну и отраженную волну разгрузки. К моменту времени 0,3 мс произошло отражение ударной волны от тыльной свободной поверхности в виде волн разгрузки. Происходит взаимодействие встречных волн разгрузки, распространяющихся от свободных тыльной и лицевой поверхностей. В результате этого материал у свободной тыльной поверхности и в армированном слое подвергнут воздействию растягивающих усилий величиной до  $-0,11$  ГПа. Действию растягивающих усилий подвергнут и бетон под ударником ( $-0,11$  ГПа  $< p < 0,02$  ГПа). Практически вся железобетонная плита, за исключением рассмотренных выше областей, подвергнута действию сжимающих напряжений величиной до 0,15 ГПа. Скорость ударника на этот момент времени достигает величины 400 м/с, а относительная глубина проникания  $H/d_0=0,42$ .

Процесс откольного разрушения с тыльной поверхности железобетонной плиты начинается с момента 1 мс. Практически вся плита подвергнута сжимающим усилиям величиной до 0,12 ГПа. Максимальные сжимающие напряжения величиной до 0,25 ГПа достигаются в бетоне под ударником. Глубина проникания ударника в бетон  $H/d_0=1,25$ , а скорость внедрения упала до величины 303

м/с. Пробитие второго армированного слоя, а следовательно, и всей железобетонной плиты произошло в момент времени 2 мс. Расчет приведен до момента 2,9 мс. В запресеченном пространстве ударник имеет скорость 232 м/с. В плите произошел откол материала как с лицевой, так и с тыльной поверхностей диаметром до  $3d_0$ . В обоих армированных слоях образовались отверстия диаметром  $1,22 d_0$ . Армированные слои оголились. В бетоне отверстие по форме напоминает фигуру, состоящую из цилиндра высотой  $0,6d_0$  и диаметром  $1,22d_0$  и усеченного конуса с нижним основанием у поверхности второго армированного слоя диаметром  $3,1d_0$ .

Для исследования влияния армирования бетонной плиты на процесс внедрения стального компактного цилиндрического ударника было рассмотрено решение задачи для трех типов мишеней:

- железобетонная плита (мишень №1);
- железобетонная плита, в которой арматурная решетка заменена стальным листом толщиной 1 см (мишень №2);
- бетонная плита (мишень №3).

Скорость удара во всех трех вариантах одинакова и равна 300 м/с. Данные математического моделирования представлены на рис. 5.36–5.45 (цв. вклейка). Результаты сравнения по глубине внедрения в мишени и скорости ударника в различные моменты времени процесса представлены в таблице 5.6.

К моменту времени 0,5 мкс ударник как в мишени №1, так и в мишени №2 пробил первый слой армирования и внедрился на одну и ту же глубину  $H/d_0=0,39$ . Однако скорость внедрения ударника после пробития армированного слоя во второй мишени выше, чем в первой. В первой мишени она упала до 214 м/с, во второй – до 225 м/с.

В бетонной плите ударник внедрился на относительную глубину 0,42, его скорость составила 240 м/с. Таким обра-

Таблица 5.6

Плита	Мишень №1		Мишень №2		Мишень №3			
	Время, мс	$H/d_0$	$u$ , м/с	$H/d_0$	$u$ , м/с	Время, мс	$H/d_0$	$u$ , м/с
	0,2	0,17	246	0,17	244	0,2	0,17	254
	0,5	0,39	214	0,39	225	0,5	0,42	240
	1,8	1,16	141	1,18	144	1,8	1,25	151
	3,5	1,84	89	1,87	107	3,5	1,98	119
	4,5	2,14	85	2,19	93	4,3	2,3	116
	5,2	2,34	84	2,41	93			

зом, в зависимости от способа армирования потеря скорости ударником составила от 26 м/с до 15 м/с. Мишени №1 и №2 подвергнуты в момент времени 0,5 мс воздействию сжимающих напряжений. Уровень давлений в них практически одинаков. В мишени №1 давление изменяется от 0,05 ГПа до 0,13 ГПа, в мишени №2 – от 0,04 ГПа до 0,14 ГПа.

В момент времени 1,8 мс в мишени №1 ударник внедрился на глубину  $1,16d_0$ , во второй – на  $1,18d_0$ . Обе плиты, как и в момент времени 0,5 мс, подвергнуты воздействию сжимающих напряжений ( $0,06 \text{ ГПа} < p < 0,19 \text{ ГПа}$ ). С тыльной поверхности мишени в обоих вариантах расчета произошло откольное разрушение. К этому моменту времени тыльный откол образовался и в бетонной плите (мишень №3). Вся плита подвергнута действию сжимающих напряжений, уровень которых почти вдвое выше, чем в рассмотренных выше железобетонных мишенях ( $0,1 \text{ ГПа} < p < 0,26 \text{ ГПа}$ ).

Максимальные значения достигаются в области контакта с ударником. Относительная глубина проникания ударника в бетонную плиту на момент времени 1,8 мс  $H/d_0=1.25$ , а его скорость упала до величины 151 м/с.

Пробитие бетонной плиты практически произошло к

моменту времени 3,5 мс. Ударник к этому моменту внедрился на глубину  $H/d_0=1,98$  мс, а его скорость составила 119 м/с. Расчет проведен до момента времени 4,3 мс. В бетонной плите образовался кратер, по форме напоминающий конструкцию из двух усеченных конусов с общим основанием  $1,8d_0$ . Диаметр верхнего основания  $2,2d_0$ , нижнего –  $2,1d_0$ . Скорость ударника в запреградном пространстве 116 м/с.

К моменту времени 3,5 мс ударники как в мишени №1, так и в мишени №2 достигли слоев армирования. Скорость внедрения в них понизилась соответственно до 89 м/с и 107 м/с. Пробоитис второго армированного слоя, а следовательно, и мишени заканчивается к моменту времени 4,5 мс. Расчет проведен до 5,2 мс. В запреградном пространстве ударники имеют скорости 85 м/с и 93 м/с. Различие составляет 8,6%. Сквозные отверстия в мишенях несколько отличаются по форме. В первой мишени вследствие откольного разрушения бетон над первым армированным слоем полностью выкрошился. Как в первом, так и во втором армированных слоях образовались сквозные отверстия диаметром  $1,2d_0$ . С тыльной стороны плиты в бетоне произошел откол диаметром  $3d_0$ . Отверстие в бетоне по форме напоминает фигуру, состоящую из цилиндра диаметром  $1,2d_0$  и высотой  $0,9d_0$  и усеченного конуса, верхнее основание которого является нижним основанием цилиндра. Диаметр нижнего основания равен  $2,2d_0$ . Во второй мишени вследствие лицевого откола оголился армированный слой диаметром  $2,8d_0$ . В первом и во втором армированных слоях образовались сквозные отверстия диаметром  $1,2d_0$ . С тыльной стороны мишени произошел откол диаметром  $2,1d_0$ . Отверстие в бетоне напоминает фигуру, составленную из двух усеченных конусов, между которыми находится цилиндр диаметром  $1,2d_0$  и высотой  $0,6d_0$ . Верхнее основание конуса, опирающееся на первый армированный слой

основания конуса, опирается на второй слой армирования и равен  $2,25d_0$ .

Таким образом, армирование бетонной плиты для данного ударника приводит к потере запреградной скорости в зависимости от способа армирования от 20% для мишени №2 и до 26,7% для мишени №1.

### ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 5

1. *Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др.* Высоко-скоростное взаимодействие тел. — Новосибирск: Издательство СО РАН, 1999. — 600 с.
2. *Белов И.Н., Демидов В.Н., Ефремова Л.В. и др.* Компьютерное моделирование динамики высокоскоростного удара и сопутствующих физических явлений // Изв. ВУЗов. Физика. — 1992. — №8. — С. 5—48.
3. *Высокоскоростные ударные явления* / Пер. с англ. под ред. В.Н. Николаевского. — М.: Мир, 1973. — 457 с.
4. *Динамика удара* / Пер. с англ. под ред. С.С. Григоряна. М.: Мир, 1985. — 296 с.
5. *Исаев А.Л.* Влияние армирования бетона на результаты динамического нагружения внедряющими телами // Экстремальное состояние вещества. Детонация. Ударные волны. Труды межд. конф. "III Харитонования научные чтения". — Саров: ВНИИЭФ, 2002. — С. 150—156.
6. *Уилкинс М.Л.* Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967. — С. 212—263.
7. *Абакумов А.И., Логинов П.Б., Низовцев П.П. и др.* Экспериментальное исследование и расчетное моделирование динамического деформирования железобетонных элементов конструкций // Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения.

- Сборник докладов II научной конференции Волжского регионального центра РАН. – Саров: РФЯЦ – ВНИИ-ЭФ, 2003. – С. 466–473.
8. *DANKO* – пакет прикладных программ для решения в трехмерной постановке задач нестационарного деформирования элементов конструкций АЭС. Паспорт аттестации ПС Госатомэнергонадзора России №79 от 18.12.97 г.
  9. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 536 с.
  10. *Баум Ф.А., Орленко Л.П., Станюкович К.П. и др.* Физика взрыва. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
  11. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. – М.: Наука, 1966. – 232 с.
  12. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды, – Т. 2. – М.: Наука, 1973. – 584 с.
  13. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 465 с.
  14. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упруго-пластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
  15. *Григорян С.С.* Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ. – 1960. – Т. 24. – Вып. 6. – С. 1057–1072.
  16. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
  17. *Шемергор Г.Д.* Теория упругости микронесоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
  18. *Черемской И.Г., Слезов В.В., Бетехин В.И.* Поры в твердом теле. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 376 с.
  19. *Johnson J. N.* Dynamic fracture and spallation in ductile Solids //J. Appl. Phys. – 1981.– V. 52. – №4. – P. 2812–2825.

20. *Herrman W.* Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials // *J. Appl. Phys.* – 1969. – V. 40. – №6. – P. 2490–2499.
21. *Carrol M.M., Holt A.C.* Static and dynamic porecollapse relations for ductile porous materials // *J. Appl. Phys.* – 1972. – V. 43. – №4. – P. 1626–1635.
22. *Глушак Б.Л., Куропатенко В.Ф., Новиков С.А.* Исследование прочности материалов при динамических нагрузках. – Новосибирск: Наука, 1992. – 295 с.
23. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1966. – 698 с.
24. *Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортков В.Е.* Ударно-волновые явления в конденсированных средах. – М.: Янус-К, 1996. – 408 с.
25. *Афанасьева С.А., Белов Н.Н., Толкачев В.Ф., Хабибуллин М.В., Югов Н.Т.* Особенности ударно-волнового деформирования пористой керамики  $Al_2O_3$  // *ДАН.* – 1999. – Т. 368. – №4. – С. 447–479.
26. *Белов Н.Н., Югов Н.Т., Афанасьева С.А., Коняев А.А., Копаница Д.Г., Толкачев В.Ф., Хабибуллин М.В., Инжелевский П.М.* Исследование процессов деформирования и разрушения хрупких материалов // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2001. – Т. 7. – №2. – С. 131–142.
27. *Жуков А.В.* Интерполяционное широкодиапазонное уравнение состояния металлов в переменных: давление, плотность, энергия // *Механика деформируемого твердого тела: Сборник статей.* – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 1980. – С. 23–28.
28. *Жуков А.В.* Уравнение кривой плавления металлов при высоких давлениях. Прикладные вопросы деформированных тел. Сборник статей. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 1980. – С. 23–28.

29. Жуков А.В. Расчет изэнтроп расширения в двухфазной жидкость – пар области // Механика быстро проникающих процессов: Сборник статей. – Новосибирск: ИГ СО АН СССР. – 1984. – С. 52–56.
30. Мак-Куин Р., Марш С., Тейлор Дж и др. Уравнение состояния твердых тел по результатам исследований ударных волн // Высокоскоростные ударные явления. – М.: Мир, 1973. – С. 299–427.
31. Жуков А.В. Константы и свойства уравнений состояния с линейной  $p$ - $\rho$ - $\epsilon$  связью // Механики деформируемого твердого тела: Сборник статей. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 1990. – С. 43–46.
32. Курран Д.Р. Динамическое разрушение // Динамика удара. – М.: Мир, 1985. – С. 257–293.
33. Никифоровский В.С., Шемякин Е.И. Динамическое разрушение твердых тел. – Новосибирск: Наука, 1979. – 272 с.
34. Курран Д.Р., Симэн Л., Шоки Д.А. Микроструктура и динамика разрушения // Ударные волны и явления высокоскоростной деформации металлов. – М.: Металлургия, 1984. – С. 387–412.
35. Белов П.Н. Корнеев А.И., Николаев А.П. Численный анализ разрушения в плитах при действии импульсивных нагрузок // ПМТФ. – 1985. – №3 – С. 132–136.
36. Удар, взрыв, разрушения / Под ред. В.Н. Николаевского. – М.: Мир, 1981. – 240 с.
37. Seaman L, Curran D.R., Shockey D.A. Computational models for ductile and brittle fracture // J. Appl. Phys. – 1976. – V. 11. – P. 4814–4826.
38. Хеллан К. Введение в механику разрушения. – М.: Мир, 1988. – 364 с.
39. Майнчен Дж., Сак С. Метод расчета «Тензор»// Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 185–212.

40. *Gust W.H., Royce E.B.* Dynamic yield strengths of  $B_4C$ ,  $BeO$  and  $Al_2O_3$  ceramics // *J.Appl Phys.* – 1971. – V. 42. – №1. – P. 276–295.
41. *Rajendran A.M., Kroupa J.L.* Impact damage model for ceramic materials // *J.Appl Phys.* – 1971. – V. 68. – №8. – P. 3560–3565.
42. *Исаев А.Л., Велданов В.А.* Разрушение бетонной плиты при пробитии ее жестким индикатором // *Динамическая прочность и трещиностойкость конструкционных материалов. Сборник статей.* – Киев.: Изд-во Киевского высшего инженерного училища, 1988. – С. 134–139.
43. *Хабидуллин М.В.* Численное моделирование взаимодействия высокоскоростного ударника с системой пространственно разнесенных мишеней // *ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* – 1997. – Вып. 3. – С.18–24.
44. *Гениев Г.А., Киссюк В.Н.* К вопросу обобщения теории прочности бетона // *Бетон и железобетон.* – 1965. – №2. – С.16–29.
45. *Баженов Ю.М.* Бетон при динамическом нагружении. – М.: Изд-во литературы по строительству, 1970. – 272 с.
46. *Югов Н.Т.* Численный анализ трехмерного процесса деформирования и разрушения цилиндра и пластины при наклонном соударении // *Изв. АН. СССР. МТТ.* – 1990. – №1. – С. 112–117.
47. *Замышляев Б.В., Ефтерев Л.С.* Модели динамического деформирования и разрушения грунтовых сред. – М.: Наука, 1990.
48. *Брагов А.М., Гердюков Н.Н., Иолев А.Г. и др.* Экспериментальное изучение динамической сжимаемости мягких грунтов // *Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения.* – Саров: ВНИИЭФ, 2000. – С. 455–462.
49. *Ли Э.* Сильное расширение продуктов взрыва твердых ВВ: эмпирическое уравнение состояния, импульсные нагруз-

- ки, применение // Химическая физика процессов горения и взрыва. XII симпозиум по горению и взрыву. – Ч. III. – Черногоровка, 2000.
50. *Афанасьева С.А., Белов Н.Н., Югов Н.Т.* Проникание цилиндрических ударников в преграды из бетона и песчаного грунта // ДАН. – 2002. – Т. 387. – №5. – С. 1–4.
51. *Белов Н.Н., Югов Н.Т., Радченко А.В., Кумпяк О.Г., Копаница Д.Г., Валу́йская Л.А., Югов А.А.* Математическое моделирование процессов проникания ударников в преграды из песка и бетона // Проблемы и перспективы архитектуры и строительства. Доклады международной научно-технической конференции. ТГАСУ. – Томск: Изд-во ТГАСУ, 2003. – С. 41–49.

## ГЛАВА 6

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОБЛЕМ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

### Введение

В связи с существующими Эйлеровым и Лагранжевым подходами к описанию движения сплошной среды [1] различают конечно-разностные методы решения нестационарных задач механики сплошной среды, которые основываются на уравнениях движения либо в форме Эйлера, либо в форме Лагранжа [2]. Хотя по существу эти методы эквивалентны, тем не менее, как одним, так и другим присущи свои преимущества и недостатки.

В лагранжевых методах следят за движением фиксированных элементов массы, предполагая, что конечно-разностная сетка как бы жестко связана с материалом. Лагранжевы программы очень просты по концепции и позволяют легко удовлетворять граничным условиям на свободных поверхностях и на границах раздела между различными материалами, поскольку они определяются положением граничных узлов деформируемой вместе со средой лагранжевой сетки. В пользу лагранжевых методов свидетельствует еще и то обстоятельство, что даже не очень большое количество узлов расчетной сетки качественно верно описывает движение сплошной среды.

Вместе с тем, эти методы дают недостаточную точность

численных приближений при решении задач, связанных с очень сильными деформациями и искажениями среды. В отдельных случаях применение лагранжевых методов без перестроения разностной сетки становится просто невозможным из-за выворачивания расчетных ячеек и возникновения отрицательных объемов и масс.

Эйлеровы методы используют неподвижную сетку, связанную с пространством, в котором движется среда, и позволяют рассчитывать задачи с большими деформациями и перемещениями среды. В этом случае даже наличие турбулентности не вносит существенных осложнений.

В то же время к недостаткам эйлеровых методов относятся серьезные трудности, возникающие при расчете контактного взаимодействия тел с различными термодинамическими свойствами, а также сложная проблема определения свободных и контактных границ.

С целью преодоления недостатков, присущих эйлеровым и лагранжевым методам, разрабатываются совместные эйлерово-лагранжевые методы решения нестационарных задач механики сплошной среды. Применение этих методов открывает широкие перспективы для решения задач контактного взаимодействия разноплотных тел, подверженных большим деформациям.

Среди наиболее эффективных численных методов решения задач высокоскоростного соударения деформируемых твердых тел следует прежде всего отметить конечно-разностный метод, предложенный Уилкинсом [3], который долгое время являлся самым эффективным и, пожалуй, наиболее точным и распространенным лагранжевым методом. Кроме него назовем метод частиц в ячейках и родственные ему методы, развитые Харлоу и его коллегами в Лос-Аламосе, численный метод, основанный на Эйлеровом описании движения сплошной среды, методе маркеров и схеме Лакса-Вендроффа, метод Годунова, а также интенсивно развивающийся и пользующийся в последнес

время все большей популярностью метод конечных элементов (МКЭ). Хотя существует большое разнообразие формулировок (вариационный подход, метод взвешенных невязок, одной из разновидностей которого является метод Галеркина, и метод наименьших квадратов, а также метод минимизации потенциальной энергии и др.), метод конечных элементов может быть охарактеризован следующими свойствами:

- 1) физическая область задачи делится на подобласти или конечные элементы;
- 2) зависимая переменная (одна или несколько) аппроксимируется функцией специального вида на каждом конечном элементе и, следовательно, во всей области. Параметры этих аппроксимаций в последующем становятся неизвестными параметрами задачи;
- 3) подстановка аппроксимаций в определяющие уравнения (или эквивалентные им) дает систему множества уравнений с неизвестными параметрами. Решая эти уравнения, можно определить значения этих параметров и, следовательно, получить приближенное решение задачи.

В данном разделе представлена математическая модель пористой упругопластической среды, позволяющая адекватно описывать процессы деформирования и разрушения материалов различной структуры в условиях высокоскоростного соударения тел. Подробно изложена модификация численного МКЭ, предложенного ранее Джонсоном для решения двумерных и трехмерных задач высокоскоростного соударения деформируемых твердых тел [4–7]. Предлагается дальнейшее развитие алгоритма перестройки конечно-элементной модели, адаптированного для расчета разрушения твердых тел под действием не только сдвиговых деформаций (эрозийное разрушение), но и растягивающих напряжений (откольное разрушение). В результате появляется возможность адекватного моделирования про-

цесса соударения и более детального описания основных (сдвигового и отрывного) механизмов разрушения твердых тел. Такой подход существенно расширяет класс решаемых задач и диапазон начальных условий взаимодействия. Приведены результаты расчетов разнообразных задач высокоскоростного соударения, которые иллюстрируют возможности и перспективность представленного метода расчета для моделирования и анализа процессов, происходящих при ударе.

### **6.1. Физико-математическая постановка задачи о высокоскоростном взаимодействии деформируемых твердых тел**

#### **6.1.1. Замкнутая система уравнений динамики пористой упругопластической среды**

Будем рассматривать материал взаимодействующих тел как двухфазную среду, состоящую из твердого компонента-матрицы и включений — пор, представляющих собой пустоты, заполненные газом под некоторым давлением  $P_g$ . Обозначим объем пор в среде  $V_p$ , объем матрицы сплошного материала  $V_m$ . Тогда объем произвольно взятого элемента среды представим в виде  $V = V_p + V_m$ . Как обычно, введем величину  $\xi = V_p/V$ , называемую пористостью среды или относительным объемным содержанием газообразной фазы. Величина  $1 - \xi = V_m/V = 1/\alpha$  будет характеризовать относительное объемное содержание твердой фазы или матрицы. В дальнейшем, для удобства, будем оперировать параметром  $\alpha = V/V_m$ , который связан с пористостью среды соотношением  $\xi = (\alpha - 1)/\alpha$ . Предположим, что материал матрицы однороден и изотропен, форма пор близка к сферической, а их распределение по объему может быть охарактеризовано некоторым средним параметром  $\alpha$ . Система уравнений,

описывающих пространственное адиабатное движение пористой упруго-пластической среды, занимающей в трехмерном пространстве некоторый произвольный объем  $V$  и ограниченной поверхностью  $R$ , включает в себя основные законы сохранения и имеет следующий вид [1, 8]:

Закон сохранения массы:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0; \quad (6.1)$$

закон сохранения количества движения:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{v} dV = \int_R \bar{\sigma}_n dS + \int_V \rho \bar{F} dV; \quad (6.2)$$

уравнение энергии:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \varepsilon dV = \int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV, \quad (6.3)$$

где  $\rho = \rho_m / \alpha$  – плотность среды,  $\rho_m$  – плотность матрицы,  $\bar{v}$  – вектор скорости,  $\bar{\sigma}_n$  – вектор внешних поверхностных напряжений,  $\bar{F}$  – вектор плотности внешних массовых сил,  $\varepsilon$  – внутренняя энергия единицы массы,  $\sigma_{ij} = S_{ij} - P \delta_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $P$  – гидростатическое давление,  $e_{ij} = 0.5(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$  – компоненты тензора скоростей деформаций,  $v_i$  – компоненты вектора скорости.

Система уравнений замыкается определяющими соотношениями теории пластического течения Прандтля–Рейсса, уравнением состояния и кинетическим соотношением, описывающим эволюцию параметра среды  $\alpha$ . Компоненты девиатора скоростей деформаций связаны с компонентами девиатора напряжений следующим выражением [9]:

$$2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) = \frac{dS_{ij}}{dt} - S_{ik} \omega_{jk} - S_{jk} \omega_{ik} + \lambda S_{ij}, \quad (6.4)$$

где  $\mu = \frac{\mu_m}{\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{6K_m + 12\mu_m}{9K_m + 8\mu_m} \right) \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} \right]$  – модуль сдвига среды,

$\mu_m$  – модуль сдвига матрицы,  $K_m$  – объемный модуль сжатия матрицы.

Параметр  $\lambda=0$  при упругой деформации, а при пластической деформации всегда положителен и определяется с помощью условия текучести Мизеса:

$$S_{ij} S_{ij} = \frac{2}{3} (\sigma_{sm} / \alpha)^2, \quad (6.5)$$

где  $\sigma_{sm} = \sigma_{sm}(P, e_{ij}, T, \dots)$  – динамический предел текучести, который в общем случае является функцией скорости деформации, давления, температуры, а также некоторых других параметров.

Конкретное значение для параметра  $\lambda$  не приводится, так как в численном методе используется процедура приведения напряжений к кругу текучести, которая эквивалентна полным соотношениям (6.4), (6.5) [3].

Уравнение состояния выбирается в форме Ми–Грюнайзена, в котором давление является функцией плотности  $\rho$ , удельной внутренней энергии  $\varepsilon$  и параметра  $\alpha$ . Если известно уравнение состояния матричного материала, то уравнение состояния пористого материала имеет аналогичный вид, а давление в материале матрицы  $P_m = f(\rho_m, \varepsilon)$  и давление в пористой среде связаны соотношением  $P = P_m / \alpha$ , или, с учетом того, что  $\rho_m = \alpha \rho$ , имеет вид  $P = f(\alpha \rho, \varepsilon) / \alpha$ . При этом предполагается равенство внутренних энергий матричного и пористого материалов, то есть внутренняя энергия пористого материала определяется деформацией матричного «каркаса». Наиболее часто используемое в расчетах уравнение состояния имело вид [10]:

$$P = \left[ c_m^2 (\alpha \rho - \alpha_0 \rho_0) + n \rho_m \varepsilon \right] / \alpha, \quad (6.6)$$

где  $c_m$  — объемная скорость звука в материале матрицы,  $n$  — параметр, который по своему физическому смыслу представляет термодинамический коэффициент Грюнайзена  $\gamma_\sigma$ .

При выводе последнего замыкающего систему уравнений соотношения, описывающего эволюцию параметра среды  $\alpha$ , привлекаются модельные построения, основанные на предположении о том, что поведение среды с параметром  $\alpha_0$  и характерным размером пор  $a_0$  при динамическом нагружении аналогично поведению отдельной сферической поры (радиуса  $a_0$ ), окруженной сферической оболочкой (радиуса  $b_0$ ) матричного материала. Детальный анализ сконструированной таким образом простейшей модели элементарной ячейки пористого материала приведен в [11]. Пренебрегая поверхностной энергией пор и давлением в них газа  $P_g$ , а также предполагая, что поведение матричного материала описывается упруго-пластической моделью (6.4) с условием текучести Мизеса (6.5), и опуская малые по сравнению с другими членами с инерционным сопротивлением увеличения полостей пор, получаем кинетическое соотношение, описывающее изменение параметра  $\alpha$  при динамических нагрузках [2, 11]:

$$\alpha = -\frac{(\alpha_0 - 1)^{2/3}}{\eta} \alpha (\alpha - 1)^{1/3} \Delta P,$$

$$\Delta P = P + \frac{a_s}{\alpha} \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad \text{при } \Delta P < 0, \alpha < \alpha_{кр}, \quad (6.7)$$

$$\Delta P = P - \frac{2}{3} \frac{\sigma_{sm}}{\alpha} \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad \text{при } \Delta P > 0, \alpha_0 < \alpha,$$

где  $\eta, a_s$  — константы материала.

Необходимо отметить, что при более строгом подходе в

процессе схлопывания пор отмечаются три стадии. Первая стадия соответствует чисто упругому деформированию материала, окружающего пору. Вторая стадия соответствует упруго-пластическому и, наконец, третья стадия – пластическому деформированию окружающего пору материала. Изменение пористости в продолжение первых двух стадий незначительно и им можно пренебречь. В соотношении (6.7) выражение для закрытия пор  $\Delta P > 0$  получено с учетом предположения, что пористость не изменяется, пока весь окружающий пору материал не перейдет в пластическое состояние, и только после этого начинается процесс пластического затекания поры. То есть рассматривается только третья стадия. В качестве сдвигового критерия разрушения рассматривалась величина предельной интенсивности пластических деформаций:

$$e_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3T_2 - T_1^2},$$

где  $T_1 = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$ ,  $T_2 = \varepsilon_{ij} \varepsilon^{ij}$  – первый и второй инварианты тензора деформаций.

Предполагалось, что как только интенсивность деформаций достигает критической величины, модуль сдвига и предел текучести полагаются равными нулю, то есть поведение материала описывается гидродинамической моделью.

Таким образом, получаем замкнутую систему уравнений (6.1)–(6.7), которая после задания краевых условий может быть решена.

### **6.1.2. Постановка трехмерной задачи о наклонном соударении ударника с системой пространственно разнесенных преград конечной толщины**

Ударник произвольной формы, имеющий продольную ось симметрии, ударяет со скоростью  $u_0$  по первой преграде

системы пространственно разнесенных преград конечной толщины. Вектор скорости ударника в общем случае не совпадает с продольной осью симметрии и образует с внутренней нормалью к лицевой поверхности первой преграды некоторый угол  $\varphi$ . С учетом выбранной в работе ориентации координатных осей вектор нормали совпадает с отрицательным направлением оси  $OX_3$ , а угол  $\varphi$  отсчитывается по часовой стрелке, начиная от вектора нормали, и находится в плоскости  $X_1OX_3$ . Угол  $\psi$  определяется между вектором скорости ударника и его осью симметрии и, так же как и угол  $\varphi$ , лежит в плоскости  $X_1OX_3$ . При этом он считается положительным, если отсчитывается по часовой стрелке, начиная от оси симметрии ударника, и отрицательным в противном случае. С учетом введенных обозначений угол между нормалью к преграде и осью симметрии ударника  $\beta$  определяется следующим образом  $\beta = \varphi - \psi$ , где величины  $\varphi$  и  $\psi$  используются со своими знаками. В начальный момент взаимодействия ударник занимает в пространстве область  $D_1$  и ограничен поверхностями  $R_1$  и  $R_{12}$ . Преграды занимают области  $D_2, D_3, \dots, D_k$  и ограничены поверхностями  $R_{12}, R_2, R_3, \dots, R_k$ . Поверхности  $R_1, R_2, \dots, R_k$  — свободны от усилий,  $R_{12}$  — контактная поверхность ударника и первой преграды. На рис. 6.1 приведена геометрия сформулированной задачи высокоскоростного наклонного соударения ударника с системой пространственно разнесенных преград и принятая в работе ориентация координатных осей. Показанные на рисунке углы  $\varphi, \psi$  и  $\beta$  — положительные. Краевые условия для системы уравнений (6.1)–(6.7) отражают тот факт, что в начальный момент времени в материалах взаимодействующих тел отсутствуют поля напряжений, а в процессе соударения на контактных поверхностях реализуются условия скольжения без трения.

Начальные условия:

$$\sigma_{ij}(0, \bar{x}) = \varepsilon(0, \bar{x}) = 0 \quad \text{при } \bar{x} \in D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k,$$

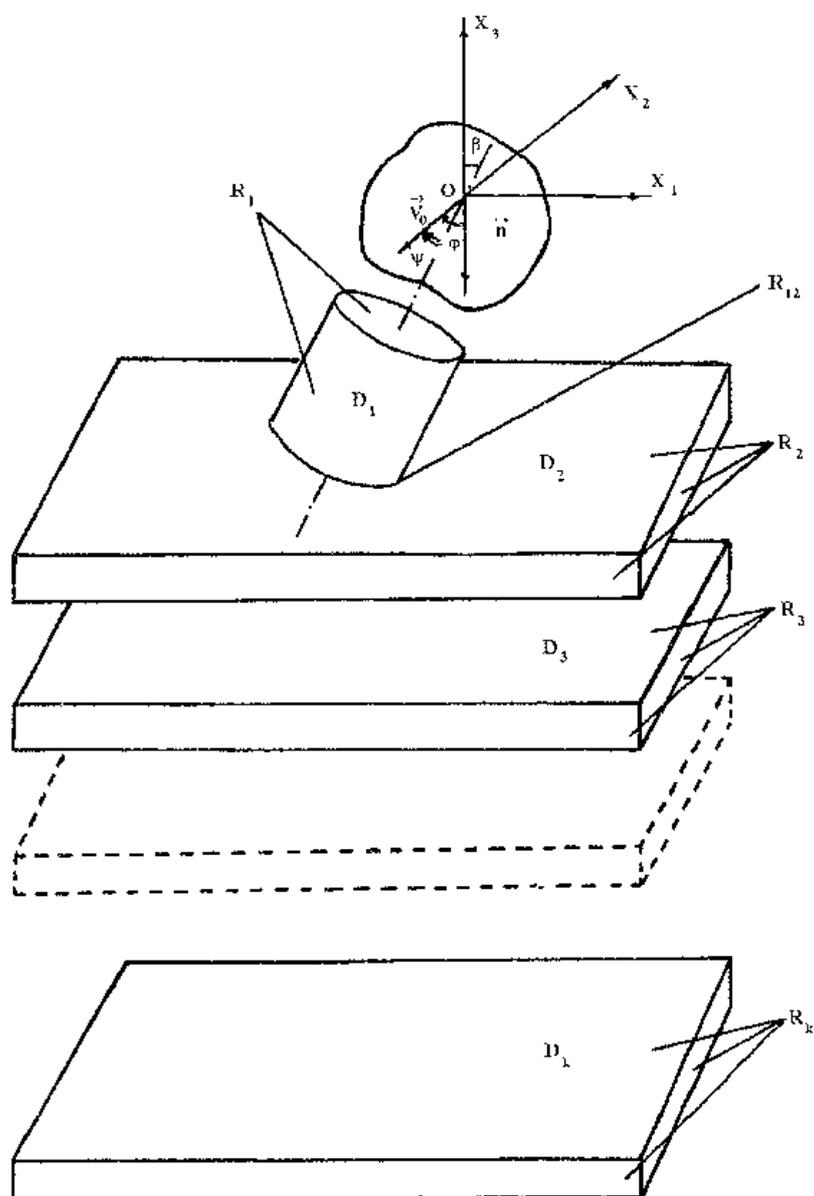


Рис. 6.1. Постановка задачи и принятая в работе система координат

$$\rho(0, \bar{x}) = \rho_1 / \alpha_1; \alpha(0, \bar{x}) = \alpha_1;$$

$$v_1(0, \bar{x}) = -v_0 \sin \varphi;$$

$$v_2(0, \bar{x}) = 0; v_3(0, \bar{x}) = -v_0 \cos \varphi$$

при  $\bar{x} \in D_1,$

$$\begin{aligned} \rho(0, \bar{x}) &= \rho_2 / \alpha_2; \quad \alpha(0, \bar{x}) = \alpha_2; \\ v_1(0, \bar{x}) &= v_2(0, \bar{x}) = v_3(0, \bar{x}) = 0 \end{aligned} \quad \text{при } \bar{x} \in D_2,$$

$$\begin{aligned} \rho(0, \bar{x}) &= \rho_k / \alpha_k; \quad \alpha(0, \bar{x}) = \alpha_k; \\ v_1(0, \bar{x}) &= v_2(0, \bar{x}) = v_3(0, \bar{x}) = 0 \end{aligned} \quad \text{при } \bar{x} \in D_k.$$

Граничные условия:

$$\sigma_m(t, \bar{x}) = \sigma_{n\tau_1}(t, \bar{x}) = \sigma_{n\tau_2}(t, \bar{x}) = 0 \quad \text{при } \bar{x} \in R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_k,$$

$$\sigma_{n\tau_1}^+(t, \bar{x}) = -\sigma_{n\tau_1}^-(t, \bar{x}) = 0;$$

$$\sigma_{n\tau_2}^+(t, \bar{x}) = -\sigma_{n\tau_2}^-(t, \bar{x}) = 0; \quad \text{при } \bar{x} \in R_{12}.$$

$$\sigma_m^+(t, \bar{x}) = -\sigma_m^-(t, \bar{x}); \quad v_n^+(t, \bar{x}) = v_n^-(t, \bar{x})$$

Здесь  $\bar{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности в рассматриваемой точке;  $\bar{\tau}_1$  и  $\bar{\tau}_2$  — взаимно перпендикулярные единичные векторы в плоскости, касательной к поверхности в рассматриваемой точке;  $\bar{\sigma}_n$  — вектор силы на площадке с нормалью  $\bar{n}$ . Индекс «+» соответствует параметрам ударника на поверхности контакта, «-» — преграды.

Сформулированная задача наклонного взаимодействия ударника с системой пространственно разнесенных преград конечной толщины является наиболее общей среди задач высокоскоростного взаимодействия твердых деформируемых тел.

## 6.2. Метод конечных элементов в задачах соударения деформируемых твердых тел

### 6.2.1. Уравнения движения для произвольного конечного элемента. Глобальные формы движения

Так как в дальнейшем для решения конкретных задач динамики деформируемого твердого тела используется численный метод конечных элементов, то необходимо получить глобальные формы уравнения движения для всего ансамбля конечных элементов. Получим сначала общее уравнение движения для произвольного конечного элемента сплошной среды, а затем перейдем к уравнениям движения для всего ансамбля элементов. Для этого составим выражение для кинематически возможных скоростей  $\delta v_i$ , используя уравнение (6.2), в котором предварительно перейдем от интеграла по поверхности к интегралу по объему, применяя формулу Остроградского—Гаусса:

$$\int_V \rho \frac{dv_i}{dt} \delta v_i dV = \int_V \nabla_j \sigma^{ij} \delta v_i dV + \int_V \rho F^i \delta v_i dV. \quad (6.8)$$

Выполняя очевидные преобразования, приходим к выражению:

$$\int_V \rho \frac{dv_i}{dt} \delta v_i dV = \int_R \sigma^{ij} n_j \delta v_i dR - \int_V \sigma^{ij} \nabla_j \delta v_i dV + \int_V \rho F^i \delta v_i dV. \quad (6.9)$$

Учитывая, что  $\nabla_j \delta v_i = \delta e_{ij} - \delta \omega_{ij}$  и  $\sigma_{ij} \delta \omega_{ij} = 0$ , получим соотношение:

$$\int_V \rho \frac{dv_i}{dt} \delta v_i dV = \int_R \sigma^{ij} n_j \delta v_i dR - \int_V \sigma^{ij} \delta e_{ij} dV + \int_V \rho F^i \delta v_i dV, \quad (6.10)$$

которое представляет собой принцип возможных скоростей. Данное уравнение будет непосредственно использовано для вывода уравнений движения после введения ин-

терполяционных, или, как их еще называют, пробных, функций, с помощью которых аппроксимируются локальные поля перемещений, скоростей и ускорений.

Рассматривая типичный конечный элемент  $r$ , который в самом простейшем случае в трехмерном пространстве является тетраэдром, приходим к симплексной модели [12, 13]. При симплексных представлениях локальные поля аппроксимируются линейными относительно координат функциями:

$$v(\bar{x}) = a_0 + a_i x^i, \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (6.11)$$

Здесь  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$  являются  $K+1$  постоянными, которые необходимо определить. Следует отметить, что количество узловых точек в  $K$ -мерном пространстве будет  $N_r = K+1$ . Используя значения функций  $v^N$  в каждом узле  $x^N$ , можем определить постоянные  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$  из решения системы уравнений:

$$v^N = a_0 + a_i x^{Ni}, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad N = 1, 2, \dots, K+1, \quad (6.12)$$

или в матричной форме:

$$\{v\} = [C]\{a\}. \quad (6.13)$$

Здесь  $[C]$  – матрица размерности  $N_r \times N_r$ :

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & x^{11} & \dots & x^{1k} \\ 1 & x^{21} & \dots & x^{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x^{(k+1)1} & \dots & x^{(k+1)k} \end{bmatrix},$$

а вектор-столбцы имеют вид:

$$\{a\}^T = \{a_0 a_1 a_2 \dots a_k\}, \quad \{v\}^T = \{v^1 v^2 v^3 \dots v^{k+1}\}.$$

Если предположить, что  $\det|C| \neq 0$ , решение уравнения (6.13) запишется:

$$\{a\} = [C]^{-1} \{v\}. \quad (6.14)$$

Подставляя (6.14) в (6.11) и делая соответствующие преобразования, получаем искомую аппроксимацию:

$$v(\bar{x}) = v^N \psi_N(\bar{x}), \quad N = 1, 2, \dots, K+1, \quad (6.15)$$

где в рассматриваемом случае интерполяционные функции линейны относительно локальных координат  $x^1$ :

$$\psi_N(\bar{x}) = a_N + b_N x^1. \quad (6.16)$$

Величины  $a_N$  и  $b_N$  выражаются через координаты узлов следующим образом:

$$a_N = \frac{|C_{N1}|}{\det|C|}, \quad b_N = \frac{|C_{N(i+1)}|}{\det|C|}, \quad (6.17)$$

где  $|C_{N1}|$  и  $|C_{N(i+1)}|$  — соответствующие алгебраические дополнения элементов матрицы  $[C]$  в предположении, что  $C_{ij}$  есть элемент  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца. Здесь  $i, j = 1, 2, \dots, K+1$ .

Необходимо отметить, что правильный выбор соответствующей интерполяционной функции имеет в методе конечных элементов большое значение, поскольку она в значительной мере определяет точность приближенного решения задачи. При этом интерполяционная функция должна удовлетворять некоторым определенным требованиям, чтобы обеспечить приемлемую аппроксимацию переменной величины и устойчивое, сходящееся к точному численное решение. Выбранная интерполяционная функция полностью соответствует всем этим требованиям и обладает следующими свойствами:

$$\psi_N(\bar{x}) > 0, \quad \sum_{N=1}^{k+1} \psi_N(\bar{x}) = 1. \quad (6.18)$$

Кроме того, для любой узловой точки  $\bar{x}^M$   $\psi_N(\bar{x}^M) = \delta_N^M$ .

Более полное изложение вопросов, связанных с выбором пробной функции, устойчивости и сходимости численного решения к точному, можно найти в работах [12–15].

С учетом введенных функций формы поля скоростей и ускорений для произвольного треугольного (тетраэдрального) элемента  $r_i$  будут иметь вид:

$$v_i = v_i^N \psi_N(\bar{x}), \quad \dot{v}_i = \dot{v}_i^N \psi_N(\bar{x}). \quad (6.19)$$

При этом предполагается зависимость узловых величин  $v_i^N$  и  $\dot{v}_i^N$  от времени. Компоненты тензора скоростей деформаций внутри элемента примут вид:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (v_i^N \psi_{N,j} + v_j^N \psi_{N,i}). \quad (6.20)$$

Принцип возможных скоростей (6.10) для произвольного конечного элемента запишется с использованием введенных функций формы следующим образом:

$$\int_{V_i} \sigma^{ij} \psi_{N,j} \delta v_i^N dV = \int_{V_i} \rho F^i \psi_N \delta v_i^N dV + \int_{R_i} \sigma^{ij} n_j \psi_N \delta v_i^N dR - \int_{V_i} \rho \psi_M \dot{v}_i^M \psi_N \delta v_i^N dV. \quad (6.21)$$

Каждый член содержит компоненты вариации узловой скорости  $\delta v_i^N$ , являющейся функцией одного времени. Поэтому данное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\left[ m_{NM} \dot{v}_i^M + \int_{V_i} \sigma^{ij} \psi_{N,j} dV - p_{Ni} \right] \delta v_i^N = 0, \quad (6.22)$$

где  $p_{Ni}$  —  $i$ -я компонента обобщенной силы в узловой точке  $N$  элемента, обусловленная поверхностными и объемными силами:

$$P_{Ni} = \int_{R_i} \sigma^{ij} n_j \psi_N dR + \int_{V_i} \rho F^i \psi_N dV; \quad (6.23)$$

$m_{NM}$  — симметричная матрица размерности  $N_i \times N_i$ , называемая согласованной матрицей масс для элемента и определяемая формулой:

$$m_{NM} = \int_{V_i} \rho \psi_N \psi_M dV. \quad (6.24)$$

Как обычно, по повторяющимся индексам производится суммирование по всем допустимым для них значениям:  $N, M = 1, 2, \dots, K+1$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ . Поскольку принцип возможных скоростей справедлив при произвольных движениях элемента, он должен выполняться для любых вариаций значений узловых скоростей  $\delta v_i^N$ . «Разворачивая» в (6.22) суммирование по повторяющимся индексам  $N$  и  $i$  и рассматривая каждый член, мы убеждаемся, что если выполняется (6.22) для произвольных  $\delta v_i^N$ , то член, стоящий в скобках, должен обращаться в нуль при всех значениях  $N$  и  $i$ . Таким образом:

$$m_{NM} \dot{v}_i^M + \int_{V_i} \sigma^{ij} \psi_{N,j} dV = p_{Ni}. \quad (6.25)$$

Соотношение (6.25) представляет собой общее уравнение движения конечного элемента сплошной среды. Это система уравнений относительно узловых перемещений и их производных по времени. Уравнение (6.25) и некоторые другие его формы были получены в работах [12, 13].

Для получения уравнений движения всего ансамбля элементов необходимо вычисленные компоненты уравнений движения для каждого элемента расположить на соответствующих местах глобального массива и просуммировать. В этом случае уравнения движения для всего ансамбля примут вид:

$$P_{zi} = M_{z\Delta} \cdot \dot{v}_i + G_{zi}, \quad (6.26)$$

где:

$$P_{zi} = \sum_{l=1}^L \Omega_z^{(l)N} p_{Ni}^{(l)}, \quad (6.27)$$

$$M_{z\Delta} = \sum_{l=1}^L \Omega_z^{(l)N} m_{NM} \Omega_{\Delta}^{(l)M}, \quad (6.28)$$

$$G_{zi} = \sum_{l=1}^L \Omega_z^{(l)N} \int_{V_l} \sigma_{ij} \psi_{N,j} dV. \quad (6.29)$$

Элементы массива  $\Omega_z^{(l)N}$  определяются следующим образом:

$$\Omega_z^{(l)N} = \begin{cases} 1, & \text{если узел } N \text{ элемента } r_l \text{ соответствует} \\ & \text{узлу } r \text{ связанной модели} \\ 0, & \text{в противоположном варианте} \end{cases}. \quad (6.30)$$

Таким образом, приходим к замкнутой системе уравнений (6.1), (6.3)–(6.7), (6.26), записанной для конечно-элементного представления сплошной среды. Данная система уравнений после конечно-разностной аппроксимации, задания начальных и граничных условий, соответ-

вующих поставленной конкретной задаче, может быть численно решена на ЭВМ.

### 6.2.2. Конечно-разностные уравнения метода конечных элементов в двумерных задачах соударения тел

#### 6.2.2.1. Плоские задачи

Замкнутая система уравнений, приведенная выше, описывает в рамках выбранной упругопластической модели движения пористой среды в трехмерном пространстве. Уравнения движения для конечно-элементной модели пористой среды справедливы, вообще говоря, для конечных элементов произвольной формы, которые, кроме того, могут иметь разный вид пробных функций для каждого конкретного элемента. Выбор треугольных (для плоского и осесимметричного случая) и тетраэдральных (для пространственного случая) конечных элементов и линейных интерполяционных функций, которые в дальнейшем используются в численных расчетах, не является случайным. Известно, что при решении задач высокоскоростного удара имеют место большие деформации взаимодействующих тел, приводящие к перехлестыванию и возникновению отрицательных объемов расчетной сетки при использовании переменных Лагранжа. Применение вместо гексаэдра тетраэдра значительно уменьшает вероятность возникновения таких «патологических» ячеек, что позволяет проводить расчеты для высоких скоростей и больших времен взаимодействия. Кроме того, снижается объем вычислений в силу меньшего числа неизвестных коэффициентов в пробной функции, что также важно для численного решения задач на ЭВМ. При этом точность расчетов является достаточно хорошей.

В плоских задачах применяется треугольный симплекс-элемент  $r$ , с узлами  $i, j, k$ , который показан на рис. 6.2. Скорости каждого узла имеют два компонента (например, узел

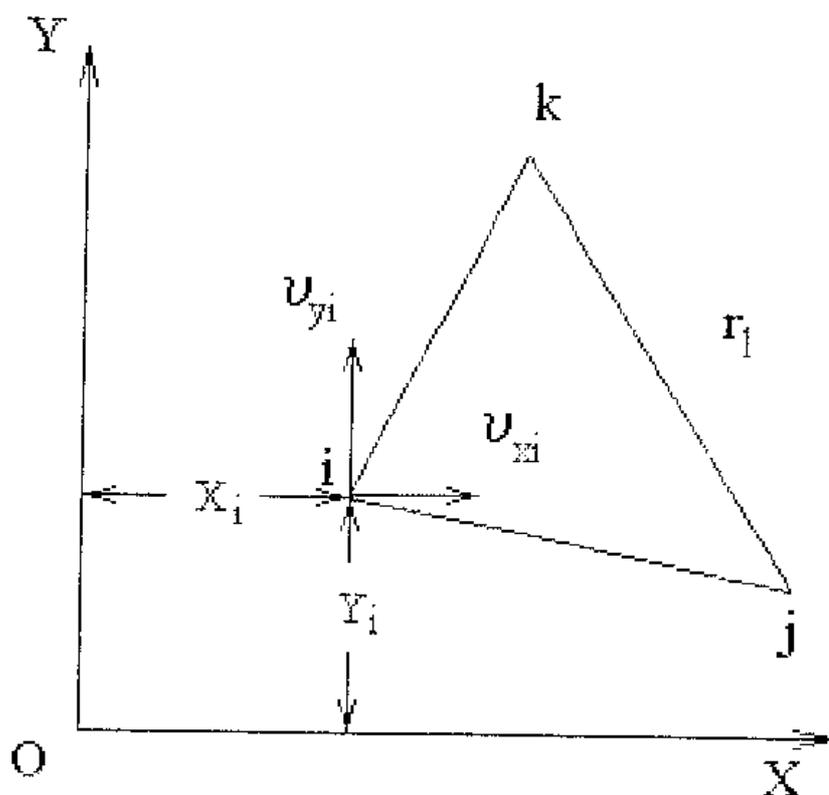


Рис. 6.2. Треугольный симплекс-элемент

$i$  имеет компоненты скорости  $v_{xi}$  и  $v_{yi}$ ). Скорости  $v_x$  и  $v_y$  внутри элемента определяются через его узловые скорости следующим образом:

$$v_x = \psi_i v_{xi} + \psi_j v_{xj} + \psi_k v_{xk},$$

$$v_y = \psi_i v_{yi} + \psi_j v_{yj} + \psi_k v_{yk},$$

где  $\psi_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta$ ,  $a_i = x_j y_k - x_k y_j$ ,  $b_i = y_j - y_k$ ,  $c_i = x_k - x_j$ ,

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \text{ — площадь треугольника } ijk.$$

Для узлов  $j$  и  $k$  получаются аналогичные выражения циклической перестановкой индексов. Зная скорости внутри каждого элемента, можно найти скорости деформации элементов и компоненты тензора напряжений. Ис-

пользуя коэффициенты функций формы и напряжения, можно найти узловые силы в узлах симплекс-элементов, и, проинтегрировав уравнения движения, получить новые скорости и координаты узлов связанной модели.

Запишем систему уравнений (6.1), (6.3)–(6.7), (6.26) в прямоугольной системе координат  $XOY$  в конечно-разностном виде удобном для численной реализации. Для этого область, занятую средой, разобьем на треугольные элементы, которые движутся со средой, и обозначим в произвольно выбранном таком элементе  $r$ , вершины в порядке их обхода индексами  $i, j, k$ . Предполагая, что масса треугольного элемента равномерно распределена между его тремя узлами, получаем:

$$m_i = m_j = m_k = \frac{1}{3} \rho_0 V_0. \quad (6.31)$$

Предположим, что толщина треугольного элемента в направлении, перпендикулярном плоскости  $XOY$ , равна единице. Тогда объем элемента запишется:

$$V_0 = \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}. \quad (6.32)$$

Компоненты эквивалентных узловых сил на  $n$ -м временном слое в локальном узле  $i$  треугольника  $r$ , выраженные через производные от функций формы и компоненты тензора напряжений внутри элемента имеют вид

$$F_{xi}^n = -\frac{1}{2} (b_i \sigma_{xx} + c_i \sigma_{xy})^n, \quad (6.33)$$

$$F_{yi}^n = -\frac{1}{2} (b_i \sigma_{xy} + c_i \sigma_{yy})^n.$$

Для узлов  $j$  и  $k$  получаются аналогичные выражения циклической перестановкой индексов.

Уравнения движения для произвольного узла  $s$  всего ансамбля конечно-элементной модели сплошной среды запишутся следующим образом:

$$\left( v_h^{n+\frac{1}{2}} - v_h^{n-\frac{1}{2}} \right) \sum_{l=1}^L \Omega_s^{(l)q} m_q^{(l)} = \Delta t^n \sum_{l=1}^L \Omega_s^{(l)q} F_{hq}^n,$$

где  $h=x, y$ .

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n + v_x^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}, \\ y^{n+1} &= y^n + v_y^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Входящие в данные уравнения индексы принимают следующие значения:  $q = 1, 2, 3$ ;  $S = 1, 2, \dots, M$ ;  $l = 1, 2, \dots, L$ ,

где  $M$  — число узлов конечно-элементной модели,  $L$  — полное число элементов модели.

Элементы массива  $\Omega_s^{(l)q}$  определяются следующим образом:

$$\Omega_s^{(l)q} = \begin{cases} 1, & \text{если узел } q \text{ элемента } r_l \text{ совпадает} \\ & \text{с узлом } s \text{ связной модели} \\ 0, & \text{в противоположном варианте} \end{cases}. \quad (6.35)$$

Компоненты тензора скоростей деформаций определяются внутри элемента через его узловые величины и имеют вид:

$$\begin{aligned}
 e_{xx}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2V^{n+\frac{1}{2}}} \left[ b_i v_{xi} + b_j v_{xj} + b_k v_{xk} \right]^{n+\frac{1}{2}}, \\
 e_{yy}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2V^{n+\frac{1}{2}}} \left[ c_i v_{yi} + c_j v_{yj} + c_k v_{yk} \right]^{n+\frac{1}{2}}, \\
 e_{xy}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2V^{n+\frac{1}{2}}} \left[ c_i v_{xi} + c_j v_{xj} + c_k v_{xk} + b_i v_{yi} + b_j v_{yj} + b_k v_{yk} \right]^{n+\frac{1}{2}},
 \end{aligned}
 \tag{6.36}$$

где  $V^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(V^{n+1} + V^n)$ .

Компоненты дивергента тензора напряжений записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 S_{xx}^{n+1} &= S_{xx}^n + 2\mu \left( e_{xx}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta_{xx}^n, \\
 S_{yy}^{n+1} &= S_{yy}^n + 2\mu \left( e_{yy}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta_{yy}^n, \tag{6.37} \\
 S_{xy}^{n+1} &= S_{xy}^n + \mu e_{xy}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta_{xy}^n,
 \end{aligned}$$

где  $\left( \frac{\Delta V}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{V^{n+1} - V^n}{V^{n+\frac{1}{2}}}$ , а поправки на поворот за время

$\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$  определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \left[ b_i v_{yi} + b_j v_{yj} + b_k v_{yk} - c_i v_{xi} - c_j v_{xj} - c_k v_{xk} \right]^{n+\frac{1}{2}}, \\ \Delta_{xx}^n &= 0,5(S_{xx}^n - S_{yy}^n)(\cos(\alpha) - 1) + S_{xy}^n \sin(\alpha), \\ \Delta_{xy}^n &= S_{xy}^n (\cos(\alpha) - 1) - 0,5(S_{xx}^n - S_{yy}^n) \sin(\alpha), \\ \Delta_{yy}^n &= -\Delta_{xx}^n. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Пластическое течение описывается путем сохранения дивергента напряжений на пределе упругости:

$$\begin{aligned} 2J_2^{n+1} &= (S_{xx}^{n+1})^2 + (S_{yy}^{n+1})^2 + 2(S_{xy}^{n+1})^2 = \frac{2}{3}(\sigma_s / \alpha^{n+1})^2, \\ 2J_2^{n+1} - \frac{2}{3}(\sigma_s / \alpha^{n+1})^2 &= K^{n+1}. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Если  $K^{n+1} > 0$ , то каждое из напряжений  $S_{xx}^{n+1}$ ,  $S_{yy}^{n+1}$ ,  $S_{xy}^{n+1}$  умножается на множитель  $\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_s / \alpha^{n+1}) / \sqrt{2J_2^{n+1}}$ . В противном случае на следующем шаге по времени используются напряжения в неизменной форме.

Шаровая часть тензора напряжений определяется из уравнения, которое удобно использовать в виде:

$$P^{n+1} = [A(V_m^{n+1}) + B\varepsilon^{n+1}] / \alpha^{n+1}. \tag{6.40}$$

Плотность в элементе находится из закона сохранения массы:

$$\rho_0 V_0 = \rho^{n+1} V^{n+1} = m_0. \tag{6.41}$$

Внутренняя энергия, входящая в уравнение (6.40), вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon^{n+1} = \left\{ \frac{\varepsilon^n - \left\{ \frac{1}{2} [A + P^n] + Q^{n+\frac{1}{2}} \right\} (V^{n+1} - V^n) / m_0 + \Delta Z^{n+\frac{1}{2}} / m_0}{1 + \frac{1}{2} [B(V^{n+1})] (V^{n+1} - V^n) / m_0} \right\}, \quad (6.42)$$

где энсргия сдвиговых деформаций имеет вид:

$$\begin{aligned} Z^{n+1} &= Z^n + V^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} (S_{xx} e_{xx} + S_{yy} e_{yy} + S_{xy} e_{xy})^{n+\frac{1}{2}}, \\ \Delta Z^{n+\frac{1}{2}} &= Z^{n+1} - Z^n, \\ S_{xx}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (S_{xx}^{n+1} + S_{xx}^n), \quad S_{yy}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (S_{yy}^{n+1} + S_{yy}^n), \\ S_{xy}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (S_{xy}^{n+1} + S_{xy}^n). \end{aligned} \quad (6.43)$$

В соответствии с используемой в работе  $P$ - $\alpha$  моделью уравнение состояния (6.40) решается итеративно совместно с уравнениями для внутренней энергии и параметра  $\alpha$ , которое имеет вид:

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n - \frac{(\alpha_0 - 1)}{\eta} \alpha^n (\alpha^n - 1)^{\frac{1}{3}} \Delta P^{n+1}, \quad (6.44)$$

$$\Delta P^{n+1} = P^{n+1} + \frac{a_s}{\alpha^n} \ln \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \text{ при } \Delta P^{n+1} < 0, \alpha_n < \alpha_{кр}, \quad (6.45)$$

$$\Delta P^{n+1} = P^{n+1} - \frac{2 \sigma_{sm}}{3 \alpha^n} \ln \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \text{ при } \Delta P^{n+1} > 0, \alpha_n < \alpha'. \quad (6.46)$$

В самом простейшем случае можно находить  $P$  и  $\alpha$ , ис-

пользуя соотношения (6.40) и (6.44), добиваясь итеративным процессом того, чтобы  $\Delta P^{n+1} = 0$  на каждом временном шаге.

При численном счете используется искусственная вязкость вида:

$$Q^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \left[ c_L \rho_0 c_s h^{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} + c_0^2 \rho_0 \left( h^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \left[ \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right]^2 \right. \\ \left. \text{при } \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} < 0, \right. \\ \\ \left. 0 \text{ при } \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \geq 0, \right. \\ \left. \right] \end{cases} \quad (6.47)$$

где  $c_L = 0,5$ ,  $c_0^2 = 4$ ,  $c_s$  — местная скорость звука в материале,  $h^{n+1} = \min\{h_i; h_j; h_k\}^{n+1}$  — минимальная высота треугольника,  $h_k^{n+1} = \frac{2\Delta^{n+1}}{\sqrt{b_i^2 + c_i^2}}$ .

В случае необходимости используется тензорная вязкость, которая имеет вид:

$$\begin{aligned}
 Q_{xx}^{n+\frac{1}{2}} &= 2\nu \left[ e_{xx}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right], \\
 Q_{yy}^{n+\frac{1}{2}} &= 2\nu \left[ e_{yy}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right], \\
 Q_{xy}^{n+\frac{1}{2}} &= \nu e_{xy}^{n+\frac{1}{2}},
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

где  $\nu = c_H \rho c_s h_{\min}$ ,  $c_H \approx 0,02$ .

Компоненты тензора напряжений определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^{n+1} &= S_{xx}^{n+1} + Q_{xx}^{n+\frac{1}{2}} - \left( P^{n+1} + Q^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
 \sigma_{yy}^{n+1} &= S_{yy}^{n+1} + Q_{yy}^{n+\frac{1}{2}} - \left( P^{n+1} + Q^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
 \sigma_{xy}^{n+1} &= S_{xy}^{n+1} + Q_{xy}^{n+\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

Временной интервал интегрирования, обеспечивающий устойчивое решение и определяемый из численного эксперимента, имеет вид:

$$\Delta t^{n+\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \left[ \frac{h^{n+1}}{\sqrt{g^2} + \sqrt{g^2 + c_s^2}} \right], \tag{6.50}$$

где  $g^2 = c_0^2 Q^{n+\frac{1}{2}} / \rho_0$ ,  $c_s^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) + \frac{4\mu}{3\rho}$ .

Алгоритм расчета по приведенным конечно-разностным уравнениям заключается в следующем: на первом шаге по времени с учетом начальных и граничных условий интегрируются уравнения движения и находятся новые значения скоростей и координат узлов конечно-элементной модели. Затем определяются функции формы, с помощью которых вычисляются компоненты тензора скоростей деформаций. После того, как скорости деформаций определены, находятся компоненты девиатора тензора напряжений. При этом проверяется выполнение условия текучести Мизеса. Если это условие не выполняется, то имеет место пластическое течение, и производится соответствующая корректировка компонентов девиатора тензора напряжений. Далее вычисляются гидростатическое давление и компоненты тензора напряжений. Определив напряжения и используя вычисленные коэффициенты функций форм, можно найти эквивалентные узловые силы в соответствующих узлах тетраэдров и вновь проинтегрировать уравнения движения. Данная процедура может быть продолжена до заданного критерия окончания счета.

#### 6.2.2.2. Осесимметричные задачи

Исследование распределения напряжений и деформаций в телах вращения при осесимметричном нагружении представляет собой большой практический интерес. Поскольку эти задачи тоже двумерные, с математической точки зрения они аналогичны плоским задачам. Вследствие симметрии деформированное, а следовательно, и напряженное состояния в любом сечении по оси симметрии тела полностью определяются двумя компонентами перемещений.

На рис. 6.3 приведена типичная картина осесимметричного разбиения. Если  $R$  и  $Z$  – радиальная и осевая координаты точки, то легко заметить, что перемещения внутри треугольного элемента  $ijk$  могут быть описаны с помощью

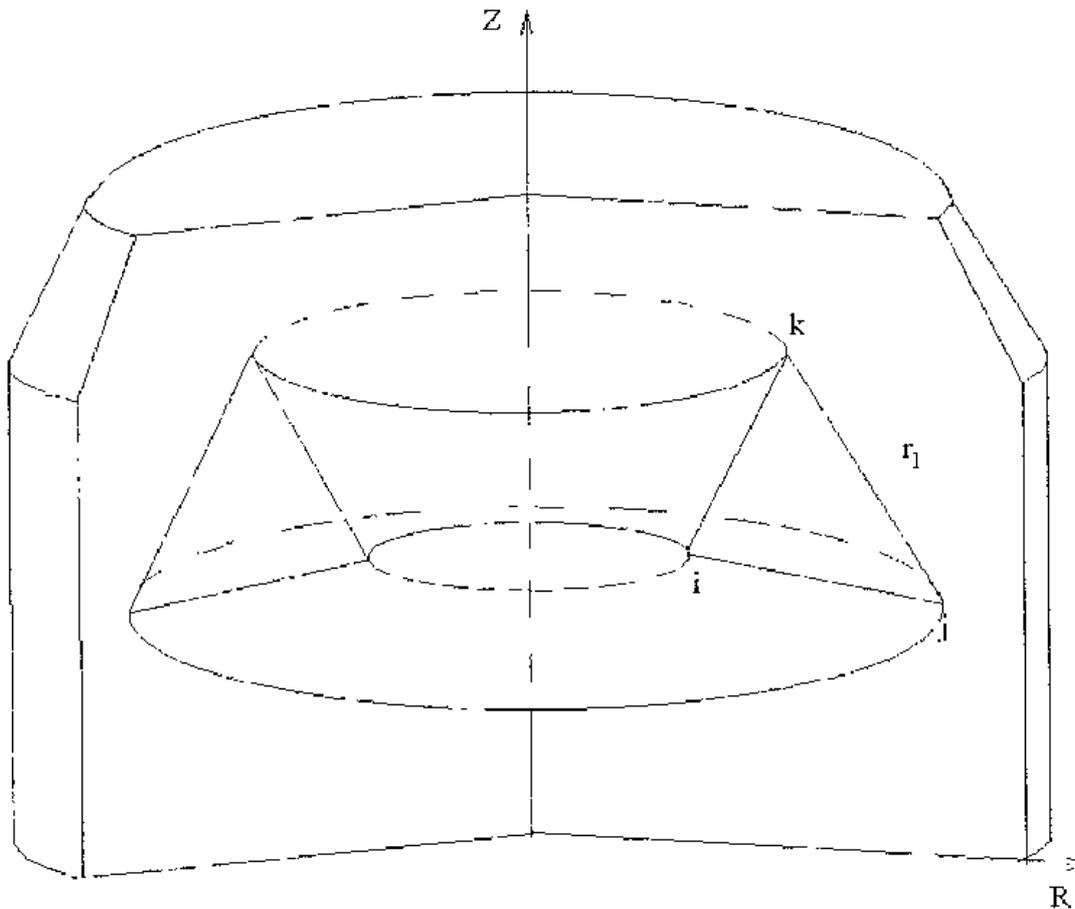


Рис. 6.3. Картина осесимметричного разбиения

тех же самых пробных функций, как и для плоского случая. Различие состоит лишь в том, что соответствующий рассматриваемому элементу объем, по которому должны брать-ся все интегралы, представляет собой тело вращения.

Кроме этого, в осесимметричном случае любое радиальное перемещение вызывает деформацию в окружном направлении, и, так как напряжения в этом направлении не равны нулю, в рассмотрение должен быть введен четвертый компонент деформации и соответствующее напряжение. В этом состоит отличительная особенность осесимметричного случая от плоского.

Выпишем конечно-разностные соотношения для осесимметричного случая, предположив, что используется

единичная матрица масс элементов или, что то же самое, масса элемента равномерно распределена между тремя его узлами:

$$m_i = m_j = m_k = \frac{1}{3} \rho_0 V_0. \quad (6.51)$$

Здесь  $V_0$ , как уже отмечалось выше, представляет собой объем тела вращения треугольного элемента вокруг оси  $OZ$ , и в самом простейшем случае он равен произведению площади элемента на длину пути, пройденного центром тяжести, т.е.:

$$V_0 = 2\pi \bar{r} \Delta, \quad (6.52)$$

где  $\bar{r} = (r_i + r_j + r_k)/3$ ,  $\bar{z} = (z_i + z_j + z_k)/3$  — координаты центра тяжести элемента,  $\Delta$  — площадь треугольника  $ijk$ .

Узловые силы в локальном узле  $i$  имеют вид:

$$F_{ri}^n = \pi \bar{r} (b_i \sigma_{rr} + c_i \sigma_{rz})^n + \frac{2}{3} \pi \bar{r} \Delta \sigma_{\theta\theta}^n, \quad (6.53)$$

$$F_{zi}^n = \pi \bar{r} (b_i \sigma_{rz} + c_i \sigma_{zz})^n.$$

Уравнения движения полностью аналогичны уравнениям движения для плоского случая, в которых следует заменить  $X$  на  $R$ ,  $Y$  на  $Z$ .

В соотношения для тензоров скоростей деформаций (6.36) и напряжений (6.37) добавляются соответственно следующие компоненты:

$$e_{\theta\theta}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left[ \psi_i v_{ri} + \psi_j v_{rj} + \psi_k v_{rk} \right]^{n+\frac{1}{2}},$$

$$S_{\theta\theta}^{n+1} = S_{\theta\theta}^n + 2\mu \left( e_{\theta\theta}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right).$$

При описании пластического течения материала в соотношения (6.39) добавляется член  $S_{\theta\theta}^2$ .

Кроме этого в выражение для энергии сдвиговых деформаций (6.42) добавляется член  $S_{\theta\theta}e_{\theta\theta}$ , в (6.48) —  $Q_{\theta\theta}$ , в (6.49) —  $\sigma_{\theta\theta}$ .

### 6.2.3. Конечно-разностные уравнения метода конечных элементов в трехмерных задачах соударения тел

Запишем систему уравнений (6.1), (6.3)–(6.7), (6.26) в декартовой системе координат XYZ в конечно-разностном виде. Для этого область, занятую средой, разобьем на тетраэдральные элементы и обозначим в произвольно выбранном таком элементе  $r$ , вершины в порядке их обхода индексами  $i, j, k$  и  $p$  (рис. 6.4).

Предполагая, что масса тетраэдра равномерно распределена между его четырьмя узлами, получаем:

$$m_i = m_j = m_k = m_p = \frac{1}{4} \rho_0 V_0, \quad (6.54)$$

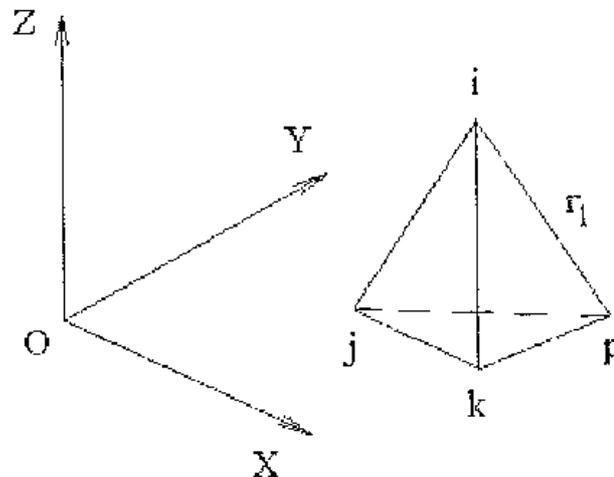


Рис. 6.4. Разбиение на тетраэдральные элементы

где

$$V_0 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}. \quad (6.55)$$

Компоненты эквивалентных узловых сил на  $n$ -том временном слое в локальном узле  $i$  тетраэдра  $r_i$  имеют вид:

$$F_{hi}^n = -\frac{1}{6} (b_i \sigma_{hx} + c_i \sigma_{hy} + d_i \sigma_{hz})^n, \quad (6.56)$$

где  $h=x, y, z$ ,

$$b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_i & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}; \quad c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_p & z_p \end{vmatrix}; \quad d_i = - \begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_p & y_p \end{vmatrix}. \quad (6.57)$$

Для  $y, z$ , а также узлов  $j, k, p$  получаются аналогичные выражения циклической перестановкой индексов.

Уравнения движения для произвольного узла  $s$  всего ансамбля конечно-элементной модели сплошной среды запишутся следующим образом:

$$\left( v_h^{n+\frac{1}{2}} - v_h^{n-\frac{1}{2}} \right) \sum_{l=1}^L \Omega_s^{(l)} m_q^{(l)} = \Delta t^n \sum_{l=1}^L \Omega_s^{(l)} F_{hq}^n,$$

где  $h=x, y, z$ .

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n + v_x^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}, \\ y^{n+1} &= y^n + v_y^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}, \\ z^{n+1} &= z^n + v_z^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Входящие в данные уравнения индексы принимают следующие значения:  $q = 1, 2, 3, 4$ ;  $S = 1, 2, \dots, M$ ;  $l = 1, 2, \dots, L$ ; где  $M$  — число узлов конечно-элементной модели,  $L$  — полное число элементов модели.

(l)

Элементы массива  $\Omega_s^q$  определяются следующим образом:

$$\Omega_s^q = \begin{cases} 1, & \text{если узел } q \text{ элемента } r_l \text{ совпадает} \\ & \text{с узлом } s \text{ связной модели} \\ 0, & \text{в противоположном варианте} \end{cases}. \quad (6.59)$$

Компоненты тензора скоростей деформаций определяются через его узловые величины и имеют вид:

$$\begin{aligned} e_{xx}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{6V^{n+\frac{1}{2}}} \left[ b_i v_{xi} + b_j v_{xj} + b_k v_{xk} + b_p v_{xp} \right]^{n+\frac{1}{2}}, \\ e_{yy}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{6V^{n+\frac{1}{2}}} \left[ c_i v_{yi} + c_j v_{yj} + c_k v_{yk} + c_p v_{yp} \right]^{n+\frac{1}{2}}, \\ e_{zz}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{6V^{n+\frac{1}{2}}} \left[ d_i v_{zi} + d_j v_{zj} + d_k v_{zk} + d_p v_{zp} \right]^{n+\frac{1}{2}}, \quad (6.60) \\ e_{xy}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{6V^{n+\frac{1}{2}}} \left[ \begin{array}{l} c_i v_{xi} + c_j v_{xj} + c_k v_{xk} + c_p v_{xp} + \\ b_i v_{yi} + b_j v_{yj} + b_k v_{yk} + b_p v_{yp} \end{array} \right]^{n+\frac{1}{2}}, \\ e_{xz}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{6V^{n+\frac{1}{2}}} \left[ \begin{array}{l} d_i v_{xi} + d_j v_{xj} + d_k v_{xk} + d_p v_{xp} + \\ b_i v_{zi} + b_j v_{zj} + b_k v_{zk} + b_p v_{zp} \end{array} \right]^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$e_{yz}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6V^{n+\frac{1}{2}}} \left[ c_i v_{zi} + c_j v_{zj} + c_k v_{zk} + c_p v_{zp} + d_i v_{yi} + d_j v_{yj} + d_k v_{yk} + d_p v_{yp} \right]^{n+\frac{1}{2}},$$

где  $V^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(V^{n+1} + V^n)$ .

Компоненты девиатора тензора напряжений записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{xx}^{n+1} &= S_{xx}^n + 2\mu \left( e_{xx}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta_{xx}^n, \\ S_{yy}^{n+1} &= S_{yy}^n + 2\mu \left( e_{yy}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta_{yy}^n, \\ S_{zz}^{n+1} &= S_{zz}^n + 2\mu \left( e_{zz}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta_{zz}^n, \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$S_{xy}^{n+1} = S_{xy}^n + \mu e_{xy}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta_{xy}^n,$$

$$S_{xz}^{n+1} = S_{xz}^n + \mu e_{xz}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta_{xz}^n,$$

$$S_{yz}^{n+1} = S_{yz}^n + \mu e_{yz}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta_{yz}^n,$$

где  $\left( \frac{\Delta V}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{V^{n+1} - V^n}{V^{n+\frac{1}{2}}}$ , а поправки на поворот за время

$\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$  определяются, например, для компонент девиатора

тензора напряжений  $S_{xx}^{n+1}$  и  $S_{xy}^{n+1}$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \Delta_{xx}^n &= \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \left\{ S_{xy}^n \times \right. \\ &\times \left[ c_i v_{xi} + c_j v_{xj} + c_k v_{xk} + c_p v_{xp} - b_i v_{yi} - b_j v_{yj} - b_k v_{yk} - b_p v_{yp} \right]^{n+\frac{1}{2}} + \\ &+ S_{xz}^n \left[ d_i v_{xi} + d_j v_{xj} + d_k v_{xk} + d_p v_{xp} + b_i v_{zi} + b_j v_{zj} + b_k v_{zk} + b_p v_{zp} \right]^{n+\frac{1}{2}} \left. \right\}, \\ \Delta_{xy}^n &= -\frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2} \left\{ S_{xx}^n \times \right. \\ &\times \left[ b_i v_{yi} + b_j v_{yj} + b_k v_{yk} + b_p v_{yp} - c_i v_{xi} + c_j v_{xj} + c_k v_{xk} + c_p v_{xp} \right]^{n+\frac{1}{2}} + \\ &+ S_{yy}^n \left[ c_i v_{xi} + c_j v_{xj} + c_k v_{xk} + c_p v_{xp} - b_i v_{yi} - b_j v_{yj} - b_k v_{yk} - b_p v_{yp} \right]^{n+\frac{1}{2}} + \\ &+ S_{xy}^n \left[ d_i v_{yi} + d_j v_{yj} + d_k v_{yk} + d_p v_{yp} - c_i v_{zi} - c_j v_{zj} - c_k v_{zk} - c_p v_{zp} \right]^{n+\frac{1}{2}} + \\ &+ S_{yz}^n \left[ d_i v_{xi} + d_j v_{xj} + d_k v_{xk} + d_p v_{xp} - b_i v_{zi} - b_j v_{zj} - b_k v_{zk} - b_p v_{zp} \right]^{n+\frac{1}{2}} \left. \right\}, \end{aligned}$$

Учитывая представление величин в (6.60), через функции формы можно получить аналогичные выражения для  $\Delta_{yy}^n$ ,  $\Delta_{zz}^n$ ,  $\Delta_{xz}^n$ ,  $\Delta_{yz}^n$ .

Пластическое течение описывается путем сохранения девиатора напряжений на пределе упругости:

$$\begin{aligned} 2J_2^{n+1} &= (S_{xx}^{n+1})^2 + (S_{yy}^{n+1})^2 + (S_{zz}^{n+1})^2 + \\ &2 \left[ (S_{xy}^{n+1})^2 + (S_{xz}^{n+1})^2 + (S_{yz}^{n+1})^2 \right] = \frac{2}{3} (\sigma_s / \alpha^{n+1})^2, \\ 2J_2^{n+1} - \frac{2}{3} (\sigma_s / \alpha^{n+1})^2 &= K^{n+1}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Если  $K^{n+1} > 0$ , то каждое из напряжений  $S_{xx}^{n+1}$ ,  $S_{yy}^{n+1}$ ,  $S_{zz}^{n+1}$ ,  $S_{xy}^{n+1}$ ,  $S_{yz}^{n+1}$ ,  $S_{xz}^{n+1}$  умножается на множитель  $\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_s/\alpha^{n+1})/\sqrt{2J_2^{n+1}}$ . В противном случае на следующем шаге по времени используются напряжения в неизменной форме.

Шаровая часть тензора напряжений определяется из уравнения, которое удобно использовать в виде:

$$P^{n+1} = \left[ A(V_m^{n+1}) + B\varepsilon^{n+1} \right] / \alpha^{n+1}. \quad (6.64)$$

Плотность в элементе находится из закона сохранения массы:

$$\rho_0 V_0 = \rho^{n+1} V^{n+1} = m_0. \quad (6.65)$$

Внутренняя энергия, входящая в уравнение (6.64), вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon^{n+1} = \left\{ \frac{\varepsilon^n - \left\{ \frac{1}{2} [A + P^n] + Q^{n+\frac{1}{2}} \right\} (V^{n+1} - V^n) / m_0 + \Delta Z^{n+\frac{1}{2}} / m_0}{1 + \frac{1}{2} [B(V^{n+1})] (V^{n+1} - V^n) / m_0} \right\}, \quad (6.66)$$

где энергия сдвиговых деформаций имеет вид:

$$Z^{n+1} = Z^n + \quad (6.67)$$

$$+ V^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \left( S_{xx} e_{xx} + S_{yy} e_{yy} + S_{zz} e_{zz} + S_{xy} e_{xy} + S_{xz} e_{xz} + S_{yz} e_{yz} \right)^{n+\frac{1}{2}},$$

$$\Delta Z^{n+\frac{1}{2}} = Z^{n+1} - Z^n,$$

$$S_{xx}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (S_{xx}^{n+1} + S_{xx}^n) \quad \text{и т.д.}$$

В соответствие с используемой в работе  $P$ - $\alpha$  моделью

уравнение состояния (6.64) решается итеративно совместно с уравнениями для внутренней энергии и параметра  $\alpha$ , которое имеет вид:

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n - \frac{(\alpha_0 - 1)}{\eta} \alpha^n (\alpha^n - 1)^{1/3} \Delta P^{n+1}, \quad (6.68)$$

$$\Delta P^{n+1} = P^{n+1} + \frac{a_s}{\alpha^n} \ln \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \text{ при } \Delta P^{n+1} < 0, \alpha^n < \alpha_{кр}, \quad (6.69)$$

$$\Delta P^{n+1} = P^{n+1} - \frac{2 \sigma_{sm}}{3 \alpha^n} \ln \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \text{ при } \Delta P^{n+1} > 0, \alpha_0 < \alpha^n. \quad (6.70)$$

В самом простейшем случае можно находить  $P$  и  $\alpha$ , используя соотношения (6.64) и (6.68), добиваясь итеративным процессом того, чтобы  $\Delta P^{n+1} = 0$  на каждом временном шаге.

При численном счете используется искусственная вязкость вида:

$$Q^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \left[ c_L \rho_0 c_s h^{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} + c_0^2 \rho_0 \left( h^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \left[ \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right]^2 \right. \\ \left. \text{при } \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} < 0, \right. \\ \left. 0 \text{ при } \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \geq 0, \right. \end{cases} \quad (6.71)$$

где  $c_l = 0,5$ ,  $c_0^2 = 4$ ,  $c_s$  — местная скорость звука в материале,  $h^{n+1} = \min\{h_i; h_j; h_k; h_p\}^{n+1}$  — минимальная высота тетраэдра,  $h_i^{n+1} = \frac{6V^{n+1}}{\sqrt{b_i^2 + c_i^2 + d_i^2}}$ .

В случае необходимости используется тензорная вязкость, которая имеет вид:

$$Q_{xx}^{n+\frac{1}{2}} = 2\nu \left[ e_{xx}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad \text{и т.д.,}$$

$$Q_{xz}^{n+\frac{1}{2}} = \nu e_{xz}^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{и т.д.,} \quad (6.72)$$

где  $\nu = c_{II} \rho c_s h_{min}$ ,  $c_{II} \approx 0,02$ .

Компоненты тензора напряжений определяются следующим образом:

$$\sigma_{xx}^{n+1} = S_{xx}^{n+1} + Q_{xx}^{n+\frac{1}{2}} - \left( P^{n+1} + Q^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad \text{и т.д.,}$$

$$\sigma_{xy}^{n+1} = S_{xy}^{n+1} + Q_{xy}^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{и т.д.,} \quad (6.73)$$

Временной интервал интегрирования, обеспечивающий устойчивое решение и определяемый из численного эксперимента, имеет вид:

$$\Delta t^{n+\frac{3}{2}} = \frac{4}{5} \left[ \frac{h^{n+1}}{\sqrt{g^2} + \sqrt{g^2 + c_s^2}} \right], \quad (6.74)$$

где  $g^2 = c_0^2 Q^{n+\frac{1}{2}} / \rho_0$ ,  $c_s^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho}$ .

## 6.3. Расчет контактных границ соударяющихся тел

### 6.3.1. Алгоритм расчета контактных поверхностей соударяющихся тел

При решении задач соударения деформируемых твердых тел возникает нетривиальный вопрос о расчете контактных границ взаимодействующих тел, который особенно остро встает при численной реализации трехмерных задач. Правильное решение данного вопроса позволяет существенно расширить вычислительные возможности программы и рассчитывать соударение пространственных тел различной конфигурации. В процессе численного моделирования задач высокоскоростного удара необходимо обеспечить сцепление, скольжение и разделение поверхностей контактирующих тел. Процедура расчета граничных условий, удовлетворяющая всем этим требованиям, изложенная в [4–6], будет подробно здесь рассмотрена.

Первый шаг процесса состоит в определении главной и ведомой поверхности, которые состояются из треугольных плоскостей, поскольку трехмерные элементы – тетраэдры. Обозначим главной поверхностью поверхность преграды, ведомой – ударника. Для иллюстрации данной техники расчета граничных условий введем рис. 6.5, где треугольная плоскость определяется главными узлами  $i, j$  и  $k$ , а ось  $OZ$  направлена вертикально вверх. Отметим, что применяемые в методе основные принципы не зависят от ориентации координатных осей. Предположим также, что ведомая поверхность в начальный момент времени выше главной поверхности.

Для каждого цикла численного интегрирования уравнения движения применяются к главным и ведомым узлам в идентичной форме. Затем проверяется каждый ведомый узел, прошел ли он через главную поверхность, вызвав таким образом взаимодействие.

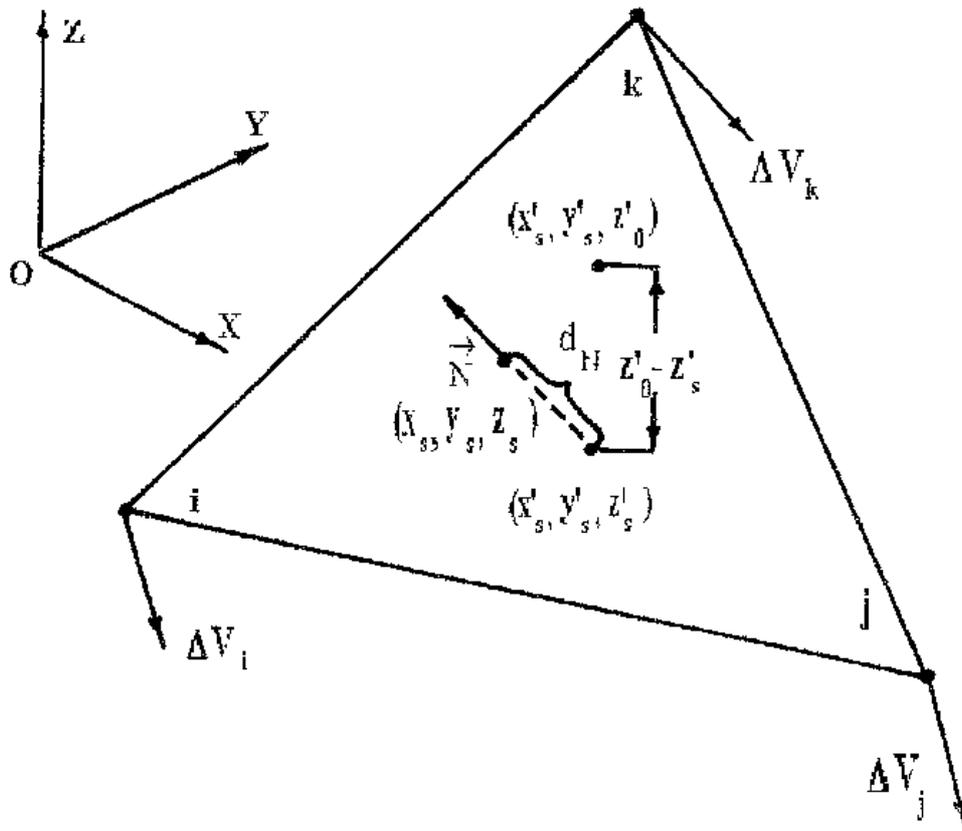


Рис. 6.5. Схема определения компонентов скорости в плоскости главной поверхности

До этой проверки необходимо найти и идентифицировать соответствующую треугольную плоскость главной поверхности. Эффективный способ проверить, находится ли ведомый узел внутри рассматриваемой треугольной проекции или за ее пределами, состоит в определении расстояния от ведомого узла до каждой из линий, определяющих три стороны треугольника. Расстояние до линии  $i-j$  в плоскости  $XOY$  определяется выражением:

$$\delta_{xy} = \frac{\beta_1 x'_s + \beta_2 y'_s + \beta_3}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}, \quad (6.75)$$

где  $\beta_1 = y_i - y_j$ ,  $\beta_2 = x_i - x_j$ ,  $\beta_3 = x_j y_i - x_i y_j$ . Здесь  $x_i$ ,  $y_i$  и  $z_i$  есть координаты главного узла  $i$ , а  $x'_s$ ,  $y'_s$ ,  $z'_s$  — координаты ведомого узла.

Если главный узел  $j$  находится против часовой стрелки от узла  $i$ , глядя вниз от положительной  $OZ$  оси, и величина  $\delta_x > 0$  для всех трех линий треугольника, то ведомый узел находится внутри треугольника.

После того, как соответствующий треугольник найден, необходимо определить, имеется ли взаимодействие. Уравнение главной плоскости, проходящей через узлы  $i$ ,  $j$  и  $k$ , имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (6.76)$$

$$\text{где } A = \begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_j & z_j & 1 \\ y_k & z_k & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_i & x_i & 1 \\ z_j & x_j & 1 \\ z_k & x_k & 1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}.$$

Если координаты ведомого узла есть  $x'_s$ ,  $y'_s$ ,  $z'_s$ , то соответствующая  $z$  координата плоскости  $z_p$  может быть получена из уравнения:

$$z_p = -\frac{Ax + By + D}{C}. \quad (6.77)$$

Если  $z_p$  больше, чем  $z'_s$ , то имеется взаимодействие, и процесс скольжения должен быть продолжен. В противном случае поверхности разделены в месте этого ведомого узла, и его конечные координаты  $x_s$ ,  $y_s$ ,  $z_s$  являются просто равными начальным координатам  $x'_s$ ,  $y'_s$ ,  $z'_s$ , определенным из уравнений движения.

При наличии взаимодействия следующий этап заключается в перемещении ведомого узла на главную поверхность в направлении, нормальном к главной поверхности. Начальное положение ведомого узла  $x'_s$ ,  $y'_s$ ,  $z'_s$  находится ниже треугольной плоскости, как показано на рис. 6.5 в сравнении между  $z_p$  и  $z'_s$ . Вектор нормали, проходящий через начальное положение ведомого узла, имеет три направ-

ляющих косинуса  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , которые определяются делением  $A, B, C$  на  $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ . Ведомый узел проходит расстояние  $\delta_N$  вдоль этого нормального вектора пока не пересечет треугольную плоскость. Это расстояние определяется выражением:

$$\delta_N = \frac{Ax'_s + By'_s + Cz'_s + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (6.78)$$

Окончательные координаты ведомого узла находятся следующим образом:

$$x_s = x'_s + \delta_N \gamma_1, \quad y_s = y'_s + \delta_N \gamma_2, \quad z_s = z'_s + \delta_N \gamma_3. \quad (6.79)$$

Поскольку напряжения зависят от скоростей деформаций, то необходимо обеспечить точное выравнивание скоростей на контактных поверхностях. Вначале корректируются нормальные скорости ведомого узла и трех главных узлов. Три из четырех условий, требуемые для определения этих новых скоростей, включают сохранение линейного момента, нормального к главной поверхности, и сохранение угловых моментов относительно двух осей:

$$\begin{aligned} m_i \Delta v_i^N + m_j \Delta v_j^N + m_k \Delta v_k^N &= m_s \Delta v_s^N, \\ m_i \Delta v_i^N r_i &= m_j \Delta v_j^N r_j, \\ m_i \Delta v_i^N r_i &= m_k \Delta v_k^N r_k, \end{aligned} \quad (6.80)$$

где  $m_s, m_i, m_j, m_k$  — массы ведомого и главных узлов;  $r_i = \sqrt{(x_s - x_i)^2 + (y_s - y_i)^2 + (z_s - z_i)^2}$ , а  $r_j$  и  $r_k$  вычисляются аналогично.

Уравнения после почленного деления на  $m_s \Delta v_s^N$  представляют собой замкнутую систему для определения долей  $R_i, R_j, R_k$  линейного момента, передаваемого от ведомого узла трем главным узлам:

$$R_i + R_j + R_k = 1, \quad (6.81)$$

$$R_i r_i = R_j r_j, \quad (6.82)$$

$$R_i r_i = R_k r_k. \quad (6.83)$$

Здесь  $R_i = m_i \Delta v_i^N / m_s \Delta v_s^N$ , а  $R_j$  и  $R_k$  имеют аналогичный вид. Решая систему уравнений (6.81)–(6.83), получаем доли линейного момента  $R_i$ ,  $R_j$ ,  $R_k$ , передаваемого от ведомого узла трем главным узлам, выраженные через расстояния между ведомым и главными узлами:

$$R_i = \frac{1}{1 + \frac{r_i}{r_j} + \frac{r_i}{r_k}}. \quad (6.84)$$

$R_j$  и  $R_k$  получаются циклической перестановкой индексов. Результирующие соотношения сохранения моментов между изменениями мгновенных нормальных скоростей ведомого узла  $\Delta v_s^N$  и главных узлов  $\Delta v_i^N$ ,  $\Delta v_j^N$  и  $\Delta v_k^N$  имеют форму:

$$\begin{aligned} \Delta v_i^N &= -R_i m_s \Delta v_s^N / m_i, \\ \Delta v_j^N &= -R_j m_s \Delta v_s^N / m_j, \\ \Delta v_k^N &= -R_k m_s \Delta v_s^N / m_k. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Последнее условие включает равенство нормальных скоростей ведомого узла и главной поверхности в месте контакта ведомого узла. Для этого необходимо определить скорость главной поверхности в месте контакта ведомого узла. Результирующая скорость главной поверхности в направлении оси  $Ox$  в позиции ведомого узла имеет вид:

$$v_{1m} = g_i v_{1i} + g_j v_{1j} + g_k v_{1k}. \quad (6.86)$$

Другие компоненты скорости  $v_{2m}$  и  $v_{3m}$  выражаются ана-

логичными уравнениями, а геометрические константы  $g_i$ ,  $g_j$ ,  $g_k$  имеют форму:

$$g_i = \frac{1}{2A_{xy}} [x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k)x_s + (x_k - x_j)y_s], \quad (6.87)$$

где  $A_{xy}$  есть спроецированная площадь поперечного сечения треугольной главной поверхности на плоскость  $XOY$ , а другие члены представляют собой координаты главных и ведомых узлов. Проекции могут также быть на  $XOZ$  или  $YOZ$  плоскости, в зависимости от ориентации главной поверхности. Скорость ведомого узла, нормальная к главной поверхности, записывается:

$$v_s^N = \gamma_1 v_{1s} + \gamma_2 v_{2s} + \gamma_3 v_{3s}, \quad (6.88)$$

где  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  — направляющие косинусы вектора нормали к главной поверхности. Нормальная скорость главной поверхности  $v_m^N$  имеет аналогичную форму, что и уравнение (6.88). Приравняв нормальные скорости и используя соотношения (6.85), определим нормальное изменение скорости ведомого узла:

$$\Delta v_s^N = \frac{v_m^N - v_s^N}{1 + g_i R_i m_s / m_i + g_j R_j m_s / m_j + g_k R_k m_s / m_k}. \quad (6.89)$$

Изменения скоростей в трех главных узлах определяются из уравнений (6.85). Соответствующие изменения скоростей в  $x$ ,  $y$  и  $z$  направлениях получаются умножением  $\Delta v_i^N$ ,  $\Delta v_j^N$ ,  $\Delta v_k^N$  на соответствующие направляющие косинусы. Так, например, для узла  $i$  изменения скоростей по координатам запишутся:

$$\Delta v_{1i} = \gamma_1 v_i^N, \quad \Delta v_{2i} = \gamma_2 v_i^N, \quad \Delta v_{3i} = \gamma_3 v_i^N. \quad (6.90)$$

Рассмотренный алгоритм расчета контактных границ и связанные с ним соответствующие корректировки координат

нат и скоростей проводились без учета трения между соприкасающимися поверхностями. При решении ряда задач возникает необходимость учитывать трение между взаимодействующими телами, поэтому ниже приводится процедура, позволяющая включить данный эффект в общий алгоритм расчета контактных поверхностей.

Чистая величина фрикционного изменения скорости ведомого узла является пропорциональной изменению его нормальной скорости:

$$\Delta v_s^P = f \Delta v_s^N, \quad (6.91)$$

где  $f$  – коэффициент трения. Компоненты скорости в плоскости главной поверхности получаются вычитанием компонент скорости, нормальной к главной плоскости, от компонент полной скорости (рис. 6.6).

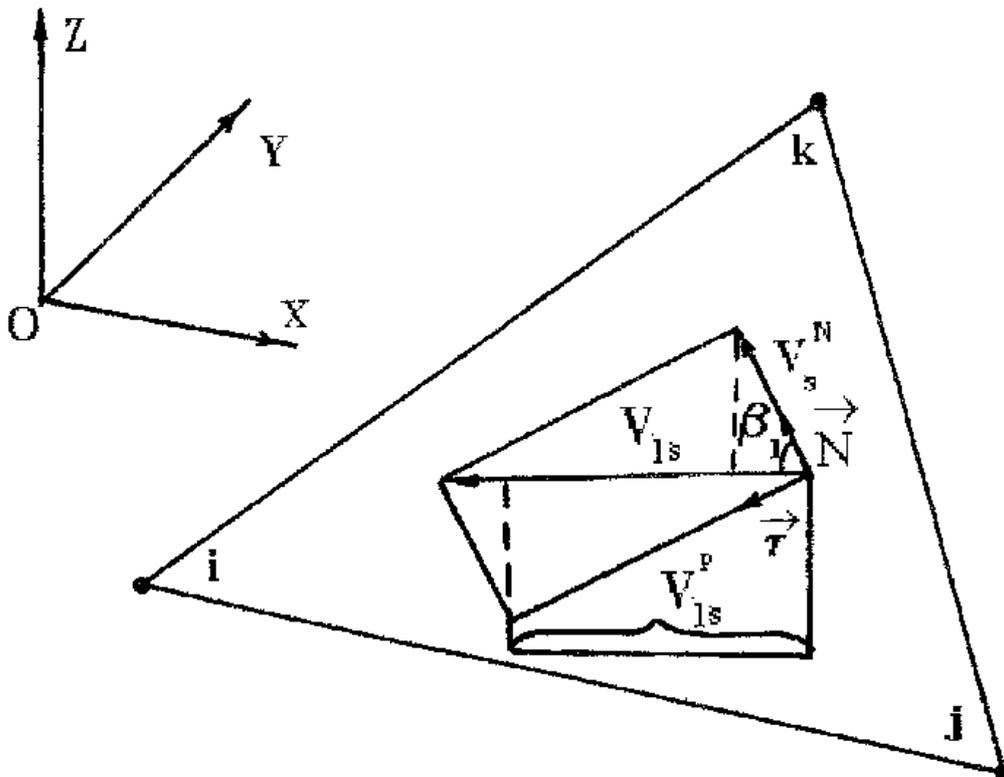


Рис. 6.6. Схема определения компонентов скорости в плоскости главной поверхности

Эти компоненты скорости для ведомого узла имеют вид:

$$\begin{aligned} v_{1s}^P &= v_{1s} - \gamma_1 v_s^N, \\ v_{2s}^P &= v_{2s} - \gamma_2 v_s^N, \\ v_{3s}^P &= v_{3s} - \gamma_3 v_s^N, \end{aligned} \quad (6.92)$$

где  $v_{1s}$ ,  $v_{2s}$ ,  $v_{3s}$  — проекции полной скорости на оси OX, OY, OZ;  $\gamma_1 v_s^N$ ,  $\gamma_2 v_s^N$ ,  $\gamma_3 v_s^N$  — проекции нормальной скорости на оси OX, OY, OZ.

Внутриплоскостные скорости главной поверхности  $v_{1m}^P$ ,  $v_{2m}^P$ ,  $v_{3m}^P$  записываются аналогично.

Изменения компонентов скорости ведомого узла, вызванные трением, определяются выражением:

$$\begin{aligned} \Delta v_{1s}^P &= \frac{v_{1r}^P}{\sqrt{(v_{1r}^P)^2 + (v_{2r}^P)^2 + (v_{3r}^P)^2}} \Delta v_s^P, \\ \Delta v_{2s}^P &= \frac{v_{2r}^P}{\sqrt{(v_{1r}^P)^2 + (v_{2r}^P)^2 + (v_{3r}^P)^2}} \Delta v_s^P, \\ \Delta v_{3s}^P &= \frac{v_{3r}^P}{\sqrt{(v_{1r}^P)^2 + (v_{2r}^P)^2 + (v_{3r}^P)^2}} \Delta v_s^P, \end{aligned} \quad (6.93)$$

где компоненты относительной скорости  $v_{1r}^P$ ,  $v_{2r}^P$  и  $v_{3r}^P$  вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{1r}^P &= v_{1m}^P - v_{1s}^P, \\ v_{2r}^P &= v_{2m}^P - v_{2s}^P, \\ v_{3r}^P &= v_{3m}^P - v_{3s}^P. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Изменения скоростей главного узла  $i$ , обусловленные трением, запишутся по соответствующим направлениям координат в виде:

$$\begin{aligned}\Delta v_{1i}^P &= -R_i \Delta v_{1s}^P m_s / m_i, \\ \Delta v_{2i}^P &= -R_i \Delta v_{2s}^P m_s / m_i, \\ \Delta v_{3i}^P &= -R_i \Delta v_{3s}^P m_s / m_i.\end{aligned}\quad (6.95)$$

Аналогичные выражения справедливы для главных узлов  $j$  и  $k$ .

Согласование скоростей по уравнениям (6.80)–(6.95) дает согласование скорости для одного ведомого узла на одной главной плоскости. Для многочисленных ведомых узлов соответствующие главные скорости могут быть изменены, когда корректируются последующие ведомые узлы. Таким образом, возможно нарушение начально-согласованных скоростей. Если необходимо получить более точное согласование скоростей по всей поверхности, то уравнения (6.80)–(6.95) должны быть повторены для некоторого числа итераций, пока согласование скоростей не станет приемлемым.

Описанная процедура расчета контактных поверхностей соударяющихся деформируемых твердых тел в трех измерениях является универсальной и может быть использована при решении осесимметричных и плоских задач. Реализованные в алгоритме условия сцепления, скольжения и разделения поверхностей позволяют значительно расширить класс решаемых задач.

### 6.3.2. Алгоритм перестройки конечно-элементной модели в случае разрушения материалов взаимодействующих тел

Применяемые в настоящее время для решения проблем высокоскоростного удара методики, основанные на описании движения среды в переменных Лагранжа, в ряде случаев

ев оказываются предпочтительнее методик, использующих переменные Эйлера. В частности, они обычно требуют меньше времени счета, обеспечивают более точное описание поверхностей контакта, поверхностей раздела сред с различными физико-механическими и термодинамическими характеристиками, а также лучше предсказывают временной процесс изменения ответной реакции материала. Однако до сих пор решение задач в переменных Лагранжа, связанных с эрозийным разрушением материалов соударяющихся тел, наталкивалось на труднопреодолимые проблемы корректной перестройки расчетной сетки. Особенно остро этот вопрос стоял для трехмерных лагранжевых методик расчета задач глубокого проникания тел с учетом их эрозийного разрушения. Итогом многолетней работы ряда американских фирм явился эффективный и универсальный алгоритм расчета эрозии поверхностей материалов соударяющихся тел [7], который существенно расширил вычислительные возможности лагранжевых методик. Ниже детально излагается этот алгоритм.

На рис. 6.7 показана частично разрушенная главная поверхность, состоящая из упакованных соответствующим образом тетраэдральных элементов. Как правило, в задачах удара главной поверхностью обозначается лицевая поверхность преграды. Подчиненные узлы (узлы, принадлежащие ударнику) находятся выше главной поверхности и должны всегда видеть соответствующие треугольники главной поверхности так, чтобы узлы треугольников располагались против часовой стрелки. Подчиненные узлы не должны проникать через главную поверхность, а могут лишь передавать свой импульс узлам соответствующей главной треугольной поверхности. Главная поверхность может быть разрушена полностью за счет разрушения тетраэдральных элементов, которые имеют 1, 2, 3 и 4 стороны на главной поверхности. Следует иметь в виду, что полностью разрушенные элементы не развивают напряжений и давлений.

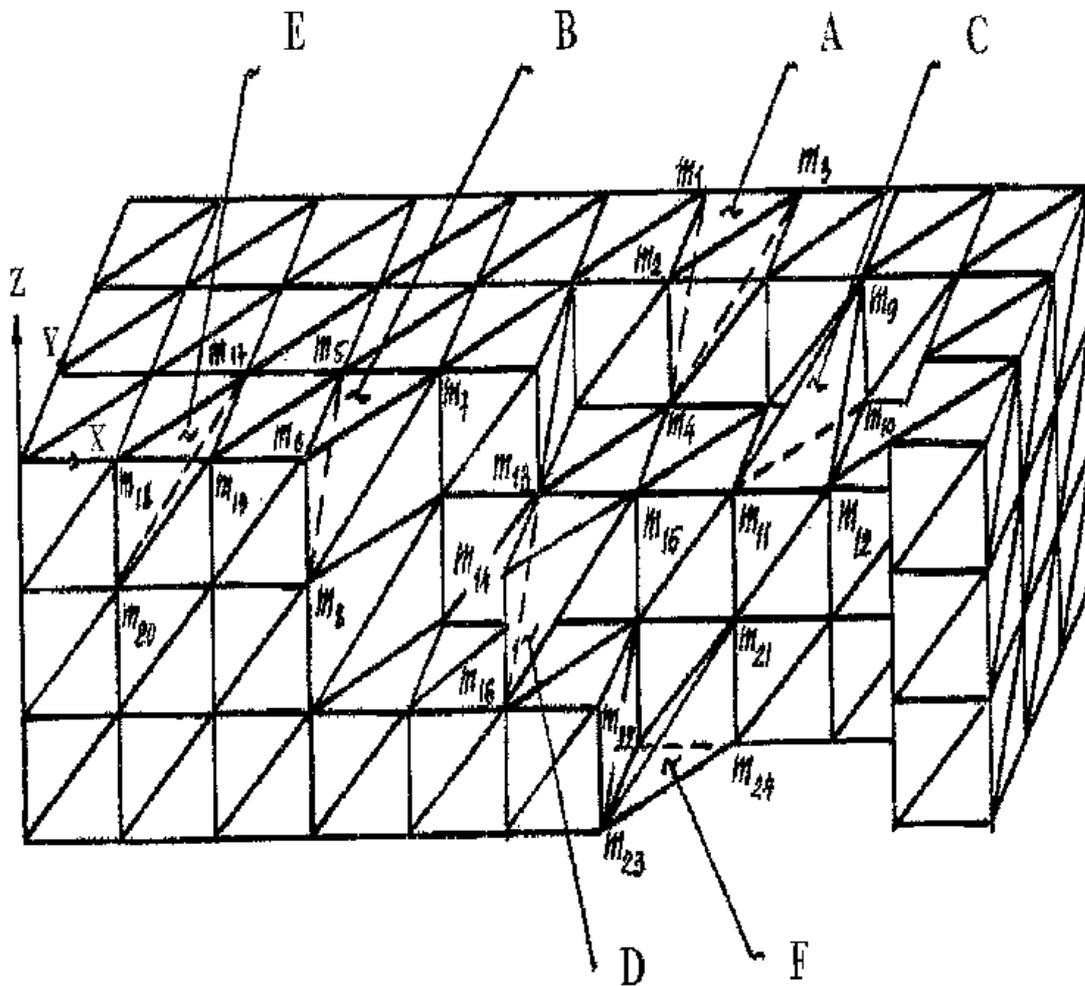


Рис. 6.7. Иллюстрация алгоритма расчета эрозийного разрушения материалов соударяющихся тел

Они, по существу, исчезают, за исключением того, что масса удерживается на узлах, которые по-прежнему движутся со своими скоростями и передают свой импульс узлам неразрушенных элементов ударника и преграды.

Важнейшим ограничением для общего алгоритма является то, что никакой элемент со свободной поверхностью не может быть разрушен, если только эта свободная поверхность сначала не была обозначена как главная поверхность. Прежде чем начать вычислительный процесс, необ-

ходимо завести массивы из трех узлов, определяющих индивидуальные треугольники главной поверхности. Далее следует непрерывно отмечать каждый узел, расположенный на главной поверхности, считать и запоминать количество элементов, присоединенных к нему. Если промаркированы 3 или 4 узла элемента, то элемент находится на главной поверхности и может разрушаться, если он превышает заданный критерий разрушения. Когда элемент полностью разрушился, то счет элементов для каждого из четырех узлов уменьшается на 1. Таким образом, счет отражает количество неразрушенных элементов, присоединенных к узлу. Когда счет достигает нуля, узел делается подчиненным узлом, так как он больше не связан с собственной главной поверхностью. Этот новый подчиненный узел (который продолжает иметь массу, момент и кинетическую энергию) может соприкасаться, контактировать с главной поверхностью, но не переходить через нее.

Шесть элементов (A, B, C, D, E, F) на рис. 6.7 имеют 3 или 4 узла, а также 1, 2, 3 или 4 стороны на главной поверхности. То есть показанные элементы охватывают все возможные вариации расположения главных треугольных поверхностей, являющихся сторонами тетраэдров. Далее описываются изменения, необходимые для предварительного определения главной поверхности и подчиненных узлов.

Элемент A имеет одну сторону ( $m_1-m_2-m_3$ ) на главной поверхности. Все 4 узла  $m_1, m_2, m_3, m_4$  замаркированы. Так как только одна сторона ( $m_1-m_2-m_3$ ) содержится в списке главных треугольных поверхностей, то три другие стороны элемента не принадлежат главной поверхности. Если в элементе A достигнут или превышен заданный критерий разрушения, то элемент считается полностью разрушенным. При этом главная треугольная поверхность ( $m_1-m_2-m_3$ ) исключается, а три треугольные стороны смежных элементов ( $m_1-m_2-m_4; m_1-m_4-m_3; m_2-m_3-m_4$ ) добавляются.

Узлы новых сторон должны быть даны в соответствующем порядке, чтобы подчиненные узлы видели размещение против часовой стрелки. Счет элементов узлов  $m_1, m_2, m_3, m_4$  убывает, однако все 4 узла остаются на главной поверхности, так как ни один счет элементов не равен нулю.

Элемент В имеет две стороны  $(m_5-m_6-m_7; m_6-m_8-m_7)$  на главной поверхности. Маркируются 4 узла —  $m_5, m_6, m_7, m_8$ . Если в элементе В выполнен критерий разрушения, то элемент полностью разрушается. При этом две поверхности  $(m_5-m_6-m_7; m_6-m_8-m_7)$  исключаются, а две  $(m_5-m_6-m_8; m_6-m_8-m_7)$  добавляются. Счет элементов узлов  $m_5, m_6, m_7, m_8$  убывает, но ни один из счетов не равен нулю.

Элемент С имеет три стороны  $(m_9-m_{10}-m_{11}; m_9-m_{11}-m_{12}; m_9-m_{12}-m_{10})$  на главной поверхности. Маркируются 4 узла —  $m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}$ . Если в элементе С выполнен критерий разрушения, то он считается разрушенным. При этом три поверхности  $(m_9-m_{10}-m_{11}; m_9-m_{11}-m_{12}; m_9-m_{12}-m_{10})$  исключаются, а одна  $(m_{10}-m_{11}-m_{12})$  добавляется. Счет элементов узлов  $m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}$  убывает, но ни один из счетов не равен нулю.

Элемент D имеет четыре стороны  $(m_{13}-m_{14}-m_{15}; m_{13}-m_{16}-m_{14}; m_{14}-m_{16}-m_{15}; m_{13}-m_{15}-m_{16})$  на главной поверхности. Маркируются 4 узла —  $m_{13}, m_{14}, m_{15}, m_{16}$ . Элемент D считается разрушенным, если в нем выполнен критерий разрушения. Все четыре треугольные поверхности исключаются, и ни одна не добавляется. Счет элементов узлов  $m_{13}, m_{14}, m_{15}, m_{16}$  убывает. Счет элементов узлов  $m_{13}, m_{15}, m_{16}$  не равен нулю и поэтому они остаются на главной поверхности. Счет элементов в узле  $m_{14}$  равен нулю, следовательно, этот узел становится подчиненным узлом.

Элемент E является специальным случаем, так как он имеет одну сторону  $(m_{18}-m_{19}-m_{20})$  на плоскости симметрии  $y=0$ , которая вначале не была обозначена главной поверхностью. Обычный алгоритм указывает на одну сторону  $(m_{17}-m_{18}-m_{19})$ , которую надо отбросить и добавить три сто-

роны ( $m_{17}-m_{18}-m_{20}$ ;  $m_{17}-m_{20}-m_{19}$ ;  $m_{18}-m_{19}-m_{20}$ ). Однако сторона на плоскости симметрии при  $y=0$  ( $m_{18}-m_{19}-m_{20}$ ) не должна быть прибавлена. Эта сторона легко идентифицируется и исключается, если учитывать, что  $y=0$  для узлов  $m_{18}$ ,  $m_{19}$ ,  $m_{20}$ . Для этого случая счет элементов узлов  $m_{17}$ ,  $m_{18}$ ,  $m_{19}$  и  $m_{20}$  снова убывает. Узел  $m_{20}$  ранее не был маркирован и поэтому должен быть маркирован, чтобы идентифицировать его как часть главной поверхности. Следует отметить, что общий алгоритм будет регулировать этот случай, если стороны треугольного элемента на плоскости симметрии вначале будут обозначены как часть главной поверхности. Так как это может существенно увеличить размер главной поверхности, то он обычно трактуется как особый случай.

Элемент F является другим особым случаем, так как он срабатывается через свободную поверхность. Здесь общий алгоритм должен удалить две стороны ( $m_{21}-m_{22}-m_{23}$ ;  $m_{21}-m_{23}-m_{24}$ ) и добавить две новые стороны ( $m_{21}-m_{22}-m_{24}$ ;  $m_{22}-m_{23}-m_{24}$ ). Однако сторона на тыльной поверхности пластины ( $m_{22}-m_{23}-m_{24}$ ) не должна добавляться. Эта сторона может легко идентифицироваться, если номера узлов увеличиваются вниз по слоям. Тогда номера узлов  $m_{22}$ ,  $m_{23}$  и  $m_{24}$  должны быть больше, чем номера узлов предпоследнего слоя. В этом случае сторона  $m_{22}-m_{23}-m_{24}$  не добавляется. Здесь также следует отметить, что общий алгоритм будет охватывать этот особый случай, если стороны элемента на основании плиты вначале обозначить как часть главной поверхности.

После того, как определена новая главная поверхность с учетом разрушенных элементов и сгруппированы подчиненные узлы, включается в действие алгоритм корректировки скоростей и координат узлов, изложенный выше. Необходимо отметить, что в качестве главной поверхности на каждом шаге по времени должны попеременно рассматриваться контактные поверхности пристрады и ударника,

чтобы смоделировать эрозийное разрушение материалов обоих тел.

## **6.4. Некоторые примеры использования метода конечных элементов для решения разнообразных задач высокоскоростного соударения деформируемых твердых тел**

### **6.4.1. Анализ взаимодействия сферического ударника с системой пространственно разнесенных мишеней**

Данный метод расчета использовался для анализа процессов взаимодействия сферических ударников из сплава вольфрама, никеля и железа (ВНЖ-80) с защитной конструкцией, состоящей из трех расположенных друг за другом на расстоянии 50 мм мишеней из дюралюминиевого сплава Д16М. Масса частицы 2,6 г. Толщина первой мишени 6 мм, второй и третьей по 16 мм. Начальная скорость удара 1700 м/с.

Результаты расчета представлены на рис. 6.8–6.10 (цв. вклейка). На них в моменты пробивания частицей мишеней приведены сечения изометрических проекций конфигураций частицы и, соответственно, первой, второй и третьей мишени.

При взаимодействии сферической частицы с первым экраном по мере проникания ее в мишень и увеличения площади их контакта как в ударнике, так и в мишени формируются распространяющиеся в противоположных направлениях ударные волны и волны разгрузки. Последующий процесс взаимодействия характеризуется выходом ударной волны на тыльные свободные поверхности частицы и первого экрана и взаимодействием встречных волн разгрузки, распространяющихся от свободных поверхностей взаимодействующих тел. Откольных разрушений ни в ударнике, ни в экране не происходит. Это обусловлено

формой ударника, при внедрении которого в первый экран не образуется ударной волны высокой интенсивности из-за разгрузки, идущей с боковых поверхностей ударника. В результате выхода ударной волны на свободную тыльную поверхность экрана формируется волна разгрузки, интенсивность которой не достаточна, чтобы при взаимодействии со встречными волнами разгрузки привести к росту уровня пористости в экране до критической величины. Разрушение слоя материала под ударником развивается по сдвиговому механизму, то есть в результате интенсивных пластических деформаций.

Пробитие первого экрана происходит на момент времени 10 мкс (рис 6.8, цв. вклейка). Со второй мишенью деформированная, но сохранившая свою целостность частица взаимодействует со скоростью 1337 м/с. Процесс проникания ее через вторую мишень продолжается 36 мкс. При этом частица теряет часть своей массы из-за развивающихся разрушений сдвигом. Мишень, как и в случае пробития первого экрана, под ударником разрушается за счет сдвиговых деформаций. В запреградном пространстве масса частицы составляет 1,9 г (рис. 6.9, цв. вклейка). С третьей мишенью потерявшая часть своей массы частица взаимодействует со скоростью 394 м/с. Расчет проникания ее в третью мишень продолжается до момента времени 62 мкс (рис. 6.10, цв. вклейка). Пробития мишени не происходит. Суммарная величина глубины проникания частицы через трехслойную мишень составляет 26,3 мм.

На-рис. 6.11 приведены лицевые поверхности мишеней после ударного взаимодействия со сферической частицей из ВНЖ-80 массой 2,6 г со скоростью  $1711 \pm 15$  м/с. Видно, что в первой и во второй мишенях образовались сквозные отверстия, в третьей — только входное отверстие. На лицевых сторонах второй и третьей мишени наблюдаются следы от осколков выбитой части материалов первой и второй

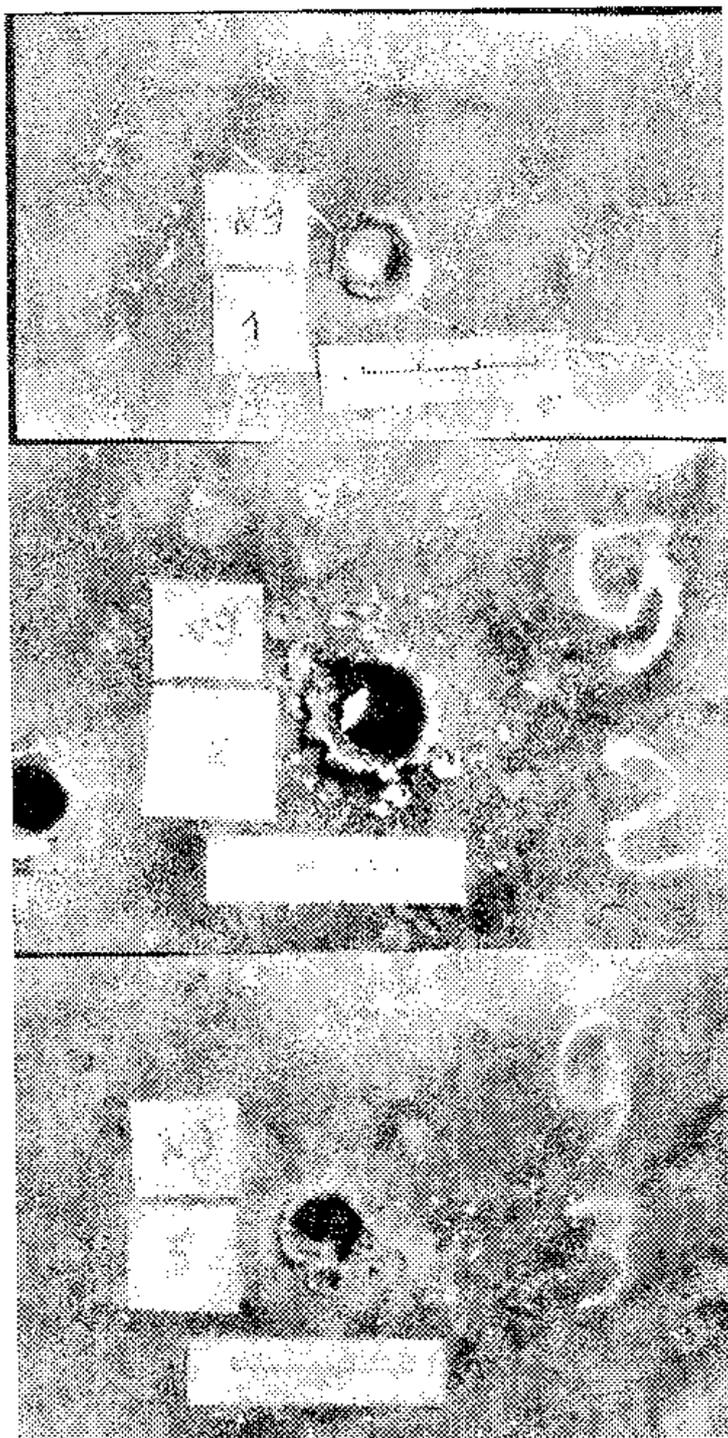


Рис. 6.11. Лицевые поверхности мишени после взаимодействия со сферическим ударником: пластина №9(1) – сплав Д16 толщиной 6,0 мм; пластины №9(2), №9(3) – сплав Д16М толщиной 16 мм каждая; ударник – сплав ВНЖ-80. Скорость удара 1,711 км/с. Удар по нормали.

мишеней соответственно. Суммарная глубина внедрения в разнесенную конструкцию равна 32,3 мм.

Таким образом, предложенная методика расчета в основном описывает процессы деформирования и разрушения сферической частицы при взаимодействии с мишенью, представляющей собой набор разнесенных преград в диапазоне скоростей удара, когда материал ударника находится на стадии предразрушения, или ударник частично разрушен.

Расхождение результатов расчета по суммарной глубине проникания с данными эксперимента составляет приблизительно 18%. Оно обусловлено как неточностью задания начальной скорости удара, так и некоторым произволом выбора констант материалов модели, связанных со сдвиговым механизмом разрушения.

#### **6.4.2. Расчет ударного взаимодействия частиц с экранированным взрывчатым веществом**

Для оценки влияния внешних параметров воздействия на возможность и условия инициирования взрыва были рассмотрены следующие задачи. Компактный цилиндрический ударник из ВНЖ массой 1 г ударяет по слоисто-разнесенной конструкции. Первая преграда состоит из двух слоев: лицевой слой – стеклотекстолит толщиной 10 мм, тыльный – алюминиевый сплав толщиной 5 мм. Вторая преграда отстоит от первой на расстояние 50 мм и состоит из ВВ, защищенного слоем алюминиевого сплава толщиной 5 мм.

Для сравнения проводились расчеты соударения цилиндрического ударника из ВНЖ массой 10 г с аналогичной слоисто-разнесенной конструкцией.

Кроме того, рассматривались задачи о взаимодействии компактных цилиндрических ударников из ВНЖ массой 1 и 10 г с системой слоисто-разнесенных преград, содержащей демпфирующий слой из пенопласта. Первая пре-

града разнесенной конструкции состоит из двух слоев. Лицевой слой — стеклотекстолит толщиной 10 мм, тыльный — алюминиевый сплав толщиной 5 мм. Вторая преграда отстоит от первой на расстояние 50 мм и состоит из ВВ, защищенного слоем алюминиевого сплава 5 мм и слоем пенопласта толщиной 22 мм.

Параметры удара: скорость взаимодействия и угол встречи для рассмотренных задач составляют 3 км/с и 30° соответственно.

При построении математической модели инициирования детонации в однородных и гетерогенных ВВ вещество в зоне химической реакции представляется в виде смеси не прореагировавшего ВВ и продуктов детонации.

В случае гетерогенных ВВ численное моделирование инициирования детонации, основанное на чисто аррениусовской зависимости для скорости реакции, не позволяет правильно описать процесс нарастания амплитуды инициирующей ударной волны, поэтому используется уравнение [16]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = AW^x \left[ \left( \rho_1 / \rho_0 \right) - 1 \right]^h + BW^x (1 - W)^y p^q, \quad (6.96)$$

где  $W$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  — массовая доля, начальная и текущая плотности непрореагировавшего ВВ;  $A$ ,  $B$ ,  $h$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $q$  — эмпирические константы.

Изучение процессов возбуждения детонации и определение структуры детонационных волн требуют, помимо знания кинетики реакций, знания уравнений состояния продуктов взрыва и исходного ВВ. Наилучшие результаты для большого количества ВВ были получены при использовании уравнения состояния ДУЛ [17]:

$$p_i = A_i \left( 1 - \frac{\omega_i}{R_{1i} V_i} \right) \exp(-R_{1i} V_i) + \quad (6.97)$$

$$+ B_i \left( 1 - \frac{\omega_i}{R_{2i} V_i} \right) \exp(-R_{2i} V_i) + \frac{\omega_i \rho_0}{V_i} (E_i + E_{0i}),$$

где  $V_i = \rho_0 / \rho_i$ ;  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $R_{1i}$ ,  $R_{2i}$ ,  $E_{0i}$ ,  $\omega_i$  — эмпирические константы ( $i=1$  для ВВ,  $i=2$  для продуктов реакции).

В качестве дополнительных условий, замыкающих систему уравнений, описывающих в рамках гидродинамической модели движение реагирующей среды, вводится аддитивность объемов и внутренних энергий фаз смеси:

$$1/\rho = W/\rho_1 + (1-W)/\rho_2, \quad E = WE_1 + (1-W)E_2, \quad (6.98)$$

и предполагается, что в среде осуществляется локальное равновесие по давлению:

$$p = p_1(\rho_1, E_1) = p_2(\rho_2, E_2). \quad (6.99)$$

При определении соотношения внутренних энергий фаз смеси ВВ и ПВ используются зависимости [18]:

$$E_1 = E_1^H + \frac{[E - WE_1^H - (1-W)E_2^S] E_1^H}{WE_1^H + (1-W)|E_2^S|},$$

$$E_2 = E_2^S + \frac{[E - WE_1^H - (1-W)E_2^S] |E_2^S|}{WE_1^H + (1-W)|E_2^S|}, \quad (6.100)$$

где индексом «Н» обозначено значение внутренней энергии на адиабате Гюгонио, а индексом «S» — на изэнтропе:

$$E_1^H = \frac{(1-V_1) \left[ A_1 \left( V_1 - \frac{\omega_1}{R_{11}} \right) \exp(-R_{11} V_1) + B_1 \left( V_1 - \frac{\omega_1}{R_{21}} \right) \exp(-R_{21} V_1) + \omega_1 \rho_0 E_{01} \right]}{\rho_0 [2V_1 - \omega_1 (1-V_1)]},$$

$$E_2^S = \left[ \frac{A_2}{R_{12} \exp(R_{12} V_2)} + \frac{B_2}{R_{22} \exp(R_{22} V_2)} \right] \frac{1}{\rho_0} + \frac{C_2}{V_2^{\omega_2}} - E_{02}.$$

Постоянная  $C_2$  выбирается таким образом, чтобы изэнтропа проходила через точку Чепмена—Жуге. Температуры компонентов при этом могут быть различными. Тестирование методики инициирования детонации ВВ РВХ-9404 приведено в [19].

На рис. 6.12 (цв. вклейка) показаны конфигурации преграды и ударников массой 1 г и массой 10 г в момент полета ко второй преграде. Во время движения в пространстве ударник массой 1 г вращается и подходит ко второй преграде тыльной стороной.

На рис. 6.13 (цв. вклейка) показаны конфигурации ударников и второй преграды в моменты времени 55 и 38 мкс массой 1 и 10 г. Максимальные давления в указанные моменты времени равны соответственно 44,7 и 49 ГПа. По сгущению сетки виден процесс формирования детонационного фронта.

На рис. 6.14–6.15 (цв. вклейка) показаны конфигурации ударников и слоисто-разнесенной конструкции, содержащей демпфирующий слой из пенопласта.

При ударе частицы массой 1 г по слоистой преграде, содержащей слой пенопласта, наблюдается нарушение сплошности лицевого слоя из алюминиевого сплава, движение и последующее торможение ударника и частиц разрушенного лицевого слоя в пенопласте. Возникающие в процессе удара волны напряжений гасятся в пенопласте, и взрывчатое вещество остается невредимым. При взаимодействии со слоисто-разнесенной конструкцией ударник массой 10 г пробивает алюминиевый слой, слой пенопласта и инициирует детонацию во взрывчатом веществе.

Проведенные расчеты показывают, что наличие демпфирующего слоя пенопласта между лицевым алюминиевым слоем и ВВ предотвращает инициирование детонации

во взрывчатом веществе при массе ударника 1 г, указанных начальных условиях соударения и геометрии взаимодействующих тел. Увеличение массы ударника до 10 г приводит к инициированию детонации в ВВ несмотря на наличие в данной слоисто-разнесенной конструкции демпфирующего слоя.

### ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 6

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1973.— Т. 1, 2.— 1112 с.
2. *Белов Н.Н., Демидов В.Н., Ефремова Л.В. и др.* Компьютерное моделирование динамики высокоскоростного удара и сопутствующих физических явлений // Изв. вузов. Физика.—1992. — №8.— С. 6—48.
3. *Уилкинс М.Л.* Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967. — С. 212—263.
4. *Johnson G.R.* High velocity impact calculations in three dimensions // J. Appl. Mech. — 1977. — V. 44. — №3. — P.95—100.
5. *Johnson G.R.* Liquid-solid impact calculations with triangular elements // Transactions of the ASME. — 1977. — V. 99. — №3. — P. 589—600.
6. *Johnson G.R., Colby D.D., Vavrick D.J.* Three-dimensional computer code for dynamic response of solids to intense impulsive load // Int. J. Numerical Methods in Engineering. — 1979. — V. 14. — P. 1865—1871.
7. *Johnson G.R., Stryk R.A.* Eroding interfaces and improved tetrahedral element algorithms for high-velocity impact computations in three dimensions // J. Impact Engug. — 1987. — V. 5. — P. 411—421.
8. *Баум Ф.А., Орленко Л.П., Станюкович К.П., Чельшев В.П., Шехтер Б.И.* Физика взрыва. — М.: Наука, 1975. — 704 с.

9. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ. — 1960. — Т. 24. — Вып. 76. — С. 1057—1072.
10. Жуков А.В. Константы и свойства уравнений состояния с линейной  $P$ - $\rho$ - $E$  связью // Механика деформируемого твердого тела. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1990.— С. 43—46.
11. Johnson J.N. Dynamic fracture and spallation in ductile solids // J. Appl. Phys. — 1981. — V. 52. — №4. — P. 2812—2825.
12. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М.: Мир, 1976.— 464 с.
13. Oden J.T., Agirre-Ramirez G. Formulations of general discrete models of thermomechanical behavior of materials // Int. J. Solids Struct. — 1969. — V. 5. — №10. — P. 1077—1093.
14. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.— 541 с.
15. Сегерленд Л. Применение метода конечных элементов. — М.: Мир, 1979.— 392 с.
16. Грин Л., Нидик Е., Ли Е., Гарвер К. Иницирование химического разложения РВХ-9404 слабыми ударными волнами // Детонация и взрывчатые вещества. — М.: Мир, 1981. — С 107—122.
17. Фингер М., Ли Е., Хелм Ф. и др. Влияние элементарного состава на детонационные свойства ВВ // Детонация и взрывчатые вещества. — М.: Мир, 1981. — С. 52—75.
18. Мейдер Ч. Численное моделирование детонации. — М.: Мир, 1985. — 384 с.
19. Белов Н.Н., Хабибуллин М.В., Югов Н.Т. и др. Компьютерное моделирование последствий соударения твердой деформируемой частицы с экранированным взрывчатым веществом // Всесибирские чтения по математике и механике: Доклады конференции. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. — Т. 2. — Ч. 1. — С. 41—47.

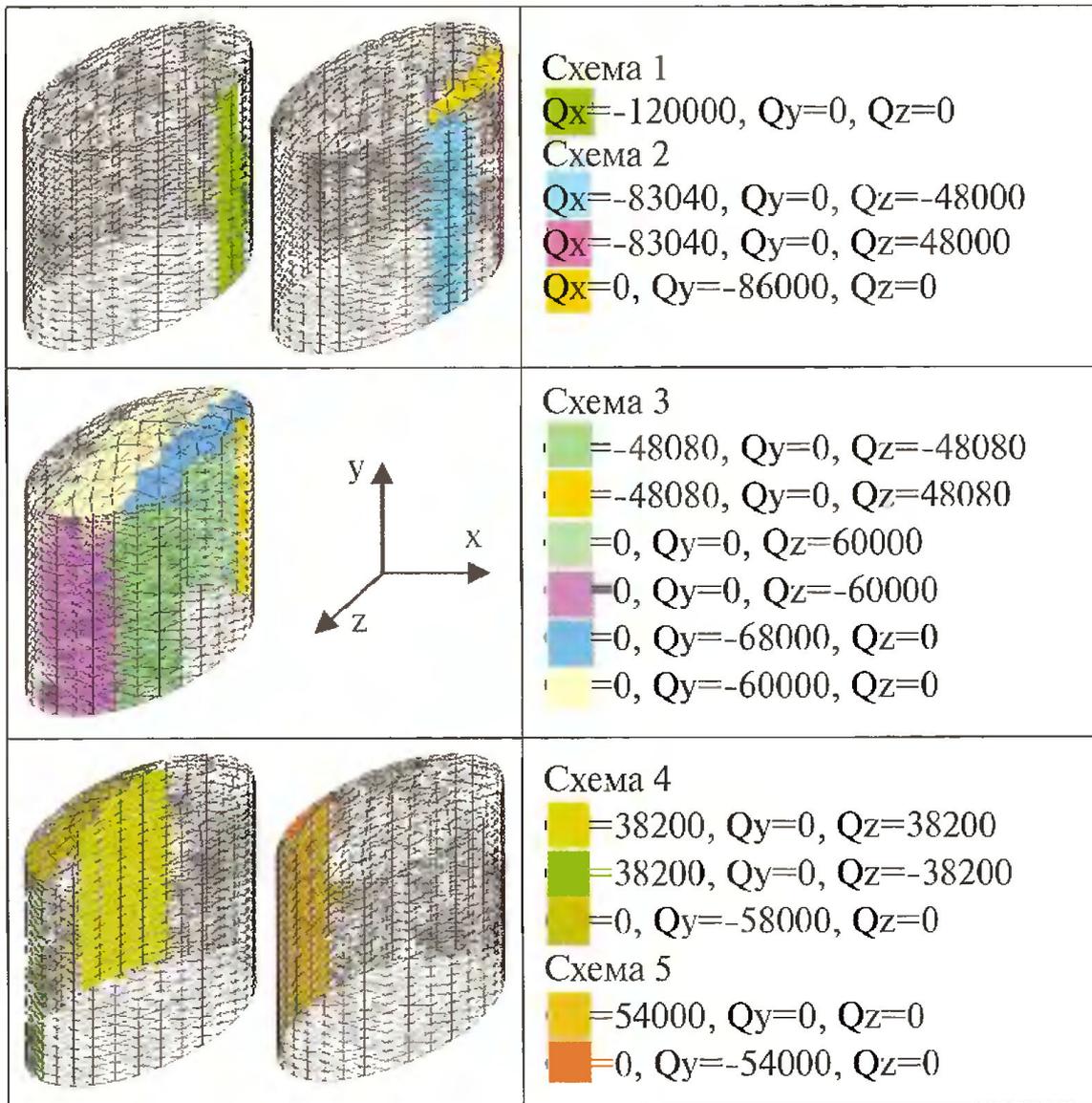


Рис. 4.16. Расчетные нагрузки

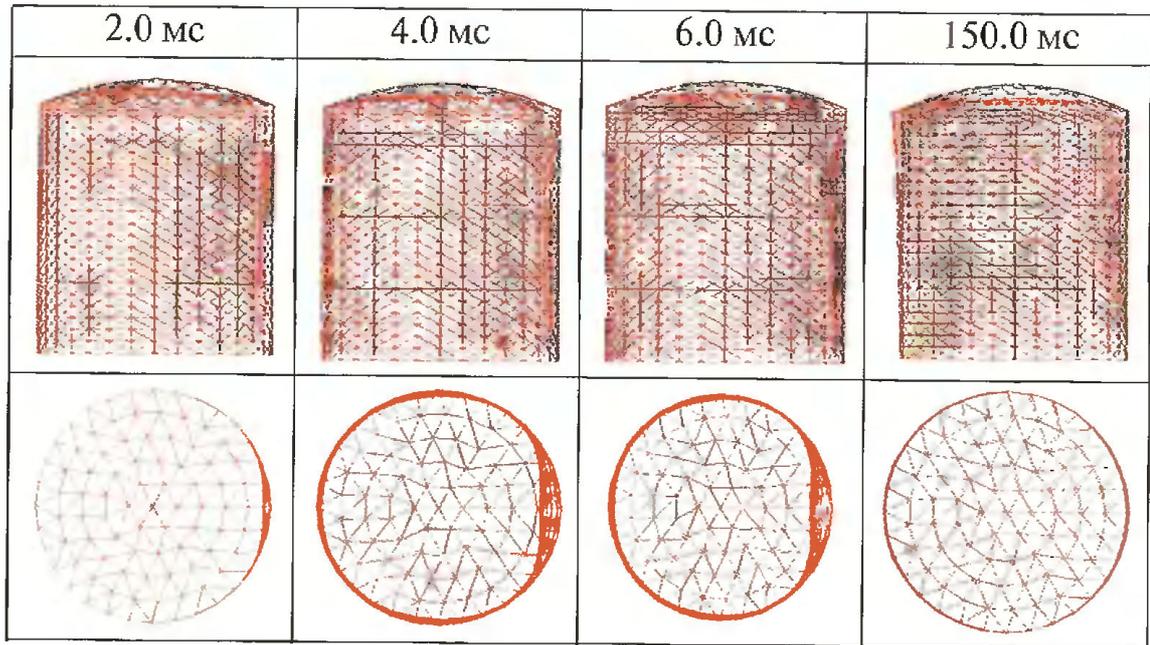


Рис. 4.17. Деформированные схемы составной оболочки вращения

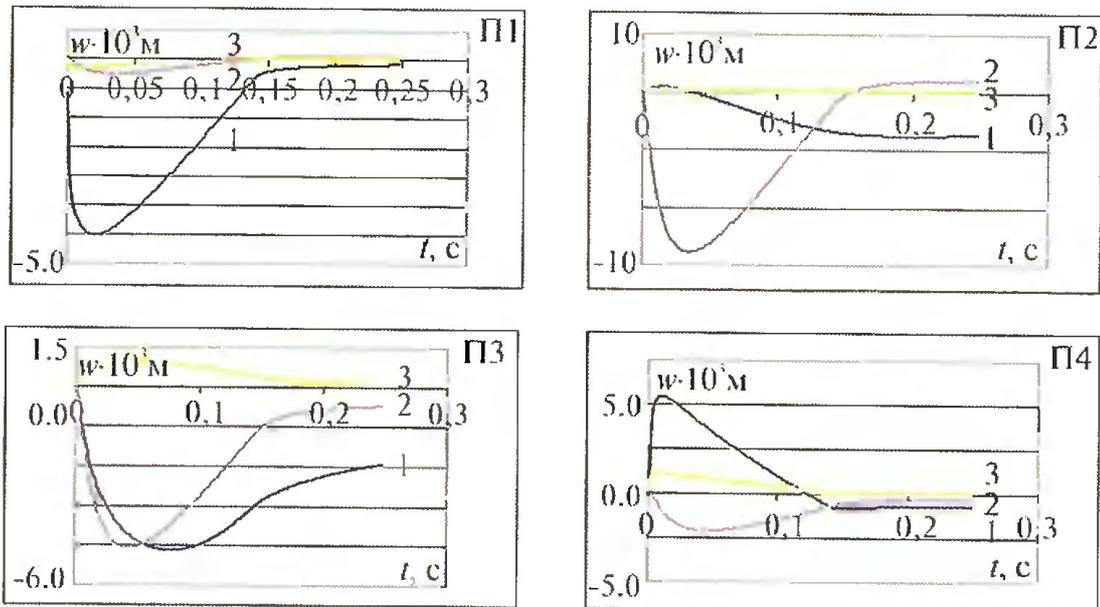


Рис. 4.18. Расчетные диаграммы перемещений оболочки

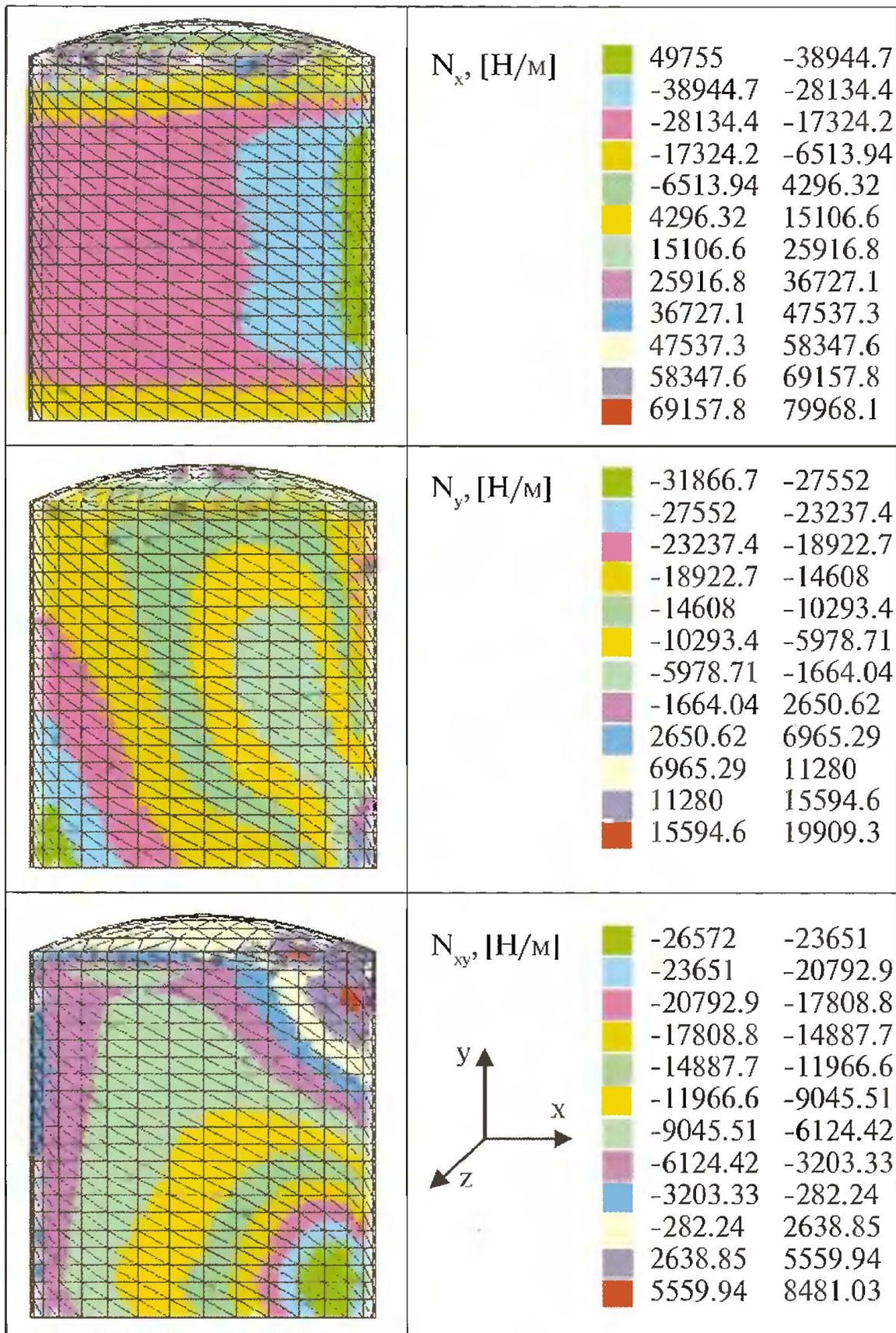


Рис. 4.19. Результаты расчета оболочки, изополя касательных сил

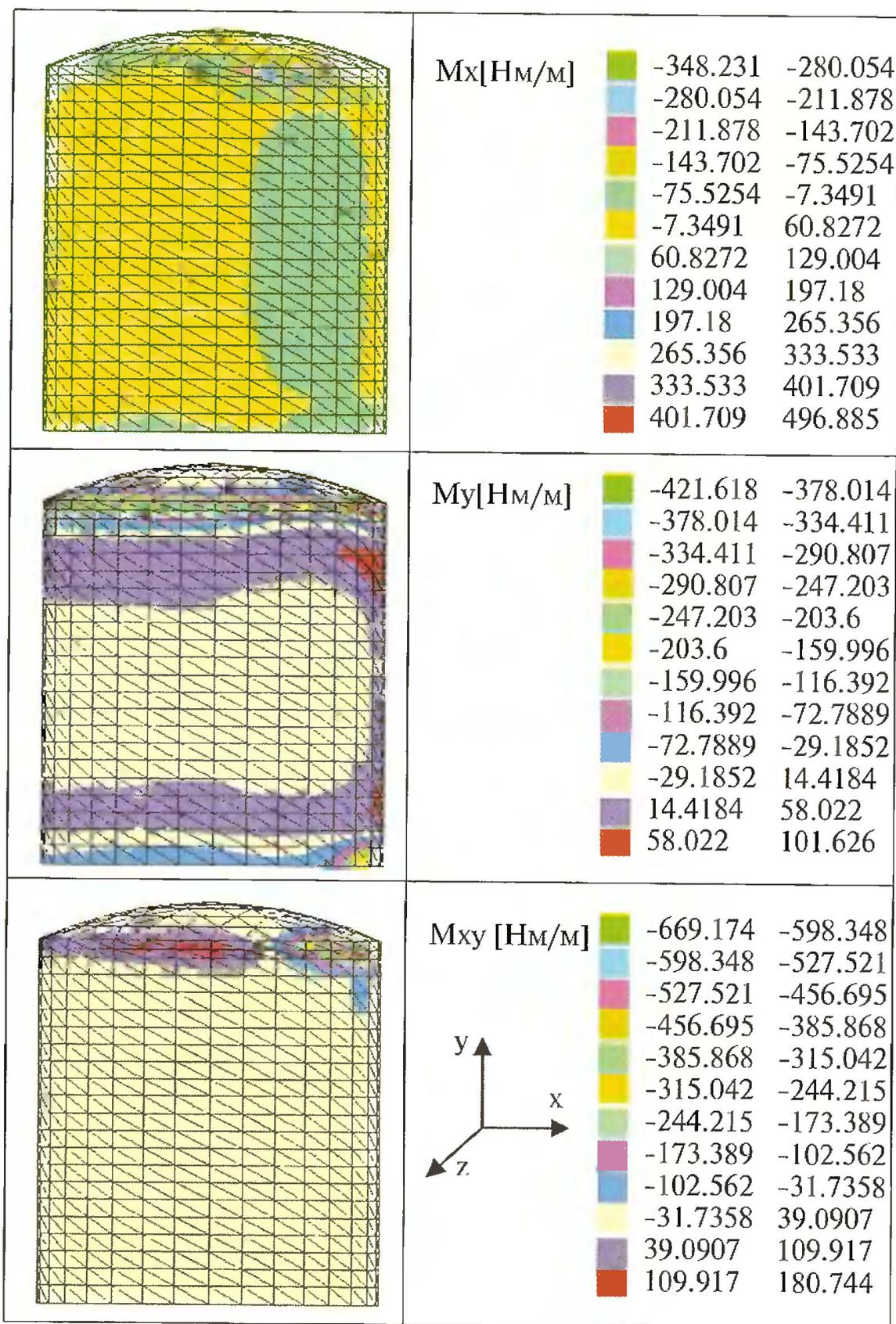
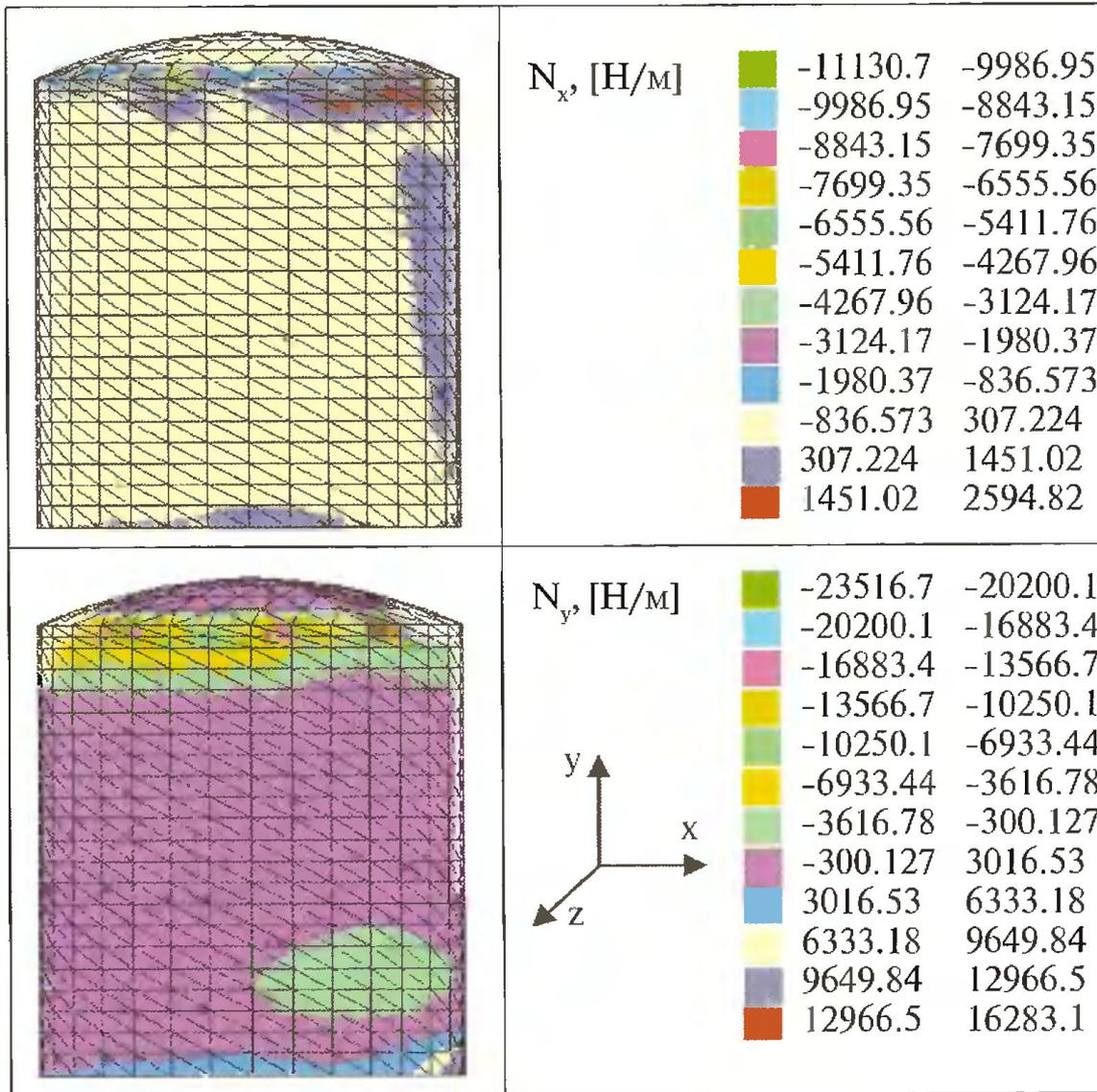


Рис. 4.20. Результаты расчета оболочки, изополя изгибающих моментов



Примечание: в таблице показана проекция оболочки на плоскость XOY глобальной системы координат. Усилия в таблице даны в локальной системе координат: ось x – горизонтальная, ось y – вертикальная.

Рис. 4.21. Результаты расчета оболочки, изополя поперечных сил

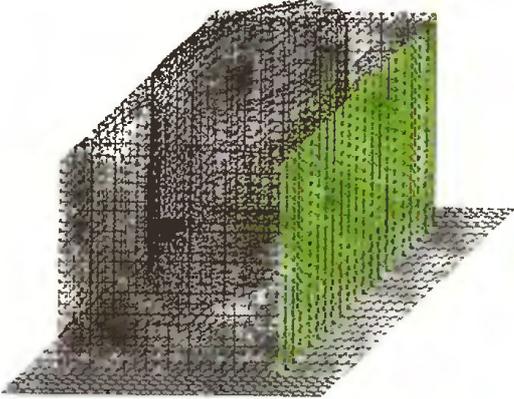
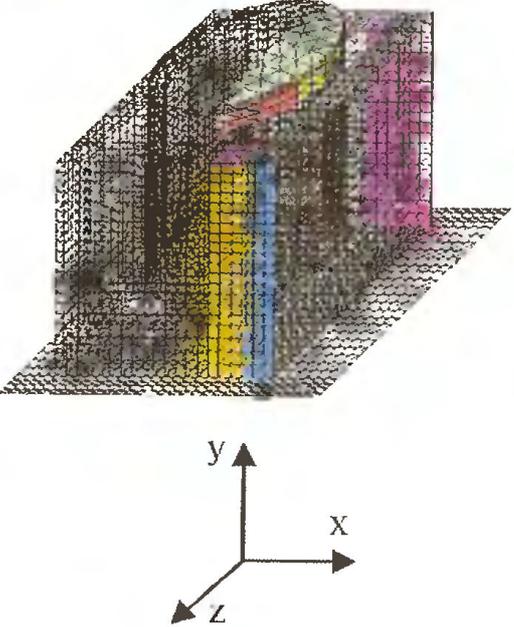
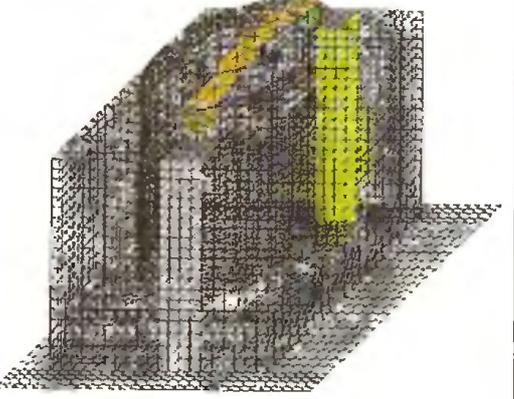
	<p>Схема 1. Фронт ударной волны действует на наружную грань обстройки. Момент времени <math>t = 0</math> с.</p> <p> <math>Q_x = -120000, Q_y = 0, Q_z = 0</math></p>
	<p>Схема 2. Ударная волна действует на боковые грани обстройки и оболочки в момент времени <math>t = 1.23</math> с.</p> <p><math>Q_x = 0, Q_y = 0, Q_z = -80000</math>  <math>Q_x = 0, Q_y = 0, Q_z = 80000</math>  <math>Q_x = -105000, Q_y = 0, Q_z = 0</math>  <math>Q_x = -63600, Q_y = 0, Q_z = -63600</math>  <math>Q_x = -63600, Q_y = 0, Q_z = 63600</math>  <math>Q_x = 0, Q_y = -84000, Q_z = 0</math>  <math>Q_x = 0, Q_y = 0, Q_z = -80000</math>  <math>Q_x = 0, Q_y = 0, Q_z = 80000</math>  <math>Q_x = 0, Q_y = -80000, Q_z = 0</math>  <math>Q_x = 0, Q_y = -80000, Q_z = 0</math></p>
	<p>Схема 3. Ударная волна действует на боковые грани обстройки и оболочки в момент времени <math>t = 2.45</math> с.</p> <p><math>Q_x = 0, Q_y = 0, Q_z = -66000</math>  <math>Q_x = 0, Q_y = 0, Q_z = 66000</math>  <math>Q_x = 0, Q_y = 0, Q_z = 66000</math>  <math>Q_x = 0, Q_y = 0, Q_z = -66000</math>  <math>Q_x = 0, Q_y = -60000, Q_z = 0</math>  <math>Q_x = 0, Q_y = -60000, Q_z = 0</math>  <math>Q_x = 0, Q_y = -66000, Q_z = 0</math></p>

Рис. 4.23. Нагрузка на лобовой и боковых поверхностях модели

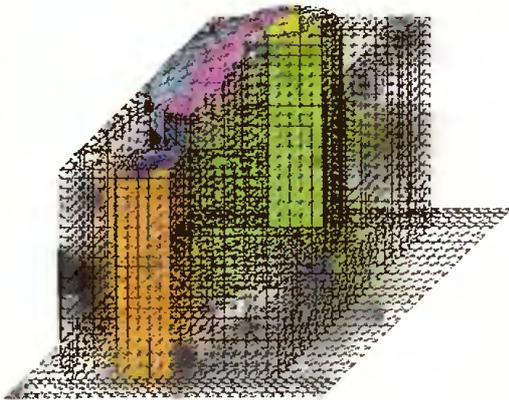


Схема 4. Ударная волна действует на боковые грани обстройки и оболочки в момент времени  $t=3.68$  с.

$$Q_x=0, Q_y=0, Q_z=-55000$$

$$Q_x=0, Q_y=0, Q_z=55000$$

$$Q_x=0, Q_y=0, Q_z=55000$$

$$Q_x=0, Q_y=-55000, Q_z=0$$

$$Q_x=0, Q_y=-30000, Q_z=0$$

$$Q_x=0, Q_y=-55000, Q_z=0$$

$$Q_x=35400, Q_y=0, Q_z=35400$$

$$Q_x=35400, Q_y=0, Q_z=-35400$$

$$Q_x=0, Q_y=0, Q_z=-55000$$

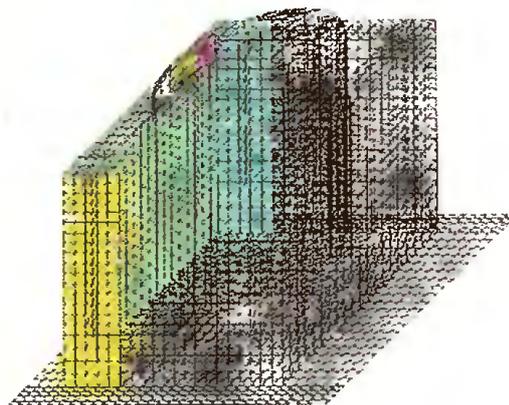


Схема 5. Ударная волна действует на боковые грани обстройки и оболочки в момент времени  $t=4.91$  с.

$$Q_x=0, Q_y=0, Q_z=-52000$$

$$Q_x=0, Q_y=0, Q_z=52000$$

$$Q_x=40000, Q_y=0, Q_z=0$$

$$Q_x=0, Q_y=-52000, Q_z=0$$

$$Q_x=30000, Q_y=0, Q_z=0$$

$$Q_x=35400, Q_y=0, Q_z=35400$$

$$Q_x=35400, Q_y=0, Q_z=-35400$$

Рис. 4.24. Нагрузка на боковой и тыльной поверхностях модели

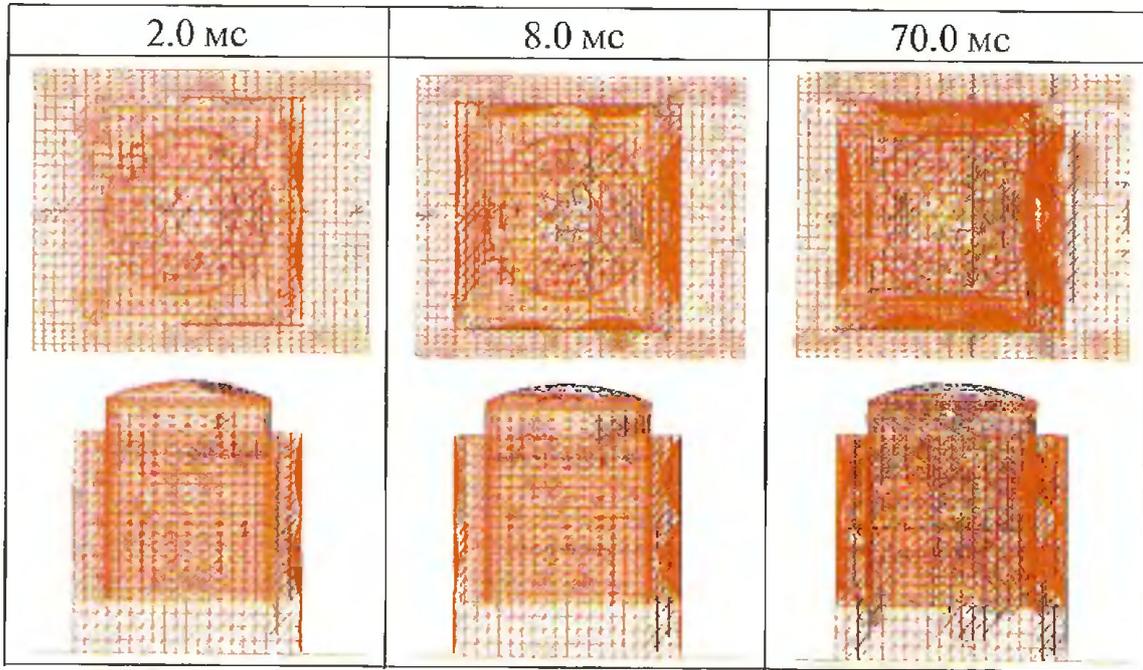


Рис. 4.25. Деформированные схемы модели энергоблока

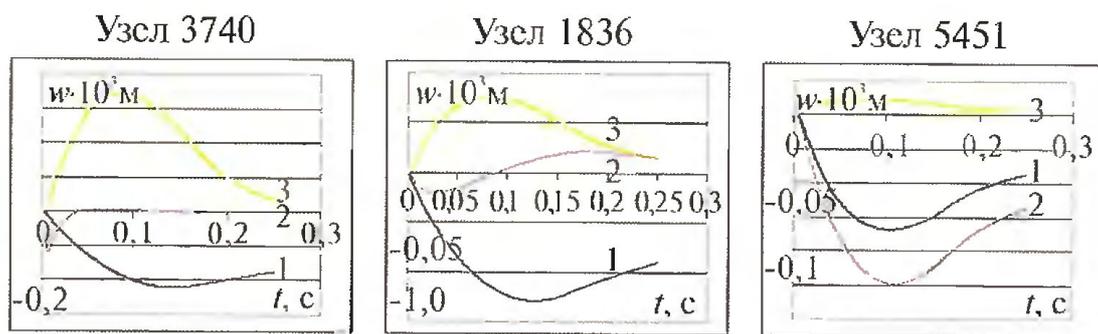


Рис. 4.26. Диаграммы перемещений узлов расчетной модели

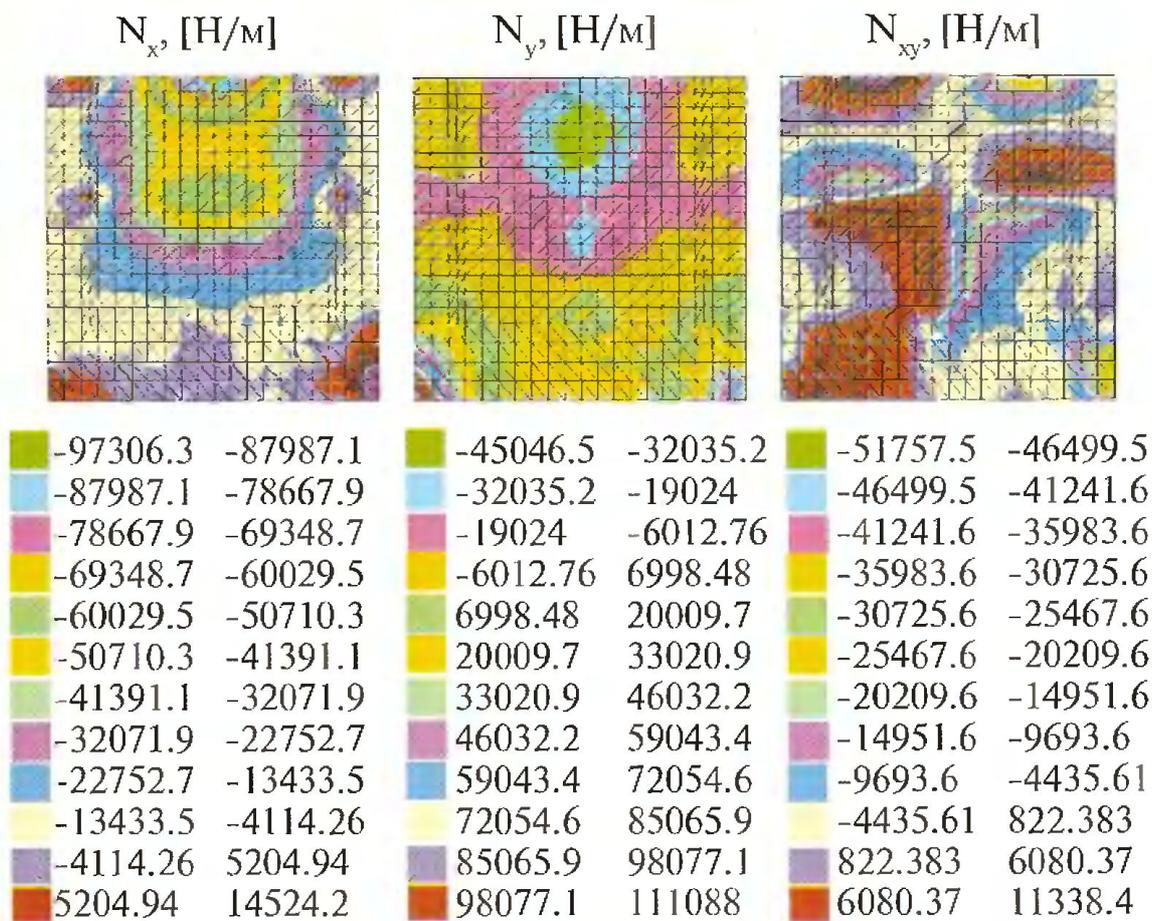


Рис. 4.27. Изополя касательных сил во фронтальной стене обстройки

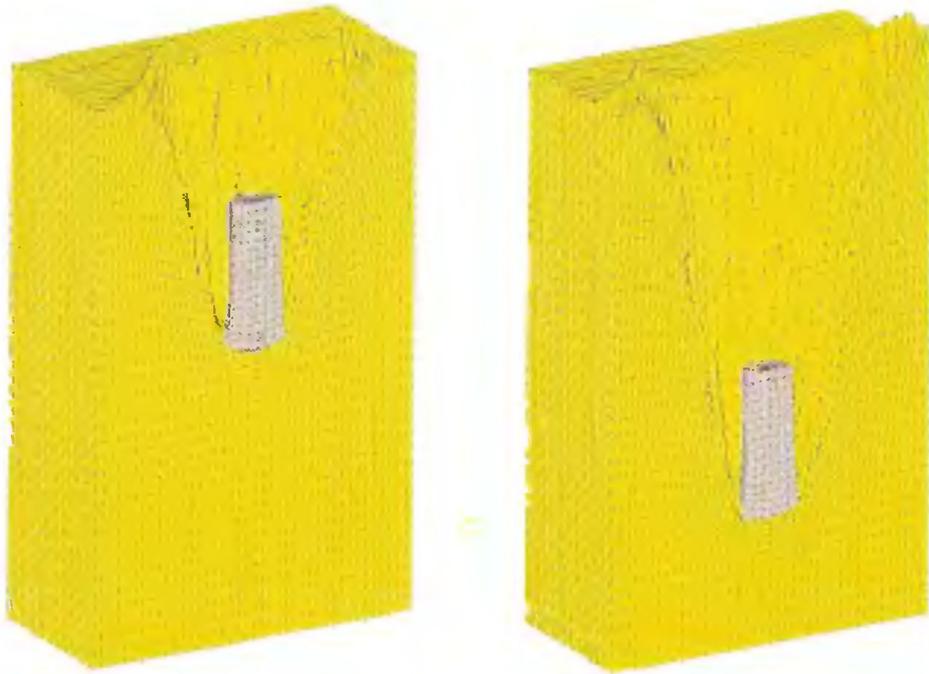


Рис. 5.22. Картины проникания в песчаный грунт цилиндрического ударника удлинением 3 диаметра со скоростью 1000 м/с в моменты времени 40 и 76 мкс

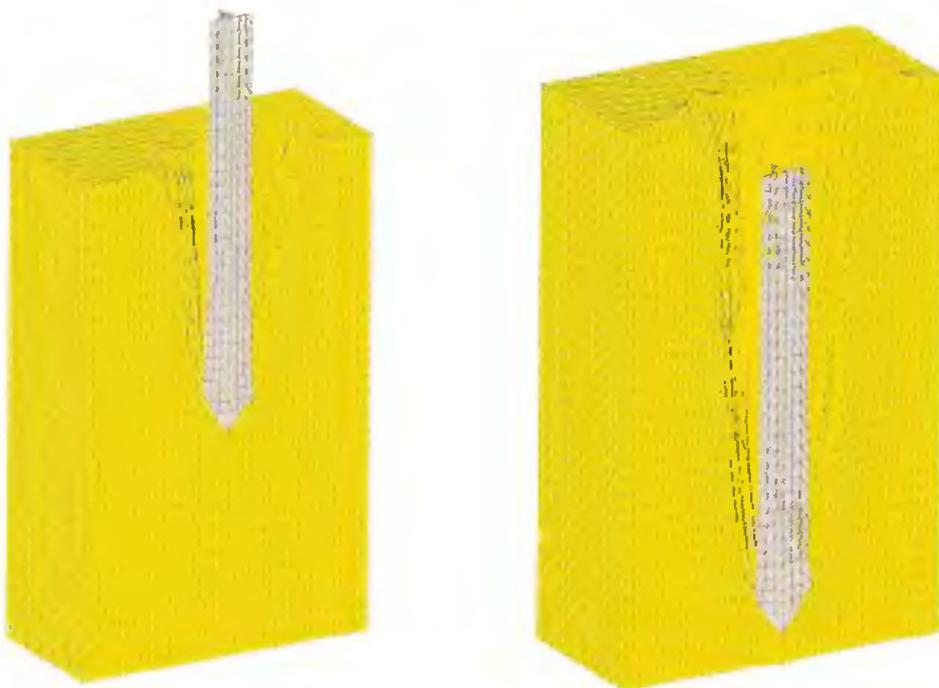


Рис. 5.23. Картины проникания заостренного звездообразного ударника с четырьмя лучами, размах которых равен диаметру ударника 2, в моменты времени 40 и 76 мкс

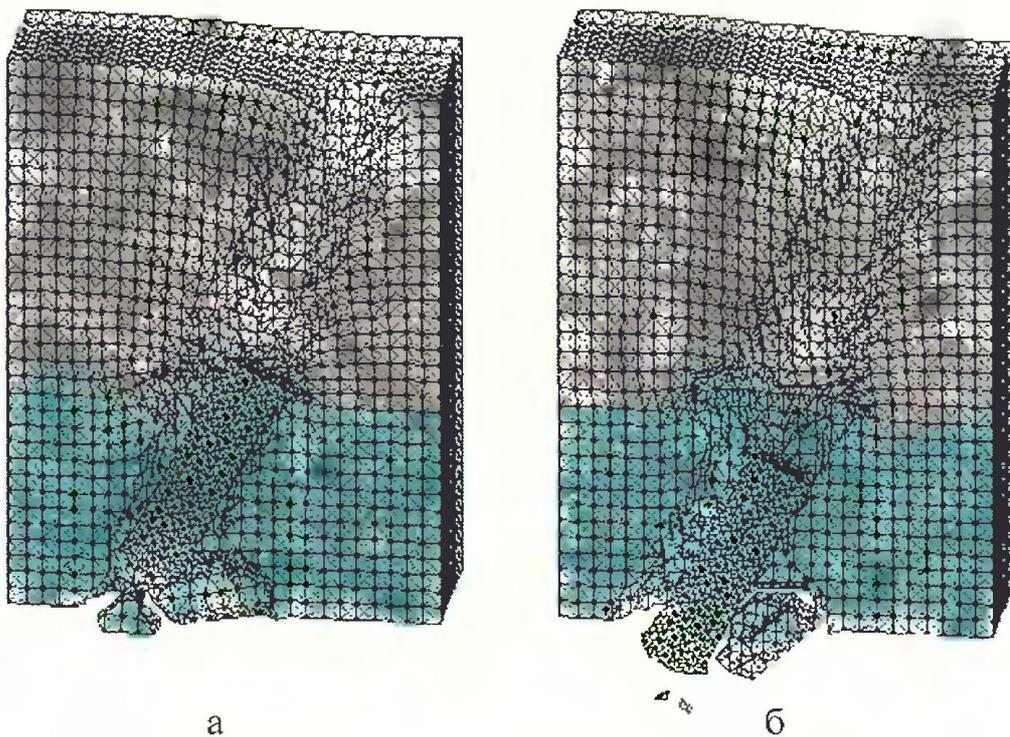


Рис. 5.25. Картины разрушения преграды первого типа стальным ударником при соударении со скоростью 420 м/с под углом  $20^\circ$

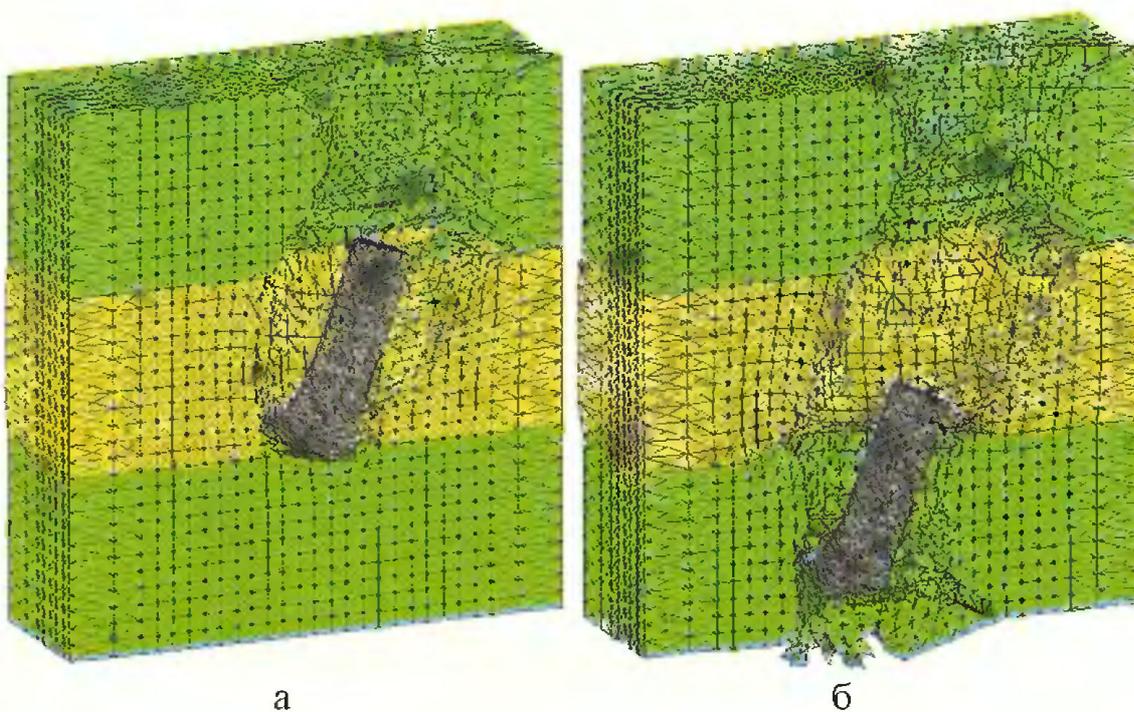
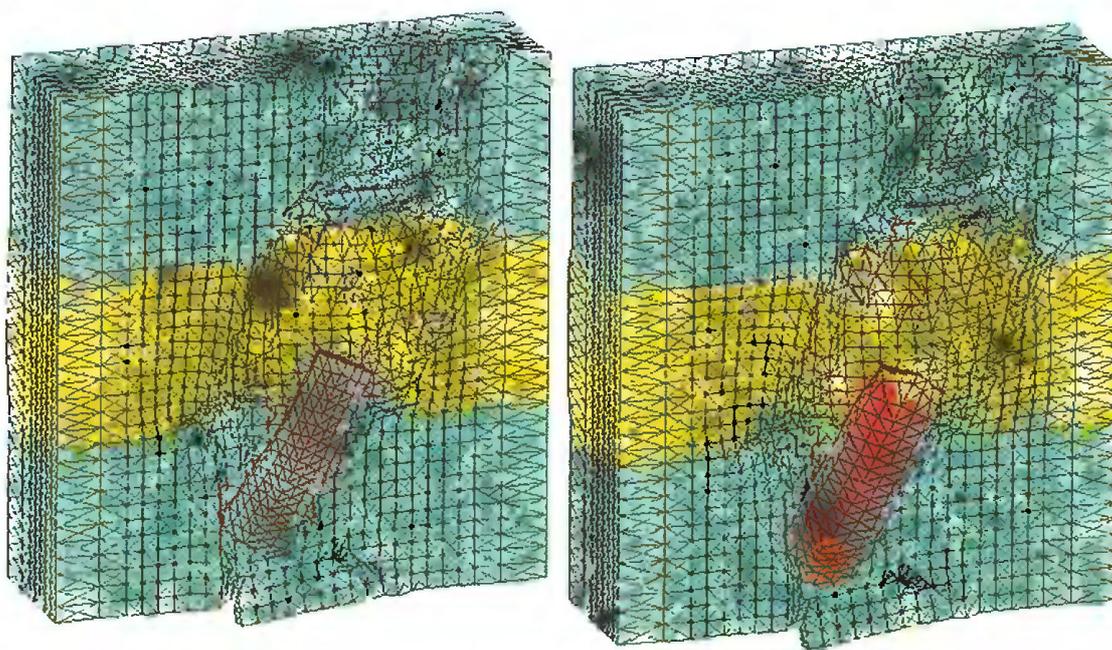
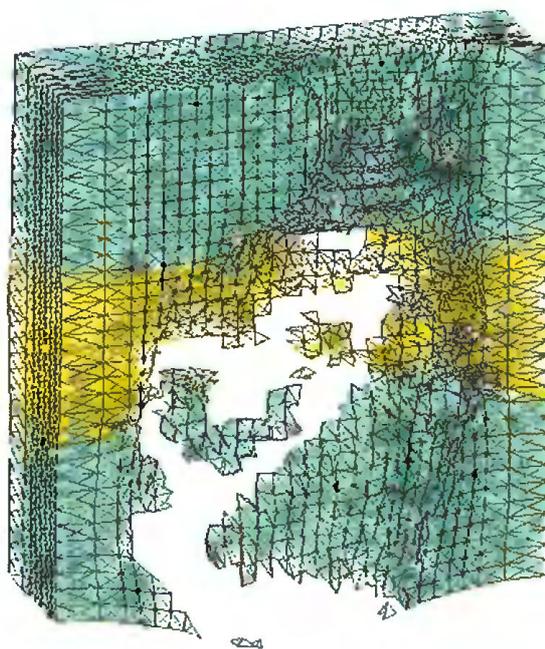


Рис. 5.26. Картины разрушения преграды второго типа стальным ударником при соударении со скоростью 800 м/с под углом  $20^\circ$



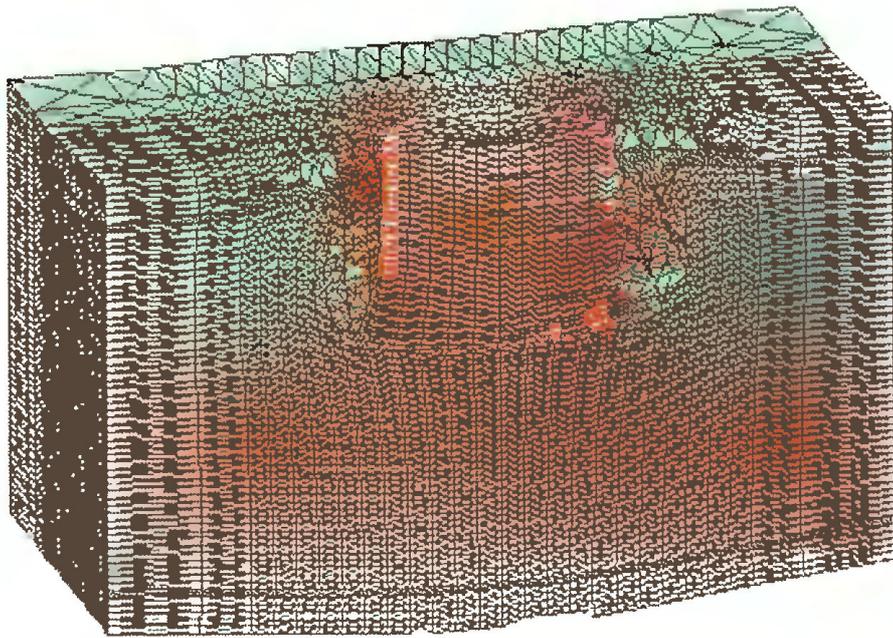
а

б



в

Рис. 5.27. Картины разрушения преграды второго типа модельным снарядом при соударении со скоростью 800 м/с под углом  $20^\circ$



Level	P
7	0.64
6	0.46
5	0.27
4	0.08
3	-0.11
2	-0.29
1	-0.48



Рис. 5.29. Картина разрушения и поля давлений в бетонной плите, армированной стальными листами, при соударении с ударником со скоростью 500 м/с в момент времени 0,7 мс

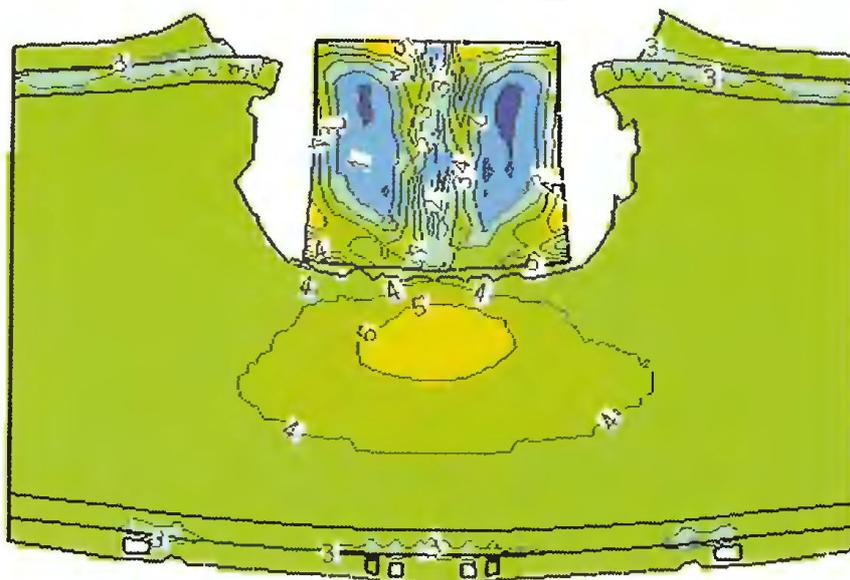
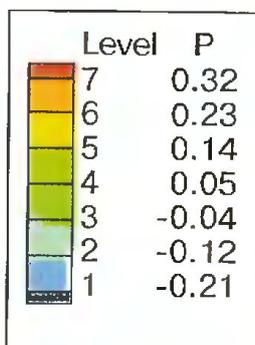
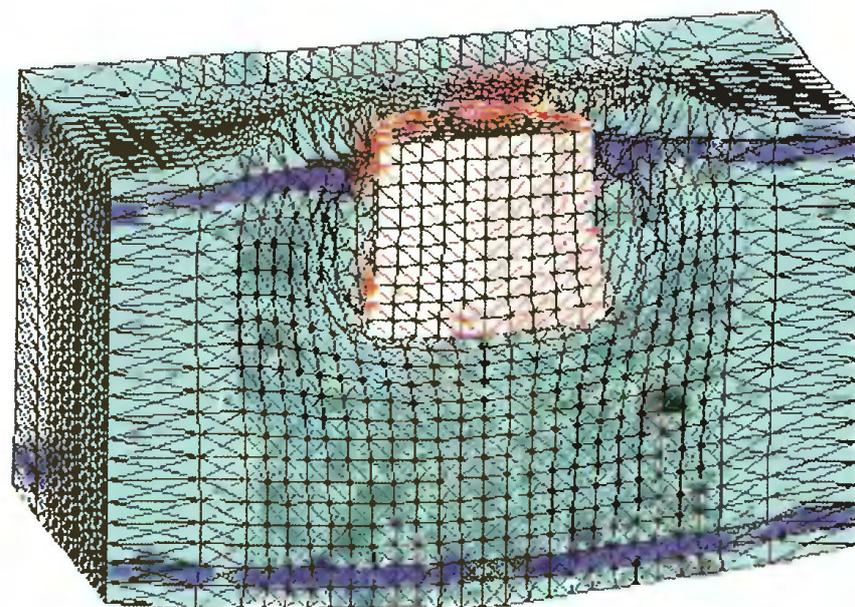
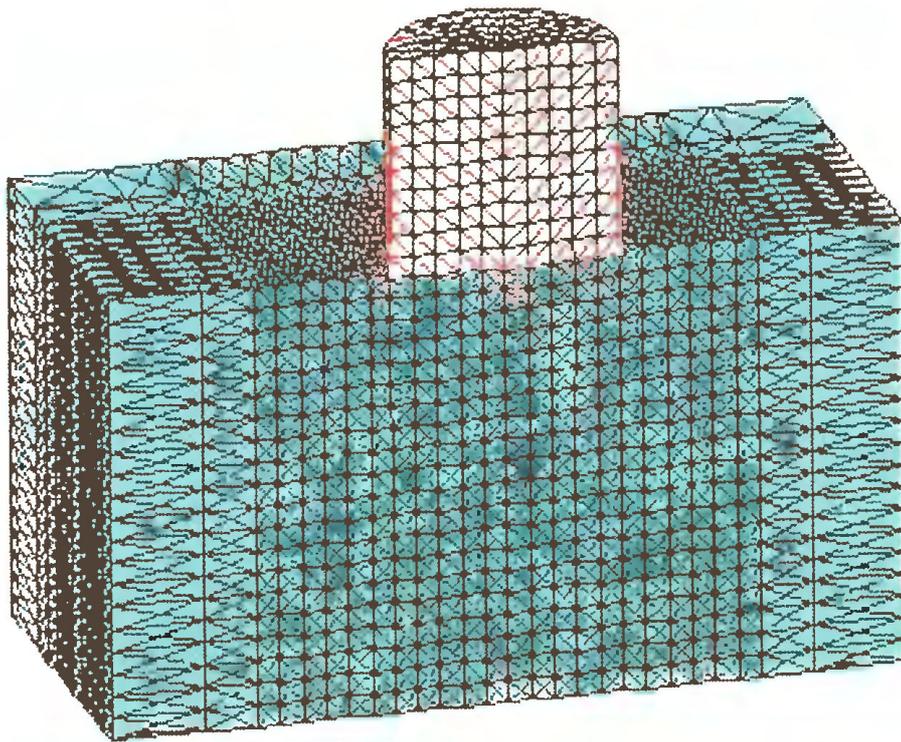
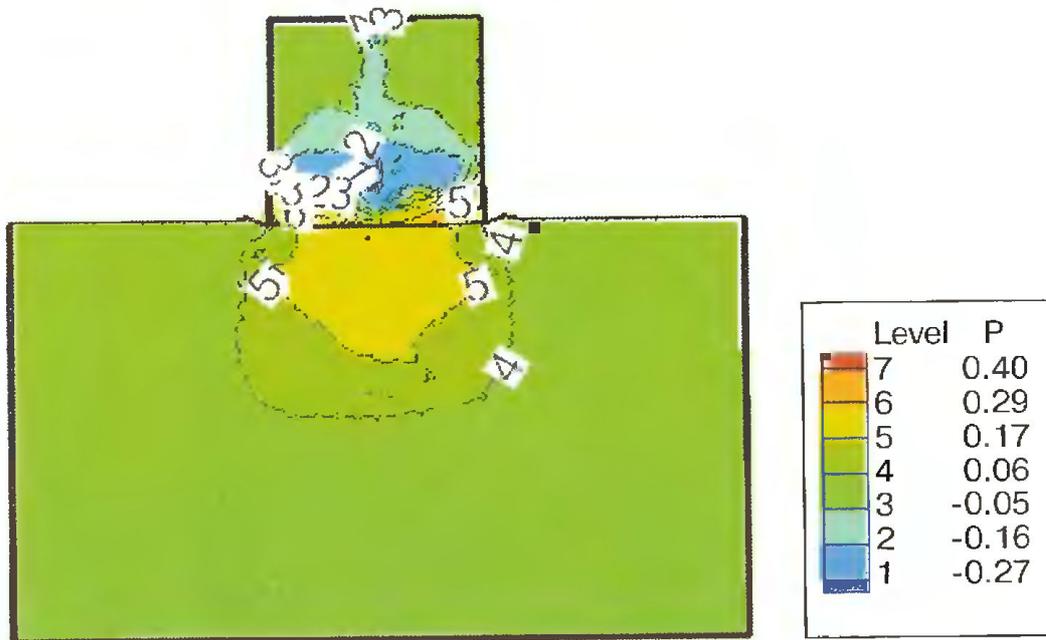


Рис. 5.30. Картина разрушения и поля давлений в плите, в которой армирующие стальные листы заменены однородной двухфазной смесью из стали и бетона, при соударении с ударником со скоростью 500 м/с в момент времени 0,7 мс

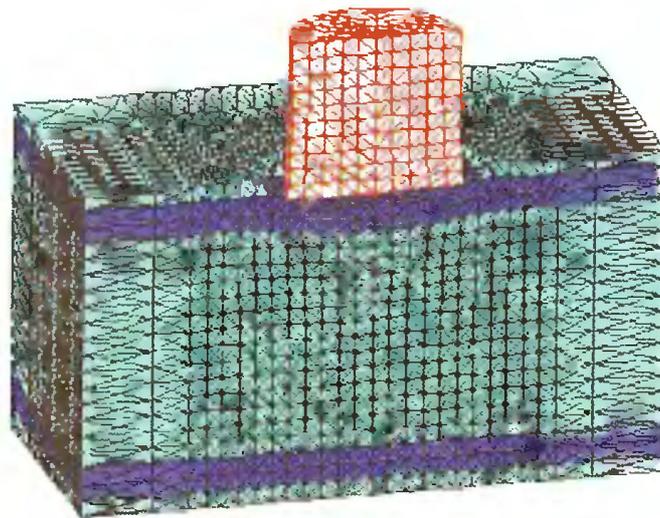


$t=0,4 \text{ мс}$

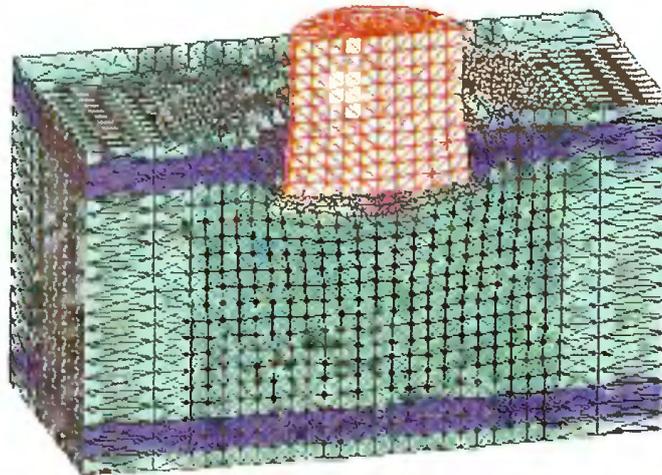


$t=0,4 \text{ мс}$

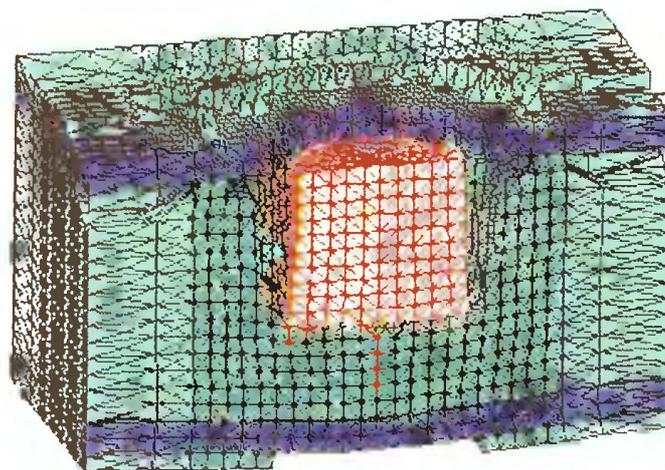
Рис. 5.31. Конфигурации и поля давлений в бетонной плите и ударнике при соударении со скоростью 50 м/с



$t=0,1 \text{ мс}$

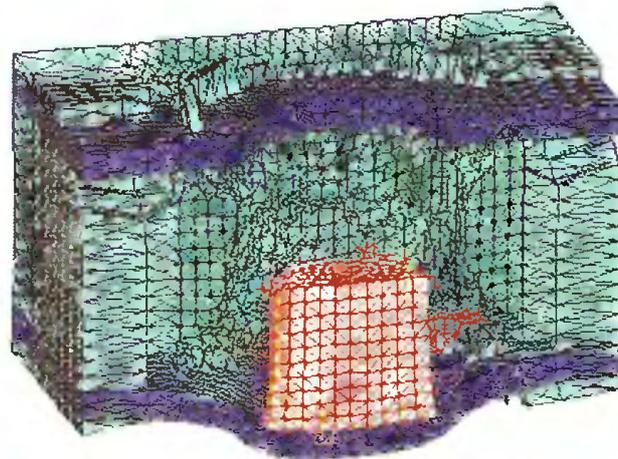


$t=0,3 \text{ мс}$

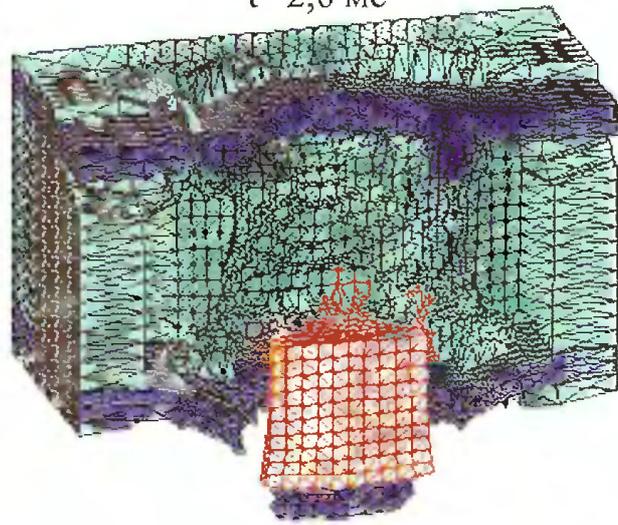


$t=1,0 \text{ мс}$

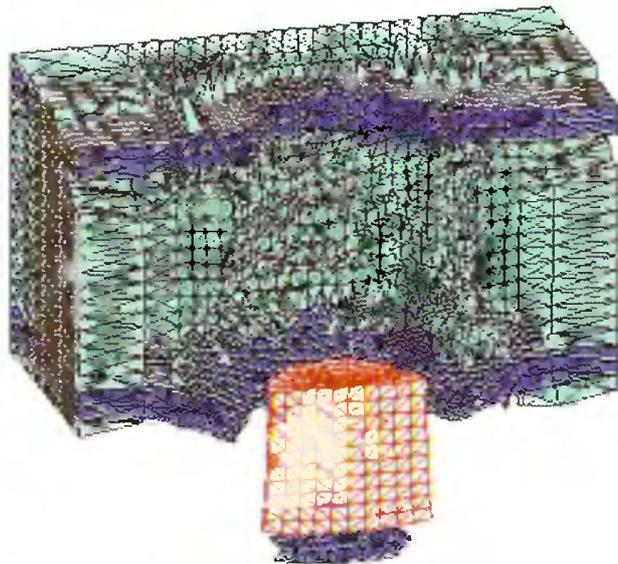
Рис. 5.32. Картина разрушения бетонной плиты, армированной стальной сеткой. Скорость удара 500 м/с



$t=2,0$  мс

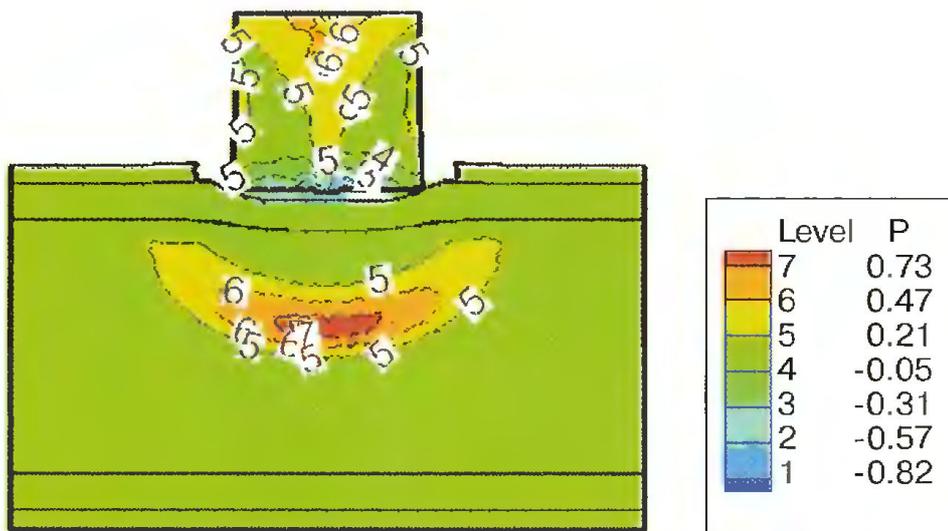


$t=2,5$  мс

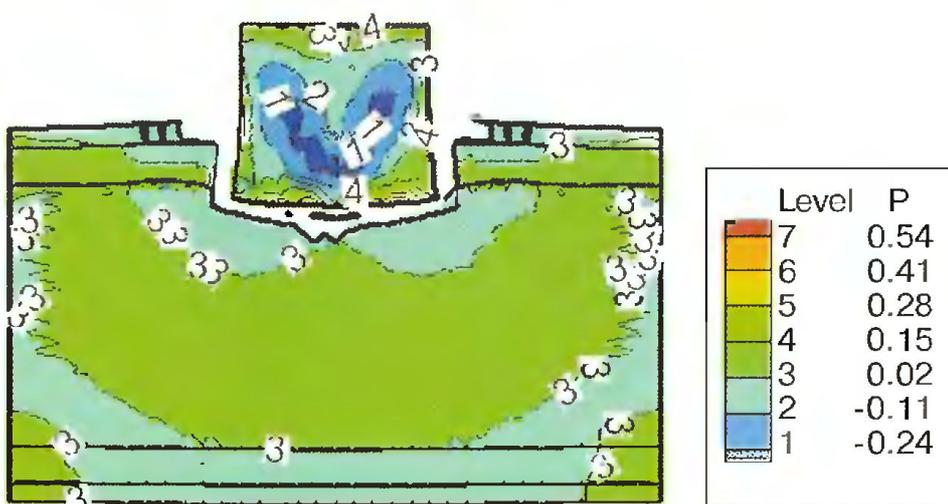


$t=2,9$  мс

Рис. 5.33. Картина разрушения бетонной плиты, армированной стальной сеткой. Скорость удара 500 м/с



$t=0,1 \text{ мс}$

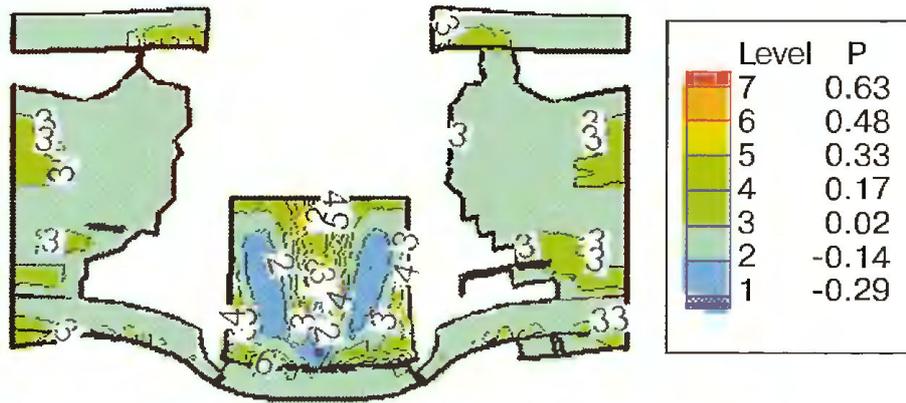


$t=0,3 \text{ мс}$

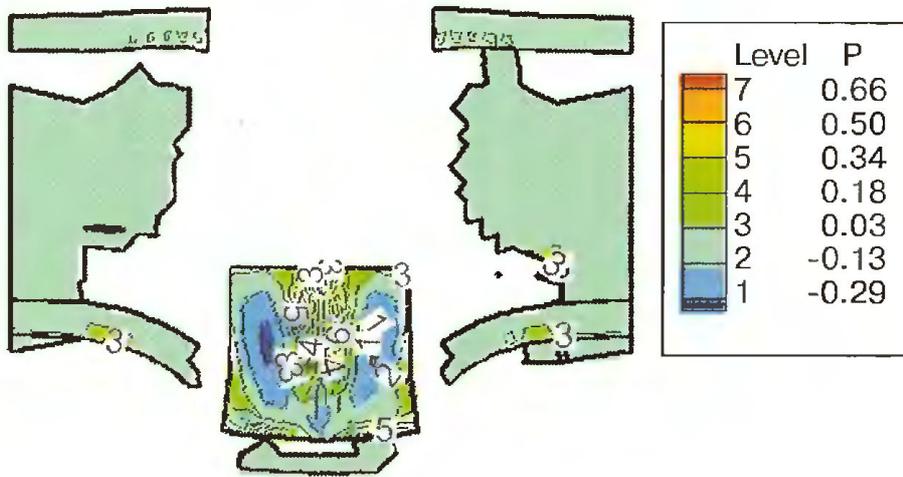


$t=1,0 \text{ мс}$

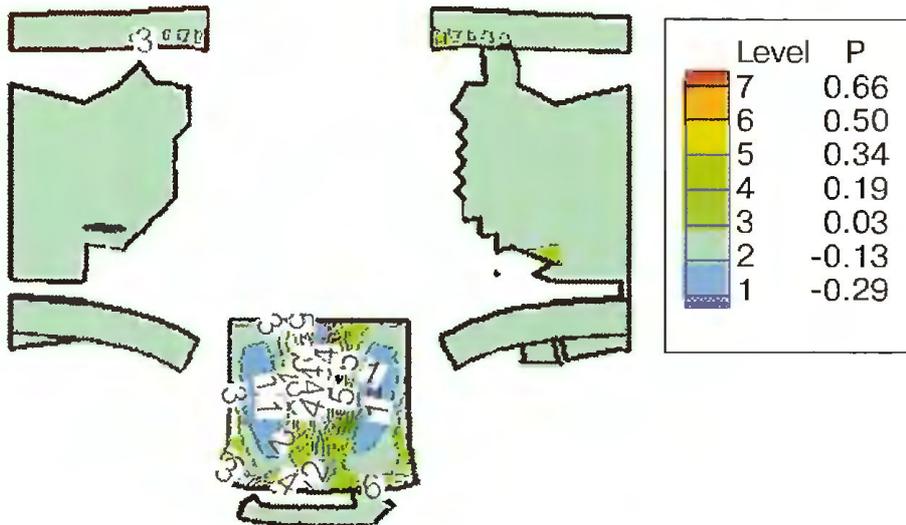
Рис. 5.34. Поля давлений в бетонной плите, армированной стальной сеткой. Скорость удара 500 м/с



t=2,0 мс

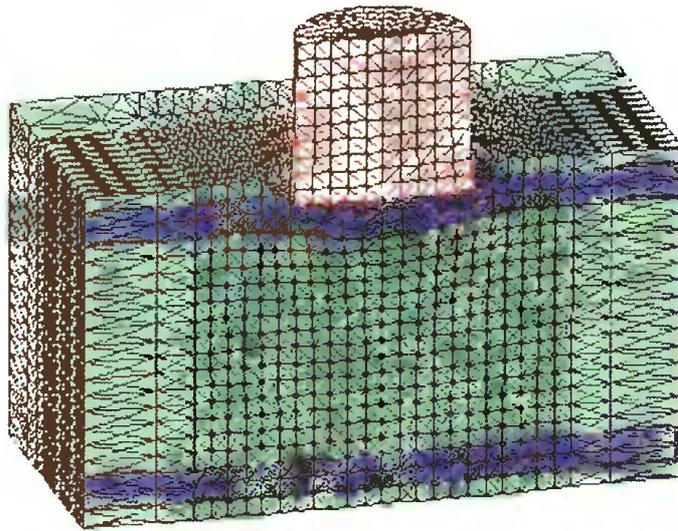


t=2,5 мс

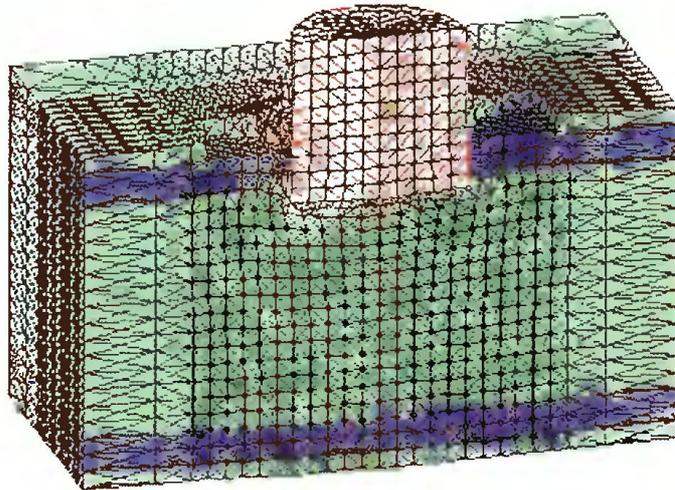


t=2,9 мс

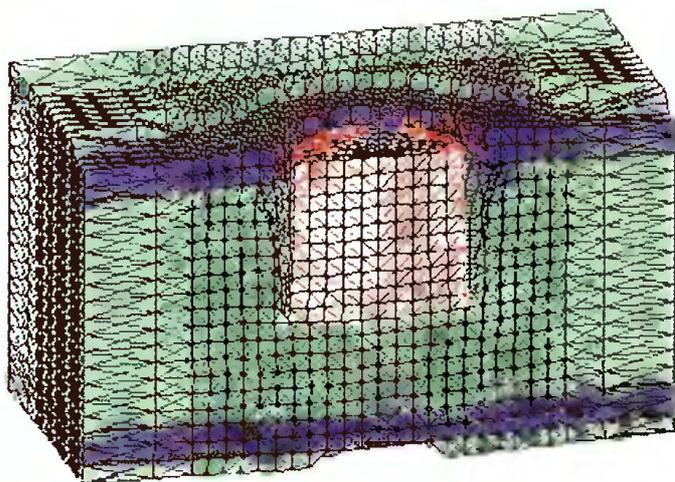
Рис. 5.35. Поля давлений в бетонной плите, армированной стальной сеткой. Скорость удара 500 м/с



$t=0,2 \text{ мс}$

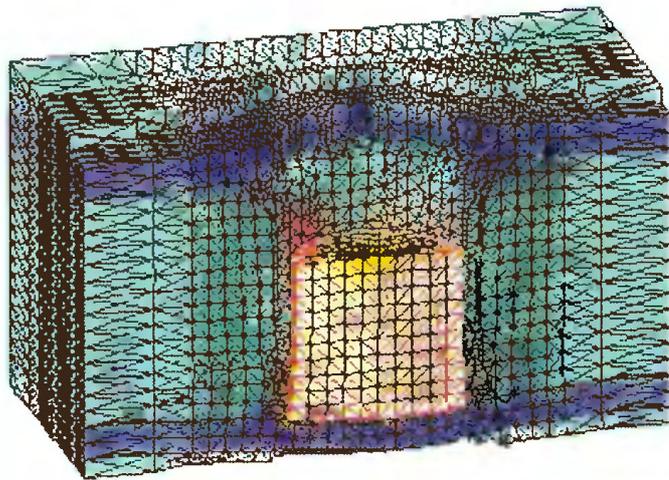


$t=0,5 \text{ мс}$

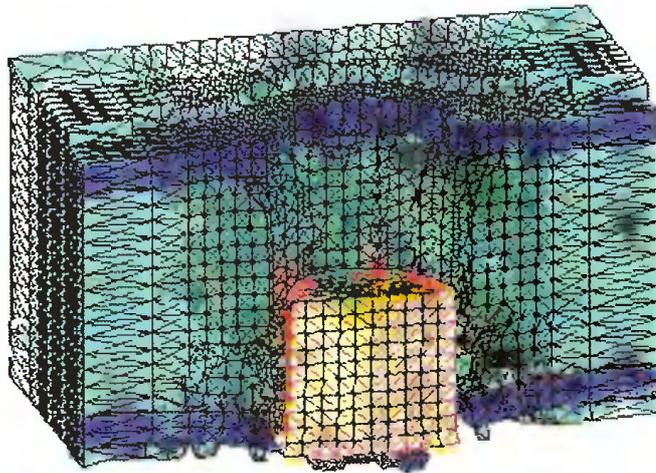


$t=1,8 \text{ мс}$

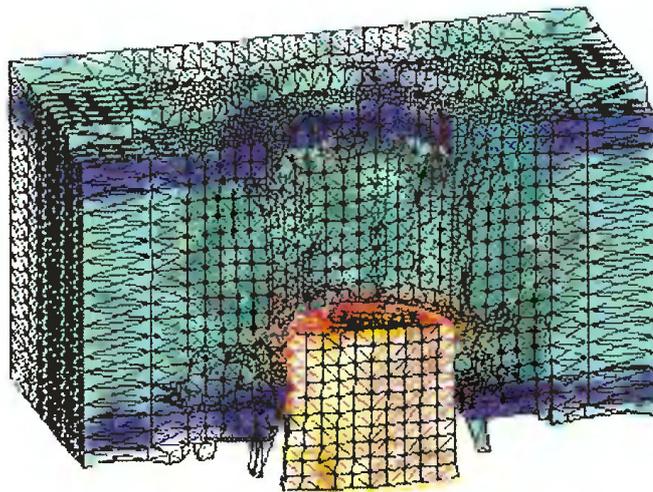
Рис. 5.36. Картина разрушения бетонной плиты, армированной стальной сеткой. Скорость удара 300 м/с



$t=3,5 \text{ мс}$

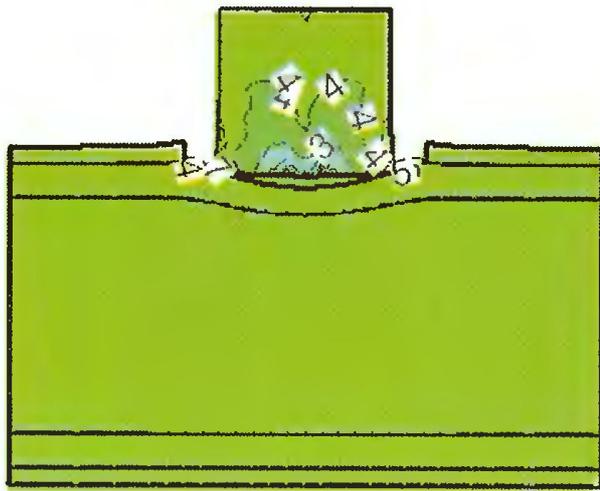


$t=4,5 \text{ мс}$

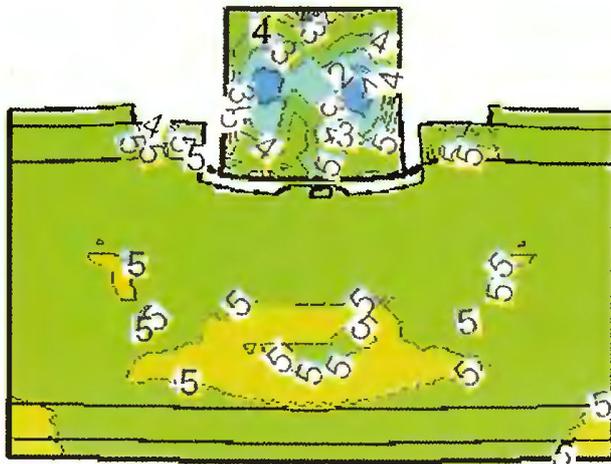
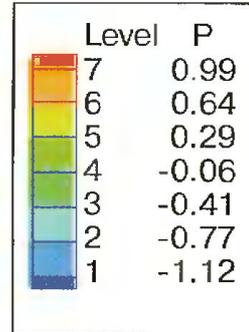


$t=5,2 \text{ мс}$

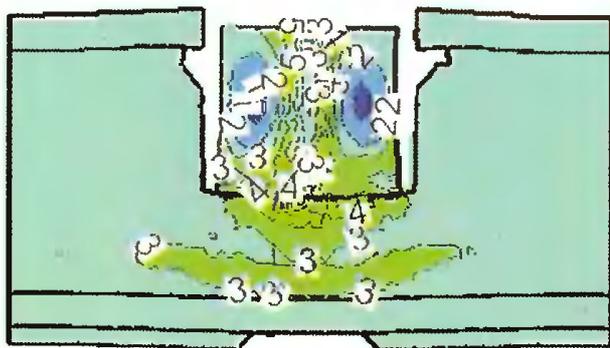
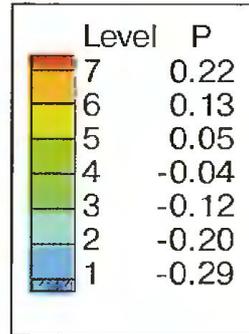
Рис. 5.37. Картина разрушения бетонной плиты, армированной стальной сеткой. Скорость удара 300 м/с



$t=0,2 \text{ мс}$



$t=0,5 \text{ мс}$



$t=1,8 \text{ мс}$

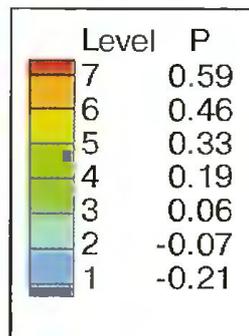
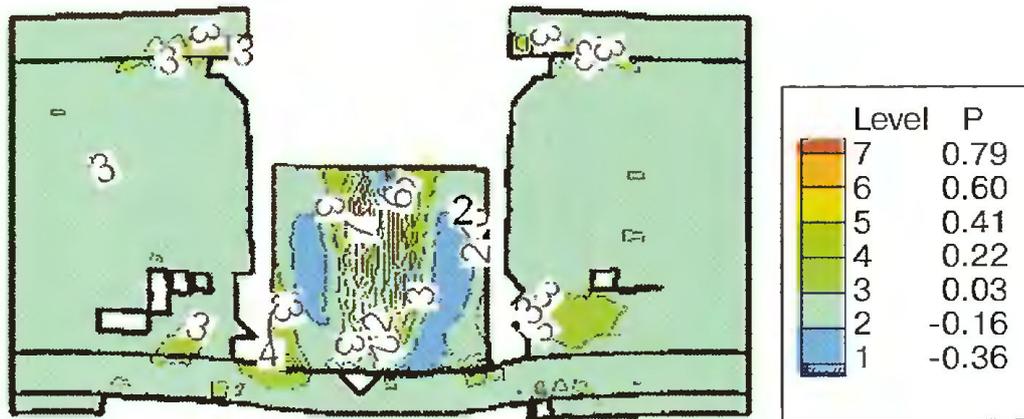
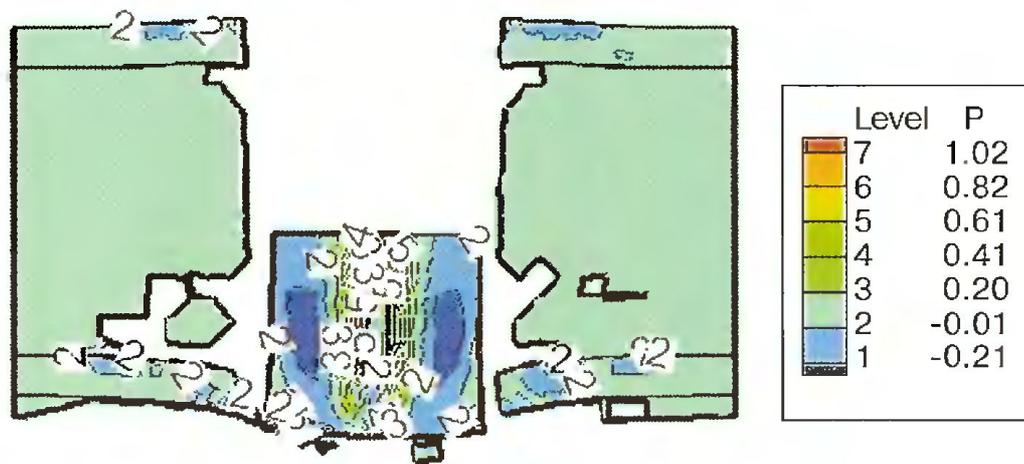


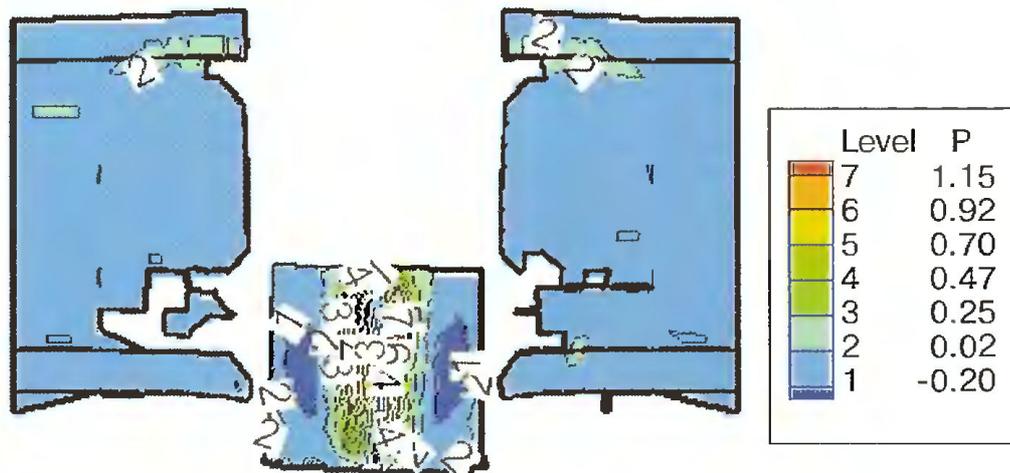
Рис. 5.38. Поля давлений в бетонной плите, армированной стальной сеткой. Скорость удара 300 м/с



t=3,5 мс

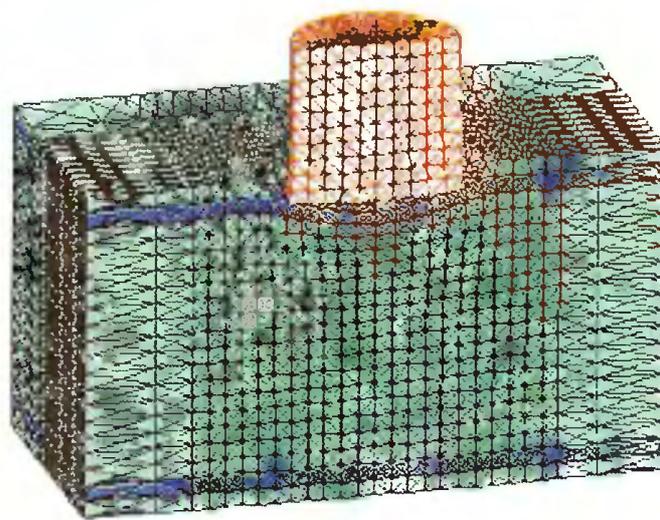


t=4,5 мс

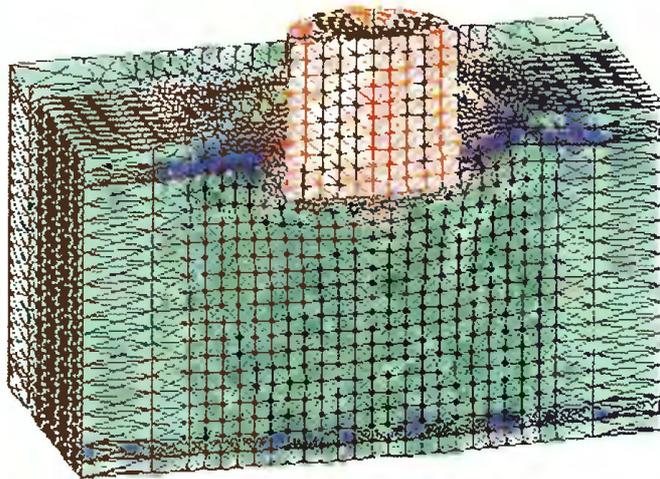


t=5,2 мс

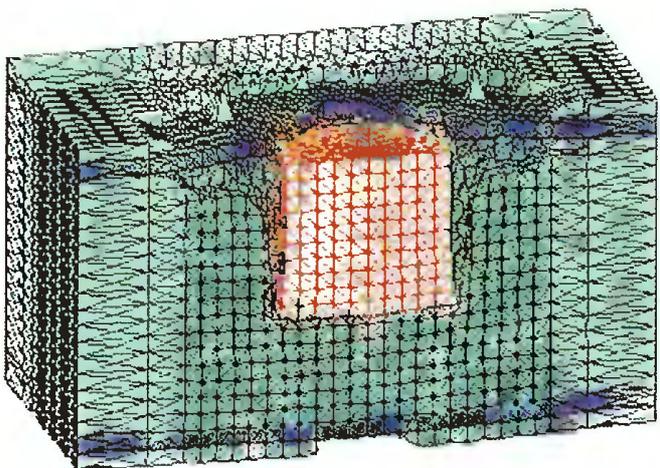
Рис. 5.39. Поля давлений в бетонной плите, армированной стальной сеткой. Скорость удара 300 м/с



$t=0,2 \text{ мс}$

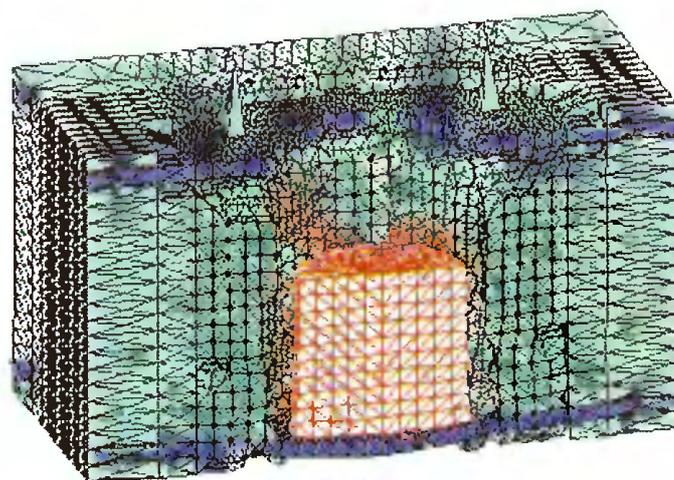


$t=0,5 \text{ мс}$

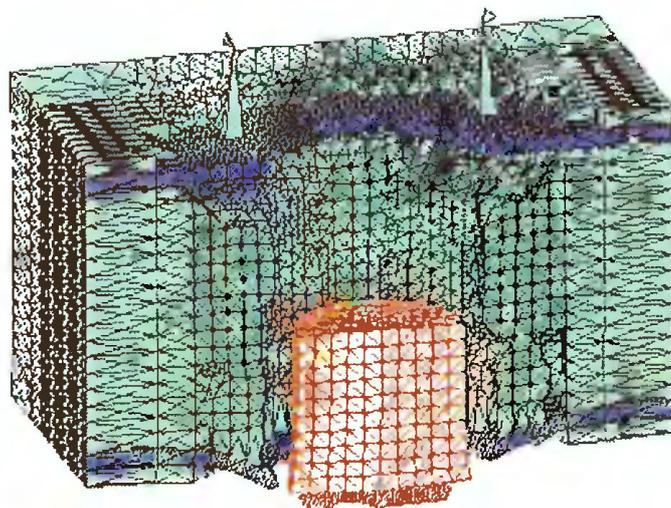


$t=1,8 \text{ мс}$

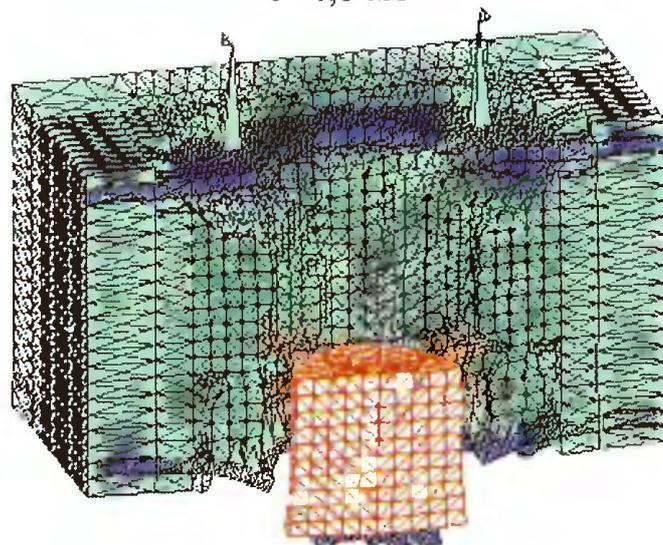
Рис. 5.40. Картина разрушения бетонной плиты, армированной стальными листами. Скорость удара 300 м/с



$t=3,5 \text{ мс}$



$t=4,5 \text{ мс}$



$t=5,2 \text{ мс}$

Рис. 5.41. Картина разрушения бетонной плиты, армированной стальными листами. Скорость удара 300 м/с

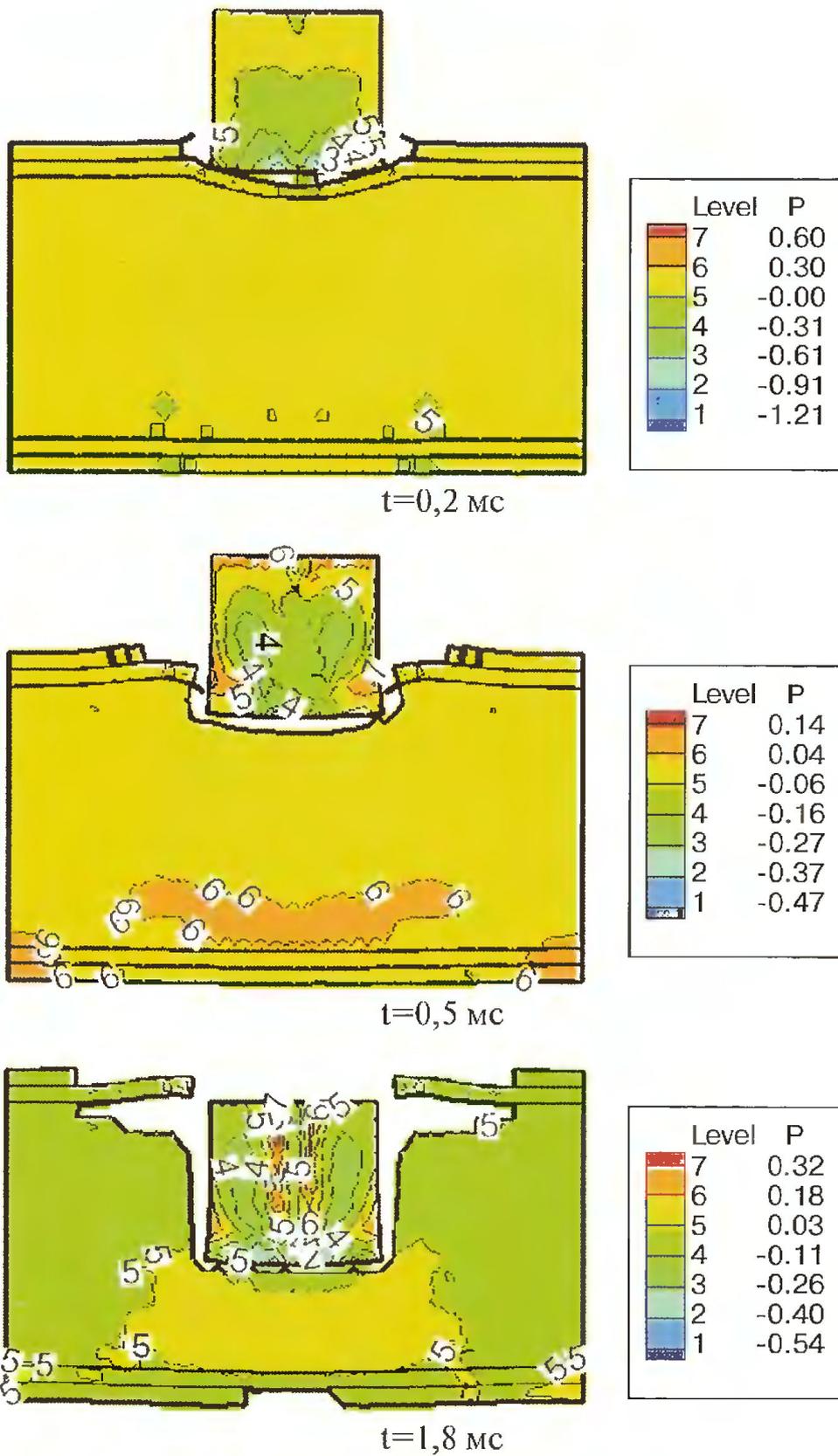


Рис. 5.42. Поля давлений в бетонной плите, армированной стальными листами. Скорость удара 300 м/с

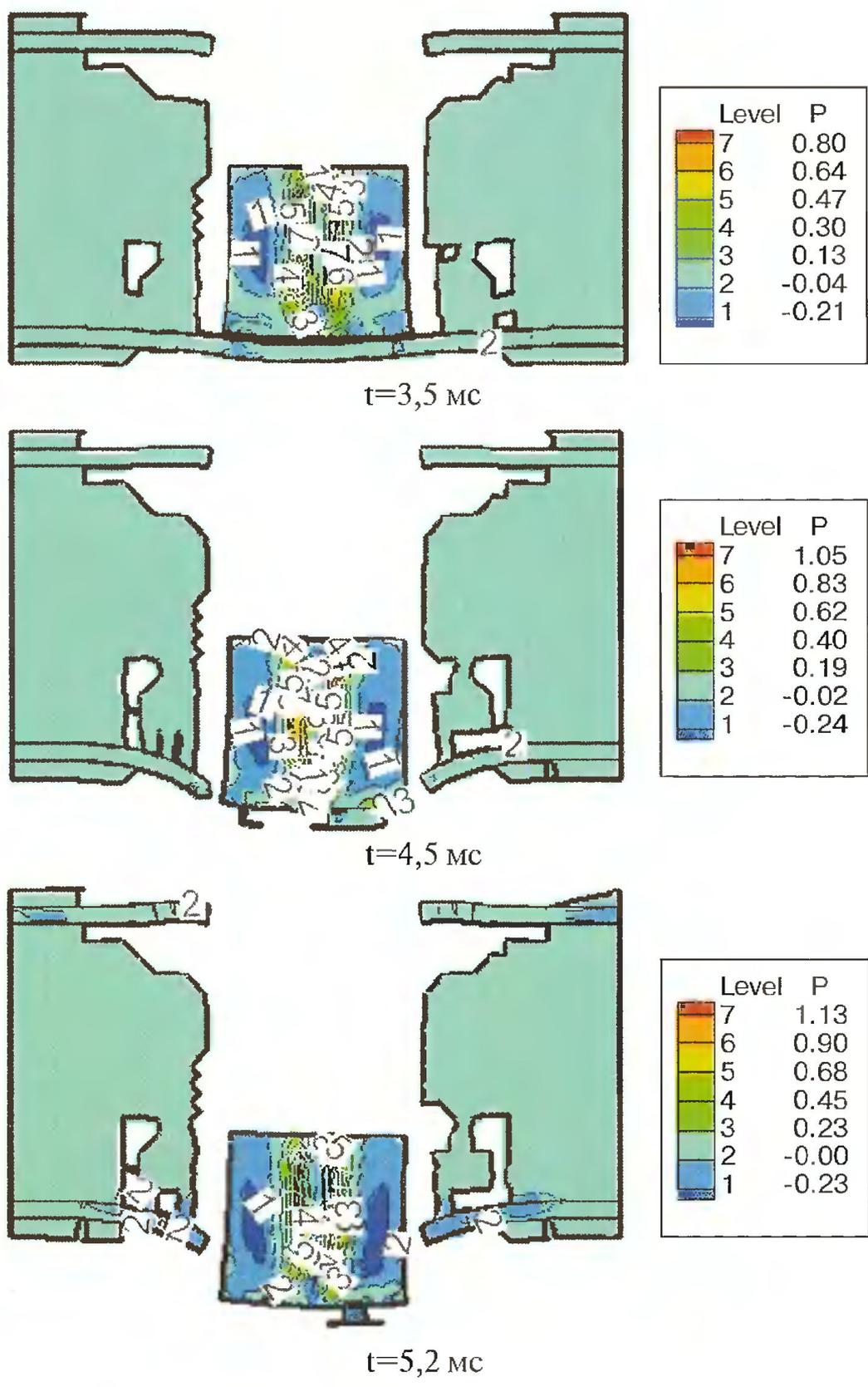
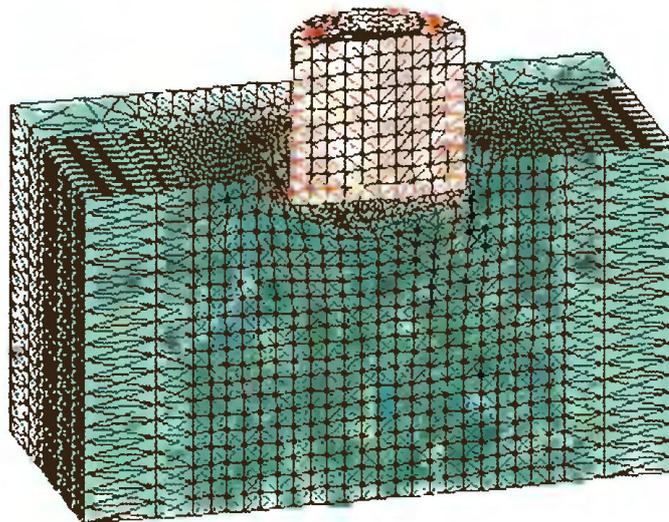
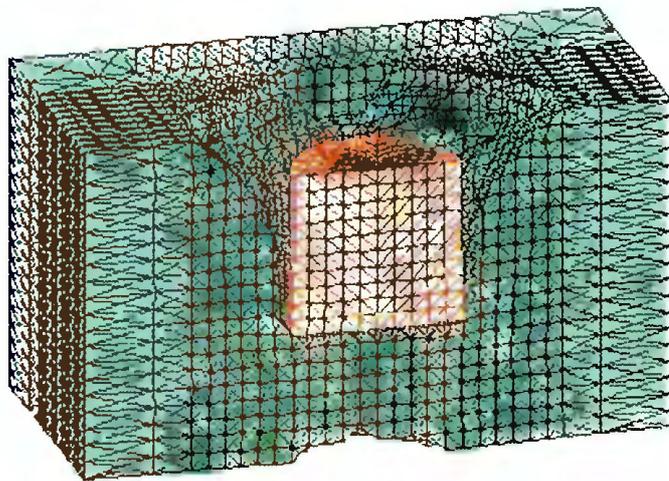


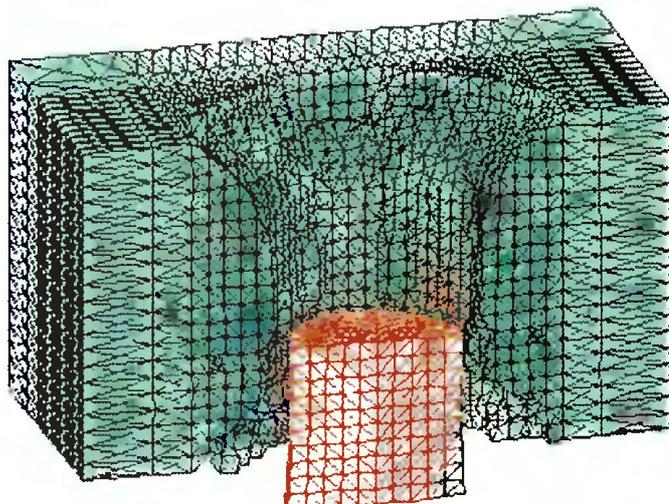
Рис. 5.43. Поля давлений в бетонной плите, армированной стальными листами. Скорость удара 300 м/с



$t=0,2 \text{ мс}$

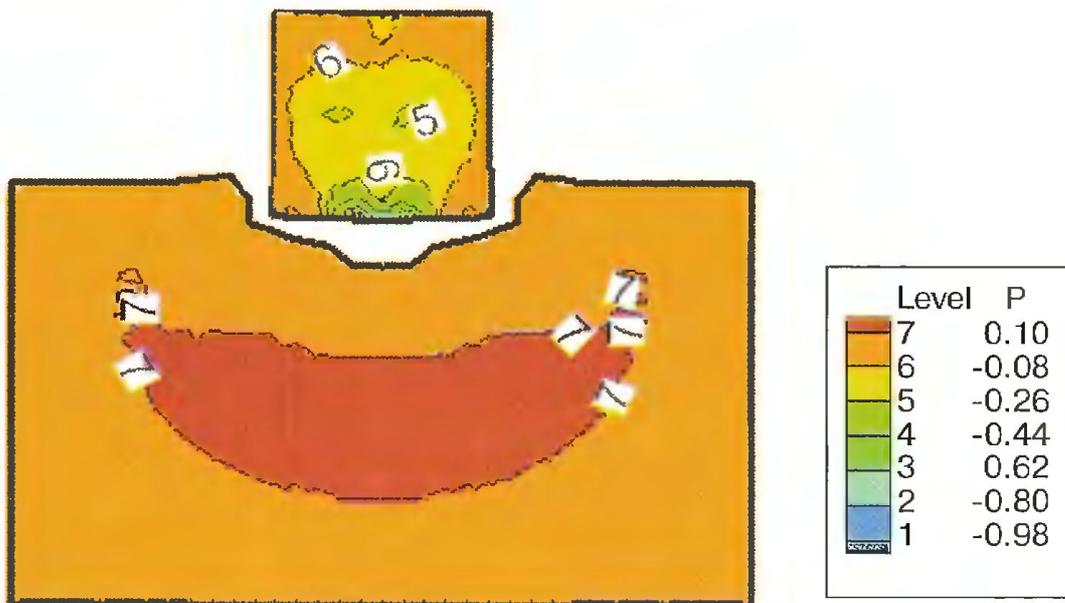


$t=1,8 \text{ мс}$

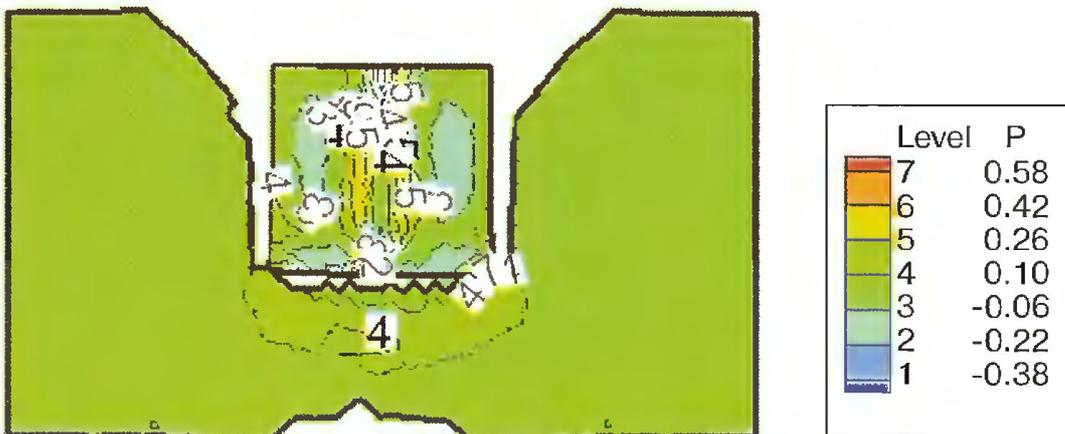


$t=4,3 \text{ мс}$

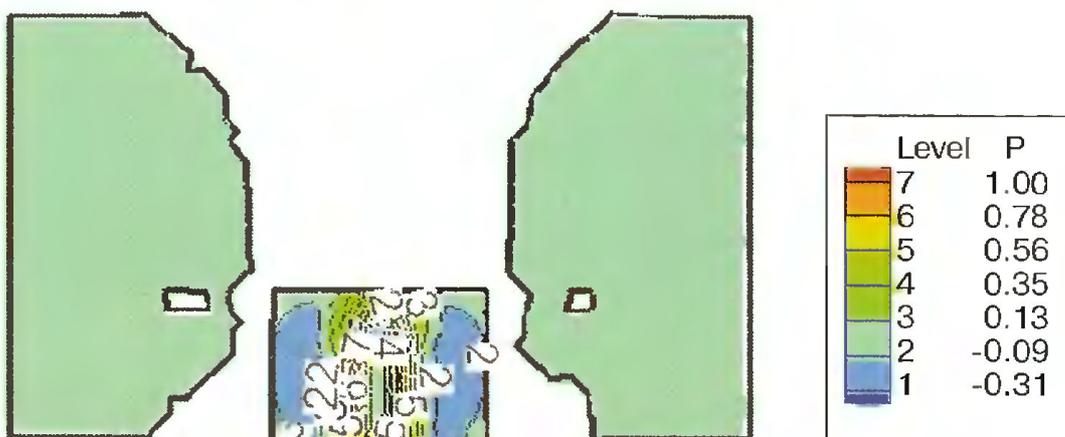
Рис. 5.44. Картина разрушения бетонной плиты. Скорость удара 300 м/с



t=0,2 мс



t=1,8 мс



t=4,3 мс

Рис. 5.45. Поля давлений в бетонной плите. Скорость удара 300 м/с

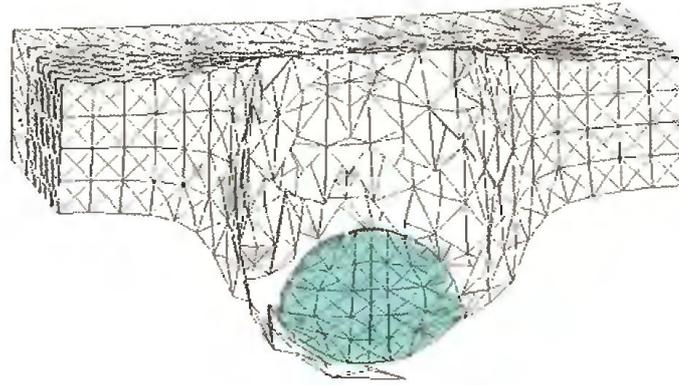


Рис. 6.8. Картина пробития первой мишени сферическим ударником из ВНЖ на момент времени 10 мкс

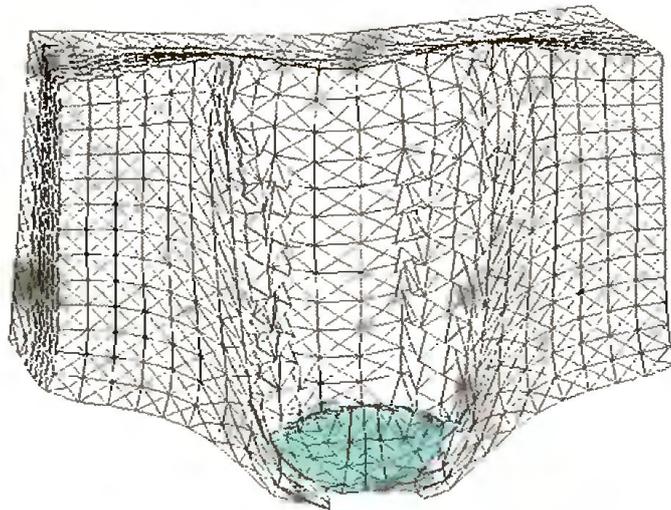


Рис. 6.9. Картина пробития второй мишени сферическим ударником из ВНЖ на момент времени 36 мкс

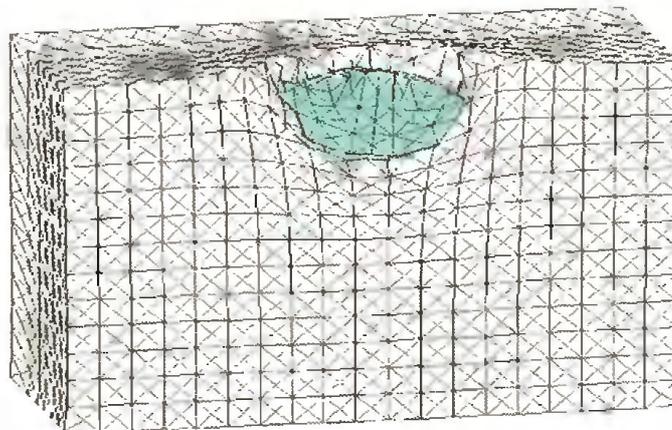


Рис. 6.10. Картина деформации ударника и третьей мишени на момент времени 62 мкс

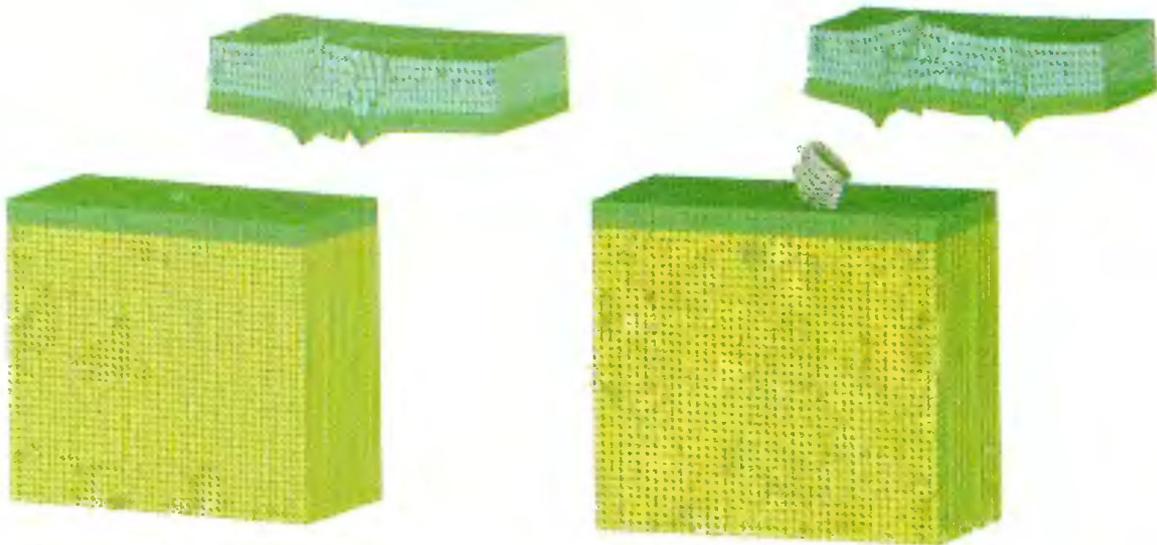


Рис. 6.12. Конфигурации слоисто-разнесенной конструкции и ударников массой 1 г и 10 г в моменты времени 47 мкс (слева) и 32 мкс (справа)

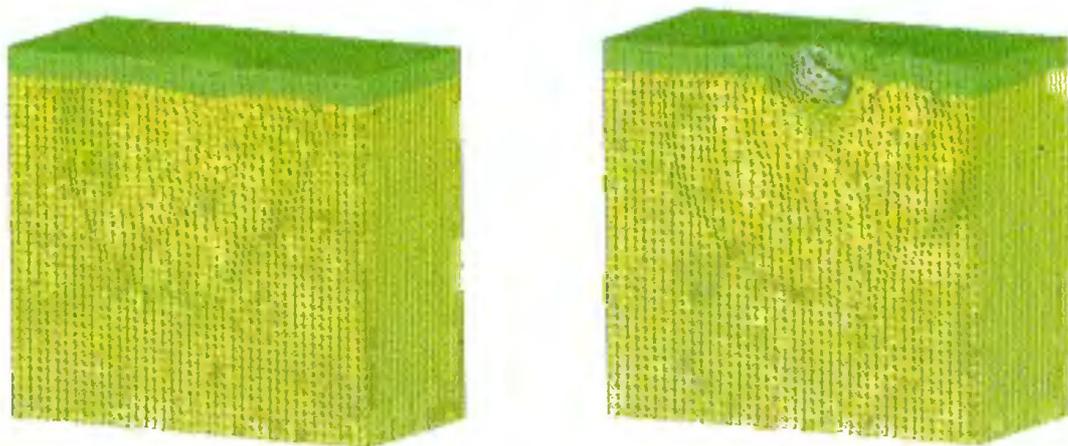


Рис. 6.13. Взаимодействие ударников массой 1 г и 10 г со второй преградой в моменты времени 55 мкс (слева) и 38 мкс (справа)

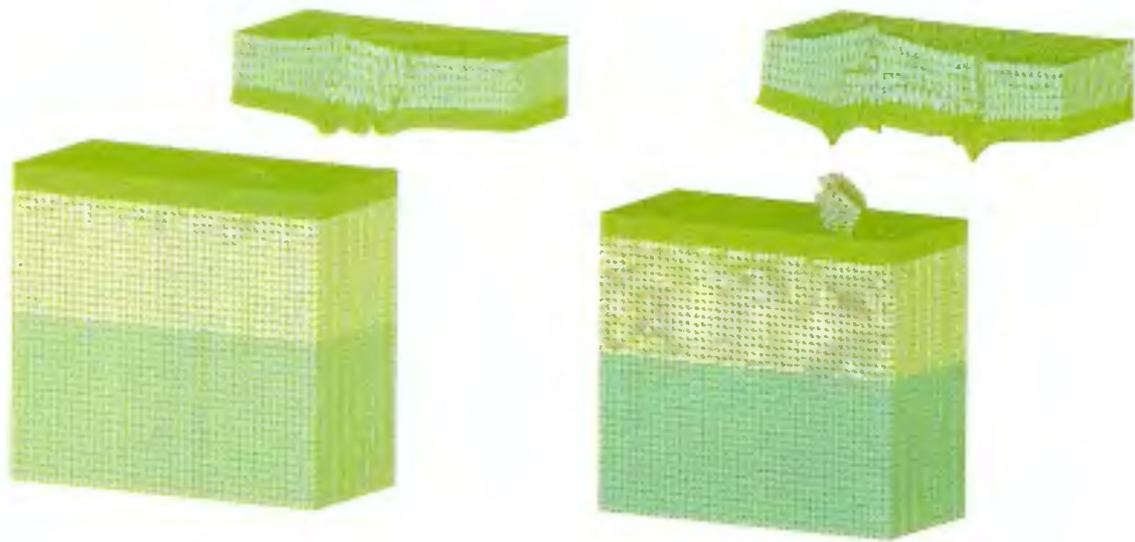


Рис. 6.14. Конфигурации ударника и слоисто-разнесенной конструкции, содержащей демпфирующий слой пенопласта в моменты времени 47 мкс (слева) и 32 мкс (справа)

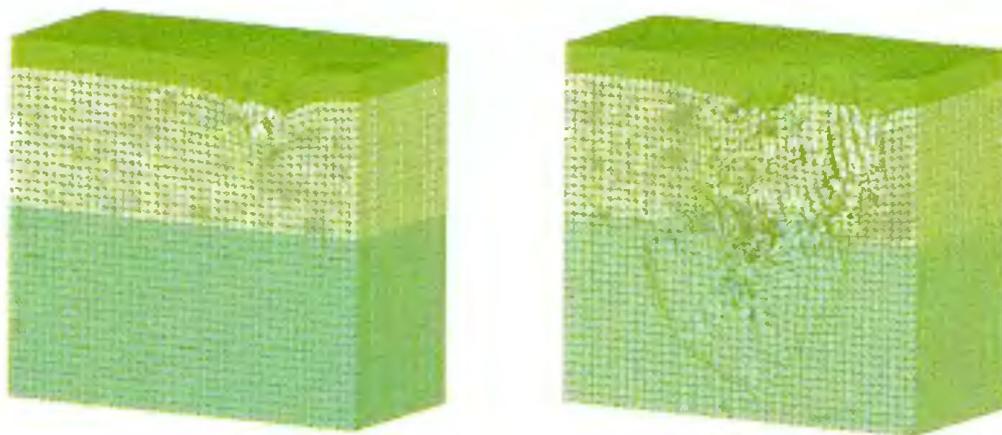


Рис. 6.15. Взаимодействие ударника с преградой, содержащей демпфирующий слой в моменты времени 65 мкс (слева) и 52 мкс (справа)